Chapitre 1

INTRODUCTION AU TRAITEMENT DU SIGNAL

1.1 Théorie du signal.

1.1.1 Généralités

On appelle traitement du signal la science qui analyse et interprète les informations contenues dans un signal.

Le terme signal vient du latin *"signum"* et désigne un élément de langage une marque ou un symbole qui véhicule une information. En physique, le signal représente le résultat d'une mesure d'un phénomène physique et il convient donc de bien distinguer le phénomène et sa mesure. Dans la majorité des cas, le signal mesuré résultera de la transformation du phénomène physique en un signal électrique que l'on détectera à l'aide d'un capteur ou transducteur. Il est important de noter que le résultat de la mesure est l'aboutissement du parcours du signal à travers une longue chaîne qui peut être symbolisée de la façon suivante :

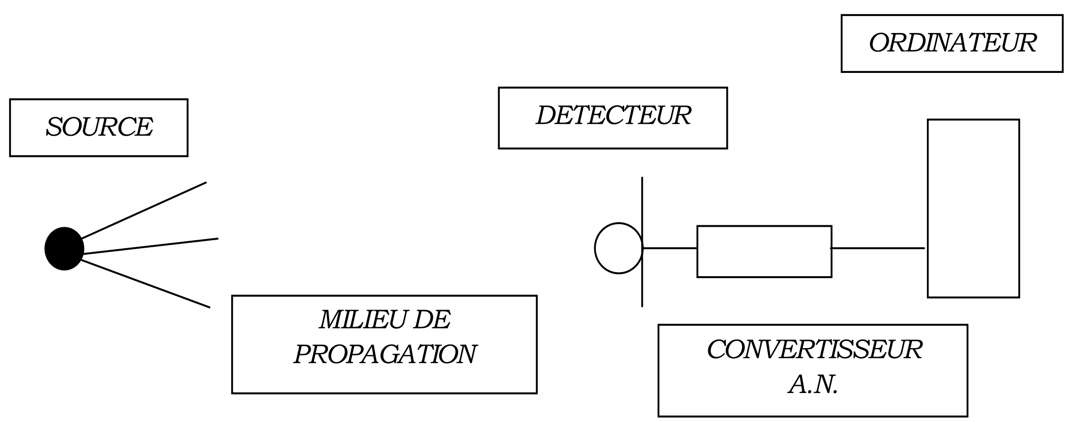

Fig. 1.1 –

source	milieu de propagation	détection	phénomène physique
voie H.P. choc	air, eau milieu matériel	oreille microphone	variation de pression
émetteur de particules	vide ou milieu matériel	compteur Geiger, scintillateur	radioactivité propagation et diffusion
vibration mécanique	milieu matériel	accéléromètre	accélération
chaleur	vide ou milieu matériel	thermomètre thermocouple	flux de chaleur

1.1.2 Signaux numériques et analogiques.

Le signal mesuré par le capteur est le plus souvent un signal *analogique* c'est à dire un signal à amplitude et temps continu. Pour pouvoir analyser le signal à l'aide de l'ordinateur, il va falloir le numériser ou encore échantillonner le signal. La numérisation d'un signal analogique se fait à l'aide d'un convertisseur analogique numérique. Le rôle du convertisseur est de transformer le signal analogique en une suite discrète de nombres qui pourront par la suite être traités par l'ordinateur. Remarquons à ce titre que la théorie du signal a grandement progressé avec l'avènement de l'informatique.

1.2 Objectifs de la théorie du signal

1.2.1 Généralités

L'objectif fondamental de la théorie du signal est de décrire de façon mathématique ce qu'est un signal ainsi que ses propriétés. A ce titre, il convient de distinguer deux branches du traitement du signal qui sont la théorie du signal et la théorie de l'information.

TRAITEMENT DU SIGNAL

Théorie du signal	Théorie de l'information
échantillonnage	codage
modulation	cryptographie
analyse spectrale	
estimation	

La théorie du signal a pour but de décrire avec le plus d'informations possibles la nature du signal capté. Elle utilise un certain nombre de méthodes mathématiques telles que la transformation de Fourier, l'analyse fonctionnelle, l'analyse statistique ou les méthodes d'estimation. La première démarche commence par la reconnaissance du signal. La théorie de l'information concerne la façon de coder un signal ainsi que de le crypter. Nous nous interésserons dans ce cours uniquement à la théorie du signal et nous allons commencer par classer les signaux en deux groupes distincts.

1.2.2 Classi cation phénoménologique des signaux

Les signaux que l'on a l'habitude de rencontrer en physique peuvent être classés en deux groupes :

- les signaux *déterministes* dont l'évolution est prédite par un modèle mathématique

- les signaux *aléatoires* dont l'évolution est imprévisible et qui ne peuvent être décrits que par des grandeurs statistiques.

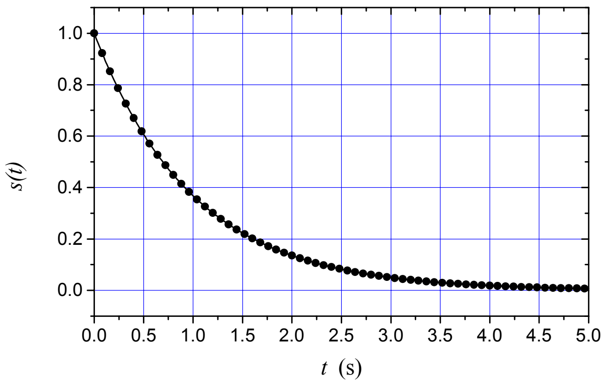

FIG. 1.2 – Représentation d'un signal déterministe

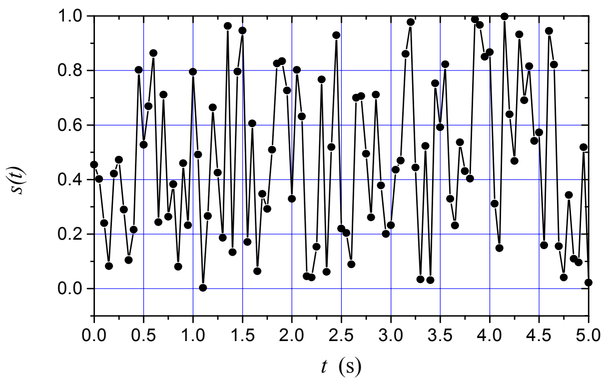

FIG. 1.3 – Représentation d'un signal aléatoire

En outre, les signaux de ces deux groupes peuvent être classés selon leurs propriétés.

SIGNAUX DETERMINISTES	SIGNAUX ALEATOIRES
sinusoïdaux périodiques, non sinusoïdaux	ergodiques stationnaires, non ergodiques
transitoires apériodiques, quasi périodiques	non stationnaires

Un signal $s(t)$ est dit périodique si :

$$\exists T, \forall t \quad s(t) = s(t+T) \tag{1.1}$$

Remarquons que la somme de deux signaux périodiques de période T_1 et T_2 n'est pas en général périodique sauf si l'on peut trouver des entiers k_1 et k_2 qui satisfont

$$k_1 T_1 = k_2 T_2 \tag{1.2}$$

Un signal est dit *stationnaire* si ses caractéristiques statistiques sont invariantes dans le temps.

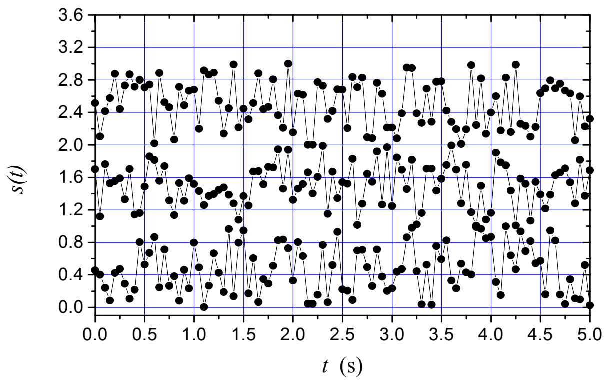

FIG. 1.4 – Représentation d'un signal stationnaire et ergodique. Le signal mesuré à trois instants différents est décalé selon l'axe des ordonnées pour permettre la représentation.

Un signal est dit *ergodique* si ses caractéristiques statistiques sont équivalentes à chaque réalisation du signal.Un signal peut être stationnaire sans être ergodique. C'est le cas par exemple d'un signal constant dans le temps qui prend une valeur différente à chaque réalisation.

Il convient de noter que les signaux déterministes ne contiennent que très peu d'informations puisqu'un nombre restreint de paramètres suffit pour les caractériser. A l'inverse les signaux aléatoires fourmillent d'informations mais sont de ce fait difficiles à traiter.

1.2.3 Classi cation mathématique des signaux

Classi cation morphologique.

On distingue les signaux analogiques (à amplitude et temps continus), les signaux numériques (à amplitude et temps discrets) et les signaux quantifiés (à amplitude discrète et temps continu).

Classi cation dimensionnelle.

Le signal le plus classique est un signal à une dimension comme par exemple la parole, un scan issu d'un diffractomètre ou d'un spectromètre Raman. Toutefois on peut rencontrer des signaux de dimension 2 comme les photographies ou les figures de diffraction voire même de dimension 3 comme les films parlants. Il est bon de noter que plus la dimension du signal est élevée plus il devient difficile de le stocker sous forme discrète. A ce titre remarquons qu'un écran de micro-ordinateur 640 x 400 contient 250000 informations et correspond à une durée d'enregistrement de 50s avec un échantillonnage de 0.2ms.

Classi cation fréquentielle.

La classification fréquentielle d'un signal est extrêmement importante en traitement du signal. Elle est obtenue en faisant la transformée de Fourier du signal. Ainsi la voix qui est un signal temporel peut être décomposée par transformée de Fourier en un spectre de fréquences dont les valeurs cardinales façonneront le timbre et dont l'agencement définira le type de son. On voit ainsi au travers de la parole l'importance de la classification fréquentielle. Un autre exemple intéressant se rencontre dans les signaux entachés de bruit. Le bruit est un signal qui fluctue beaucoup et qui se rencontrera en majeure partie dans les hautes fréquences contenues dans le signal.

On dira en particulier qu'un signal est à bande étroite si sa transformée de Fourier est non nulle sur un intervalle de fréquence limité Δf.

Classi cation énergétique.

La classification énergétique d'un signal permet de différencier les signaux à énergie finie des signaux à puissance moyenne finie.

On appelle énergie d'un signal $s(t)$ sur l'intervalle T la quantité :

$$E = \int_T s(t)s^*(t)dt = \langle s(t) \mid s(t) \rangle \tag{1.3}$$

Cette définition dérive naturellement de la définition de l'énergie en physique. Ainsi une résistance parcourue par un courant lorsqu'elle est soumise à une tension $u(t)$ dissipe l'énergie

$$E = \frac{1}{R}\int_T u(t)u^*(t)dt = \langle u(t) \mid u(t) \rangle \tag{1.4}$$

On appelle puissance instantannée

$$P_i(t) = s(t)s^*(t)$$

On appelle puissance moyenne d'un signal sur l'intervalle T la quantité :

$$P(t,T) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} s(t)s^*(t)dt = \frac{1}{T}\langle s(t) \mid s(t) \rangle \tag{1.5}$$

Lorsque l'intervalle T s'étend de - ∞ à + ∞ , les signaux à énergie finie sont les signaux qui vérifient :

$$E < \infty$$

et les signaux à puissance moyenne finie sont définis par :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s^*(t)dt < \infty$$

Remarques :
- Lorsqu'un signal est à énergie finie il est nécessairement à puissance moyenne finie.
- Les signaux à énergie finie sont appelés signaux de carré sommable.
- Pour les signaux périodiques de période T , l'intervalle de temps utilisé pour faire le clacul correspond à la période du signal :

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s^*(t)dt \tag{1.6}$$

Parité d un signal.

Un signal quelconque peut toujours se décomposer en la somme d'un signal pair et d'un signal impair :

$$s(t) = s_p(t) + s_i(t) \tag{1.7}$$

avec

$$s_p(t) = s_p(-t) \quad \text{et} \quad s_i(t) = -s_i(-t) \tag{1.8}$$

ce qui conduit à :

$$s_p(t) = \frac{s(t) + s(-t)}{2} \tag{1.9}$$

$$s_i(t) = \frac{s(t) - s(-t)}{2} \tag{1.10}$$

1.3 Présentation de quelques signaux déterministes

1.3.1 Fonction signe

$$sgn(t) = \begin{array}{c} -1 \ \text{ si } \ t < 0 \\ 0 \ \text{ si } \ t = 0 \\ 1 \ \text{ si } \ t > 0 \end{array} \tag{1.11}$$

1.3.2 Fonction de Heaviside.

La fonction de Heaviside est encore connue sous le terme d'échelon unité. Nous la noterons $\theta(t)$. Cette fonction est définie par morceaux et s'écrit

$$\theta(t) = \begin{matrix} 0 & t<0 \\ 0.5 & t=0 \\ 1 & t>0 \end{matrix} \qquad \theta(t) = \frac{1+sgn(t)}{2} \tag{1.12}$$

1.3.3 Fonction porte.

La fonction porte est une fonction définie par morceaux de la façon suivante

$$\sqcap_T(t) = \begin{matrix} 1 & \text{si} & t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \\ 0 & \text{si} & t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \end{matrix} \tag{1.13}$$

Nous adoptons la convention suivante : une porte de largeur T présente une pleine largeur à mi-hauteur égale à T.

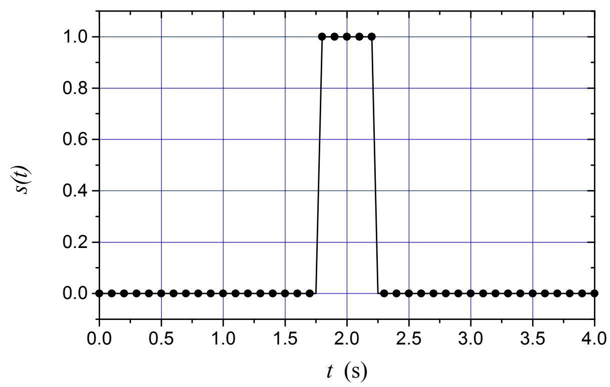

FIG. 1.5 – Fonction porte de largeur T

1.3.4 Fonction triangle.

Ce signal est défini par

$$tri_T(t) = \begin{matrix} 1-\frac{|t|}{T} & \text{si} & |t| \langle T \\ 0 & \text{si} & |t| \geq T \end{matrix} \tag{1.14}$$

La figure ci dessous représente la fonction triangle décalée de t=2.5s.

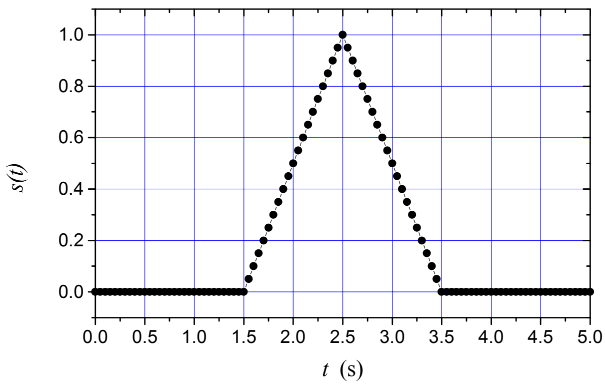

FIG. 1.6 – Fonction triangle de largeur T

1.3.5 Fonction sinus cardinal.

Le sinus cardinal d'une variable t est

$$sinc(x) = \frac{\sin(x)}{x} \tag{1.15}$$

Ce signal à priori banal est très utile en traitement de signal car il est relié directement à la transformée de Fourier d'une porte comme nous le verrons plus loin. En traitement numérique du signal une suite finie de nombres peut être considérée comme une suite infinie tronquée par une porte. L'importance du signal sinus cardinal est alors capitale dans le spectre de Fourier des signaux numériques.

La figure représente le signal sinc(t).

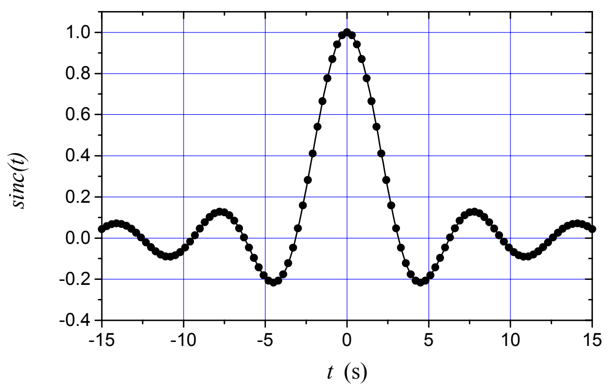

FIG. 1.7 – Fonction sinus cardinal

On remarque que le signal présente des oscillations et passe par zéro à chaque fois que

$$t = n\pi \tag{1.16}$$

Les oscillations s'amortissent progressivement avec l'éloignement de la position centrale $t = 0$ ou le signal vaut 1.

1.3.6 Fonction gaussienne.

La fonction gaussienne est définie par

$$G(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{1.17}$$

Les caractéristiques principales de ce signal sont :

sa demi-largeur à mi hauteur (dl.m.h.) qui est reliée au parmètre σ par

$$\sigma = 0.85 d.l.m.h. \Longleftrightarrow d.l.m.h. = 1.18\sigma \tag{1.18}$$

son amplitude A.

Le signal gaussien est très utile en particulier pour les signaux aléatoires ou il est à la base de la distribution de probabilité. Nous notons qu'il s'amortit très vite puisqu'à partir de x=3σ le signal est partiquement nul.

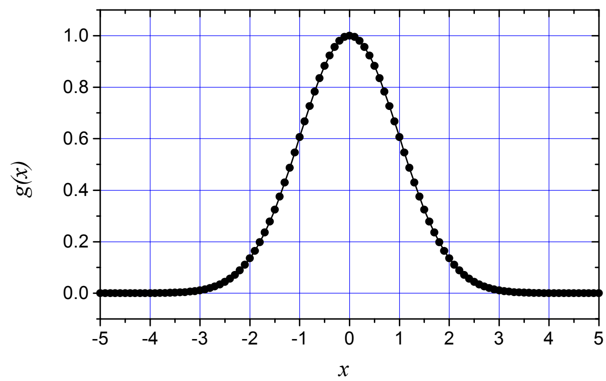

FIG. 1.8 – Signal gaussien

On distingue également le signal gaussien normalisé par son intensité intégrée :

$$G(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

1.3.7 Fonction Lorentzienne

La fonction lorentzienne est définie de la façon suivante

$$L(x) = \frac{A\sigma^2}{x^2 + \sigma^2} \tag{1.19}$$

La demi-largeur à mi-hauteur $d.l.m.h$ est dans ce cas rigoureusement définie par σ. Son graphe est reporté Figure **??** avec $A = 1$ et $\sigma = 1$. Nous notons clairement sur cette figure que si le signal lorentzien s'apparente fortement au signal gaussien il en diffère par une décroissance plus lente ; en particulier à la position $x = 3\sigma$ le signal lorentzien n'est pas nul.

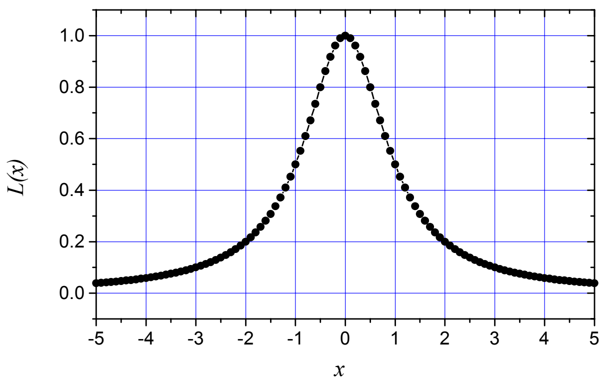

FIG. 1.9 – Signal lorentzien

1.3.8 Fonction erreur

La fonction erreur est une fonction définie par

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \tag{1.20}$$

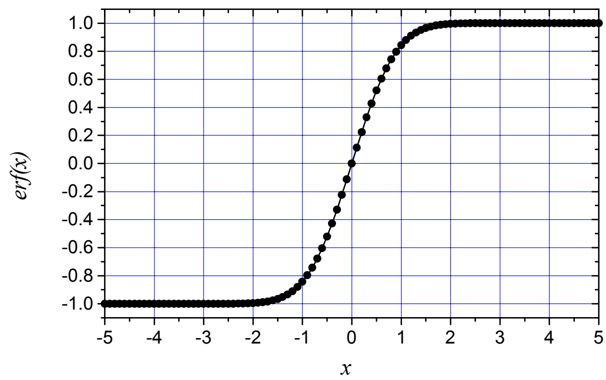

FIG. 1.10 – Représentation de la fonction erreur

La fonction erreur complémentaire est habituellement notée $erfc(x)$ et s'écrit

$$\operatorname{erf} c(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) \tag{1.21}$$

Exercices
Exercice 1

Déterminer si une fonction sinusoïdale est un signal à énergie finie.
Exercice 2
Décomposer le signal
$x(t) = tri_2(t-1)H(t-1)$
en sa partie paire et impaire.

Exercice 3
Déterminer l'énergie et la puissance des signaux suivants :
a) $x(t) = e^{-2|t|}$
b) $x(t) = (3-t)\Pi\left((t-2)/2\right)$
c) $x(t) = 4cos(30t - 0.25)$
d) $x(t) = 4cos(30t - 0.25)H(t)$

Exercice 4
Une capacité est déchargée à $t = 0$ à travers une résistance R. Le signal aux bornes de C est donné par

$$s(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}H(t)$$

Déterminer l'énergie et la puissance de ce signal.