Chapitre 5

CONVOLUTION ET CORRELATION

5.1 Produit de convolution.

5.1.1 Définition pour des signaux analogiques

Soient deux signaux $h(t)$ et $g(t)$ appartenant à $\mathcal{L}^2$, on appelle produit de convolution entre $h(t)$ et $g(t)$, le signal $s(t)$ défini par :

$$s(t) = h(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{5.1}$$

La sommation sous l'intégrale s'effectue sur la variable τ ce qui montre que le signal ainsi obtenu est une fonction de t et non pas un nombre comme c'est le cas lorsque l'on effectue un produit scalaire.

Pour calculer un produit de convolution, il faut conserver le premier signal, trouver le symétrique du second par rapport à l'axe des ordonnées puis décaler ce signal du temps t, multiplier les deux signaux obtenus et finalement intégrer le résultat.

5.1.2 Définition pour des signaux numériques

Signaux de même dimension

Si les signaux h et g sont numériques et définis par les suites $\{h(n)\}$ et $\{g(n)\}$ de dimension N, le produit de convolution s'écrit alors :

$$s(n) = h(n) * g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)g(n-k) \tag{5.2}$$

Les signaux h et g sont tous deux définis sur l'intervalle $[0, N-1]$. Toutefois dans l'opération de retournement du signal g l'indice $n-k$ sera susceptible de courir de

$[-N+1, N-1]$. Comme g n'est défini que sur l'intervalle $[0, N-1]$ il importe de se fixer les règles de calcul et ces règles peuvent être différentes selon l'objectif que l'on se fixe.On voit bien que si l'on part du signal g retourné, ce signal restera en coïncidence avec le signal h non retourné tant que n appartiendra à l'intervalle $[0, 2N-1]$. La dimension du signal convolué est donc $2N-1$ si les signaux de départ sont tous deux de dimension N. Une façon claire d'établir cette propriété est de considérer que le signal g n'existe que si la quantité $n-k$ appartient à l'intervalle $[0, N-1]$ avec k contenu dans le même intervalle.

Supposons que k soit égal soit à l'indice $k=0$ soit à l'indice $k=N-1$. Le signal $g(n-k)$ existera si

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0 \leqslant n-N+1 \leqslant N-1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow 0 \leqslant n \leqslant 2N-2$$

ce qui conduit bien à un signal convolué de dimension $2N-1$

Pour effectuer le calcul numérique on adopte les règles suivantes

Règle n°1

On réalise l'opération en considérant que dans la somme contenue dans l'équation 5.2 les échantillons ayant un indice en dehors de l'intervalle $[0, N-1]$ seront nuls. Le problème ne se pose évidemment pas pour h mais clairement pour g.

On a alors

$$s(n) = h(n) * g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) g(n-k) \quad \text{avec} \quad n \in [0, 2N-2] \tag{5.3}$$

Règle n°2

On réalise l'opération en considérant que les échantillons en dehors de l'intervalle $[0, N-1]$ ont même valeur que ceux contenus dans l'intervalle ce qui correspond à périodiser le signal retourné.

Règle n°3

On fait le calcul sur un intervalle moitié de la dimension du signal ce qui revient indirectement à utiliser la règle 2.

Il est clair que les règles proposées pour ce calcul ne conduisent pas toutes au même résultat. Ceci sera discuté ultérieurement.

L'exemple qui suit permet de comprendre comment s'effectue le produit de convolution dans le cas de signaux numériques. On considèrera les signaux suivants :

$$\begin{array}{cccc} n & 0 & 1 & 2 \\ h(n) & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad / \ \dim h = 3$$

et

$$\begin{array}{cccc} n & 0 & 1 & 2 \\ g(n) & 1 & 1 & 2 \end{array} \quad / \ \dim g = 3$$

Le graphe de ces signaux a l'allure suivante :

Pour réaliser l'opération de convolution, il faut maintenant retourner le signal g en commençant par $n=0$. Il est trivial de constater que $g(-k)$ qui n'est rien d'autre

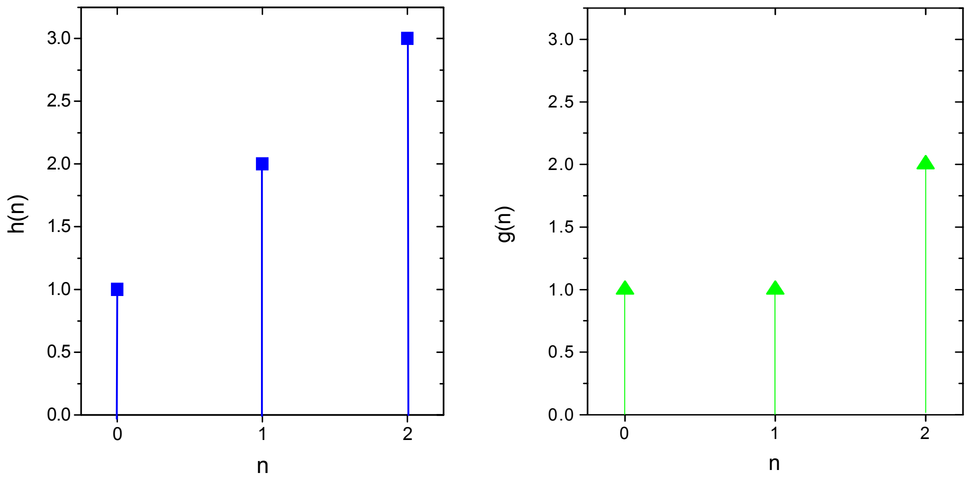

FIG. 5.1 –

que $g(n-k)$ pour $n=0$.Au cours de cette opération on obtient le symétrique de g par rapport à l'axe des ordonnées. En effet pour le vérifier il suffit de poser $K=-k$ et l'on voit immédiatement que

$-k$	0	-1	-2
$g(-k)$	1	1	2

Si l'on se fixe la règle n°1 de calcul on voit que l'on ne conservera dans le signal retourné que $g(0)$ pour effectuer la sommation contenue dans le produit de convolution. Le premier échantillon du signal convolué sera donc

$$s(0)=\sum_{k=0}^{2}h(k)g(-k)=h(0)g(0)=1 \tag{5.4}$$

Pour $n=1$ les signaux $h(k)$ et $g(1-k)$ ont une intersection commune en $k=0$ et $k=1$ et le deuxième échantillon du signal convolué devient

$$s(1)=\sum_{k=0}^{2}h(k)g(1-k)=h(0)g(1)+h(1)g(0)=1+2=3 \tag{5.5}$$

En faisant progressivement glisser le signal $g(n-k)$ de $n=0$ à $n=2N-2$ sur l'axe des abcisses on obtient le produit de convolution des deux signaux numériques. Les échantillons contenus dans le signal convolué sont :

n	0	1	2	3	4
$s(n)$	1	3	7		

Signaux de dimensions différentes

Nous abordons maintenant le cas de deux signaux h et g de dimension différente. Nous posons $dimh = N$ et $dimg = M$. Par définition nous avons toujours

$$s(n) = h(n) * g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)g(n-k) \tag{5.6}$$

Dans ce cas $n-k$ doit appartenir à l'intervalle $[0, M-1]$ et k à l'intervalle $[0, N-1]$. L'indice n doit donc vérifier

$$\begin{cases} 0 \leqslant n \leqslant M-1 \\ 0 \leqslant n-N+1 \leqslant M-1 \end{cases} \Longleftrightarrow 0 \leqslant n \leqslant N+M-2$$

ce qui montre que la dimension du signal convolué est $N+M-1$.
Nous utilisons dans ce cas la règle de calcul n°1.

5.1.3 Propriétés du produit de convolution

Commutativité

Le produit de convolution est commutatif. En effet :

$$h(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{5.7}$$

en posant $t' = t - \tau$ il vient

$$h(t) * g(t) = -\int_{\infty}^{-\infty} h(t-t')g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)h(t-t')dt = g(t) * h(t) \tag{5.8}$$

De la commutativité, on peut déduire que :

$$h(t) * g(-t) = g(-t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(-\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{5.9}$$

en posant $t' = t - \tau$ on voit que :

$$dt' = -d\tau \tag{5.10}$$

$$h(t) * g(-t) = -\int g(t'-t)h(t')dt' = \int h(t)g(t-t)dt \tag{5.11}$$

soit

$$h(t) * g(-t) = \int h(\tau)g(\tau - t)d\tau \tag{5.12}$$

Linéaire et distributivité

Cette propriété découle de la linéarité de l'intégrale :

$$h(t) * [ag(t) + bg(t)] = ah(t) * g(t) + bh(t) * g(t) \tag{5.13}$$

Elément neutre de la convolution

L'élément neutre du produit de convolution est la distribution de Dirac.

$$h(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = h(t) \tag{5.14}$$

La convolution par un pic de Dirac renvoie donc le signal dans son entier. Il en résulte que convoluer un signal par une distribution de Dirac décalée permet de translater le signal. En effet :

$$h(t) * \delta(t-a) = h(t-a) \tag{5.15}$$

qui est une fonction de t

On peut ainsi noter la différence entre la convolution d'un signal par une distribution de Dirac qui conduit à un signal et l'appliaction de la distribution qui conduit à un nombre.

Convolution par un peigne de Dirac.

$$s(t) * \bigsqcup(t) = s(t) * \sum_n \delta(t-n) = \sum_n \int s(\tau)\delta(t-n-\tau)d\tau \tag{5.16}$$

$$= \sum_n s(t-n) \tag{5.17}$$

Il en résulte que la convolution d'un signal par un peigne de Dirac permet de périodiser le signal $s(t)$. Cette application est extrêmement tuile pour décrire mathématiquement le phénomène de périodicité.

5.1.4 T.F. du produit de convolution : théorème de Plancherel

Soient deux signaux $s(t)$ et $r(t)$ dont les transformées de Fourier sont respectivement $S(f)$ et $R(f)$. Nous allons calculer la transformée du produit de convolution de s par r :

$$T.F.(s(t) * r(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t) * r(t)]\, e^{-2\pi jft} dt \tag{5.18}$$

$$\begin{array}{c} = \int\int s(\tau)r(t-\tau)e^{-2\pi jft}dtd\tau \\ = \int s(\tau)\int r(t-\tau)e^{-2\pi jft}dtd\tau \\ = \int s(\tau)\int r(t-\tau)e^{-2\pi jf(t-\tau)}dte^{-2\pi jf\tau}d\tau \\ = \int s(\tau)e^{-2\pi jf\tau}d\tau \int r(u)e^{-2\pi jfu}du \\ = S(f).R(f) \end{array}$$

d'où

$$T.F.\,[s(t) * r(t)] = T.F.\,[s(t)]\, T.F.\,[r(t)] \tag{5.19}$$

Théorème de Plancherel

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux signaux s(t) et r(t) est égale au produit des transformées de Fourier de ces deux signaux.

Remarques :

Il est possible de calculer le produit de convolution de deux signaux en calculant la transformation de Fourier inverse :

$$T.F.^{-1}\,[T.F.(s(t))T.F.(r(t))] = s(t) * r(t) \tag{5.20}$$

Cette opération peut paraître compliquée mais se justifie tout particulièrement lorsque les signaux sont numériques. On dispose alors de l'algorithme de $F.F.T.$ (Fast Fourier Transform) qui permet de calculer la transformation de Fourier directe ou inverse en très peu de temps. Il faut toutefois faire très attention dans ce cas à la dimension des signaux que l'on utilise pour deux raisons :

- i) la $F.F.T.$ utilise des signaux de dimension 2^n

- ii) la transformée de Fourier d'un signal de dimension N est un signal de dimension N alors que la covulation de deux signaux de dimension N et M est un signal de dimension $N + M - 1$.

5.1.5 Transformée de Fourier du produit

Nous calculons maintennat la transformée de Fourier du produit de deux signaux $s(t)$ et $r(t)$

$$T.F.\left[r(t).s(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)s(t)e^{-2\pi jft}dt \tag{5.21}$$

$$\begin{array}{c} = \int\int R(f)e^{2\pi jft}df s(t)e^{-2\pi jft}dt \\ = \int_{-\infty}^{\infty} R(f)\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-2\pi j(f-f')t}dtdf \\ = \int_{-\infty}^{\infty} R(f)S(f-f')df \\ = R(f) * S(f) \end{array}$$

d'où

$$T.F.\left[r(t)s(t)\right] = T.F.\left[r(t)\right] * T.F.\left[s(t)\right] \tag{5.22}$$

Nous concluons donc que

La transformée de Fourier d un produit de deux signaux est égale au produit de convolution des transformées de Fourier de ces deux signaux

5.1.6 Utilité de la convolution

Nous avons vu que le produit de convolution de deux signaux est également un signal. Bien évidemment le signal résultant est intimement fonction des deux signaux que l'on convolue. Si l'on appelle $s(t)$ le signal mesuré et $f(t)$ le signal avec lequel $s(t)$ sera convolué on peut jouer sur la nature du signal $f(t)$ pour modifier à sa guise le signal $s(t)$. Il suffit pour cela de bien imaginer la forme du signal $f(t)$. Nous avons déjà vu quelques exemples pour des signaux analogiques mais le champ d'application est très vaste surtout pour les signaux numériques :

$filtre$	signal analogique	signal numérique
$\delta(t)$	*identité*	_
$\delta(t-a)$	*translation*	_
peigne	*périodisation*	_
$[1,-1]$	_	*dérivée première*
$1/3\,[1,1,1]$	_	*lissage*
$[1,-2,1]$	_	*dérivée* sec*onde*

Montrons en effet que le signal $[1,-1]$ transforme le signal $\{s(n)\}$ en sa dérivée par convolution :

$$r(n) = s(n) * f(n) = \sum_i s(i)f(n-i) \quad \text{avec } dimf = 2$$

Dans la sommation ci-dessus la quantité $n - i$ ne peut prendre que 2 valeurs :

$$n - i = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad i = \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix}$$

Il en résulte que l'échantillon n du produit de convolution s'écrit :

$$r(n) = s(n)f(0) + s(n-1)f(1) = s(n) - s(n-1) \tag{5.23}$$

$$r(n) = \frac{s(n) - s(n-1)}{n - (n-1)} \tag{5.24}$$

Au cours de la convolution on a donc remplacé le signal s par un signal qui est fabriqué à partir de la différence de deux échantillons consécutifs. Le pas de variation de n n'étant de 1, le signal obtenu est donc la dérivée du signal de départ.

La transformation du signal par son convolué est souvent nommé "filtrage". L'intérêt de la convolution est qu'il n'y a pas de limitation dans le choix des filtres et que la frontière est celle de notre imagination. Les applications sont extrèmement nombreuses en traitement de l'image ou de l'information. On peut citer les filtres gradients, les filtres rabotteurs, les filtres laplaciens etc ...

5.2 Fonction de corrélation

5.2.1 Dé nitions

Signaux analogiques

Soient deux signaux $s(t)$et $r(t)$ d'énergie finie ; on appelle fonction de corrélation entre ces deux signaux, la fonction de τ définie par :

$$C_{sr}(\tau) = s(t) \otimes r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)r^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t+\tau)r^*(t)dt \tag{5.25}$$

Cette fonction s'appelle aussi fonction d'intercorrélation entre les signaux $s(t)$ et $r(t)$. Physiquement la fonction de corrélation est obtenue en décalant l'un des signaux, en multipliant le signal décalé par l'autre signal et puis en intégrant le produit obtenu.

Si le signal $s(t) = r(t)$ quel que soit t alors on obtient la fonction d'autocorrélation du signal soit :

$$C_{ss}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t-\tau)dt = s(t) \otimes s(t) \tag{5.26}$$

Dans le cas particulier ou τ est nul, la fonction d'autocorrélation du signal donne :

$$C_{ss}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t)dt \tag{5.27}$$

qui n'est rien d'autre que l'énergie contenue dans le signal. On peut démontrer que la fonction d'autocorréaltion vérifie :

$$Css(\tau) < Css(0)$$

Si les signaux ne sont pas à énergie finie mais à puissance moyenne finie, on définit la fonction de corrélation sur un intervalle T par :

$$C_{sr}(\tau) = lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} s(t)r^*(t-\tau)dt \tag{5.28}$$

De même pour des signaux périodiques on définit la fonction de corrélation par :

$$C_{sr}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} s(t)r^*(t-\tau)dt \tag{5.29}$$

Signaux numériques

Pour des signaux numériques (que l'on supposera réels) définis par $\{s(n)\}$ et $\{r(n)\}$ et tels que $dim(s) = N$ et $dim(r) = M$, on définit la fonction de corrélation par :

$$C_{sr}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} s(m)r(m-n) \quad \text{avec } n \in [0, M+N-1] \tag{5.30}$$

$$C_{sr}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} s(m+n)r(m) \tag{5.31}$$

Le problème du calcul de la fonction d'intercorrélation des deux signaux s et r est équivalent à celui rencontré dans l'opération de convolution.

5.2.2 Convolution et corrélation

Nous avons vu que les deux opérations de convolution et de corrélation s'apparentent fortement. Nous établissons maintennat le lien formel qui existent entre ces deux opérations.

$$C_{sr}(\tau) = s(t) \otimes r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)r^*(t-\tau)dt \tag{5.32}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)r^*(-(\tau-t))dt = s(\tau) * r^*(-\tau)$$

La corrélation apparaît donc comme la convolution du premier signal avec le conjugué du second signal retourné à un instant τ donné.

Si les deux signaux sont identiques, on voit que la fonction d'autocorrélation est donnée par :

$$C_{ss}(\tau) = s(\tau) * s^*(-\tau) \tag{5.33}$$

5.2.3 Non-commutativité de la corrélation

Nous allons démontrer que la fonction de corrélation est une fonction non-commutative qui vérifie :

$$C_{sr}(\tau) = C_{rs}^*(-\tau) \tag{5.34}$$

en effet :

$$C_{rs}^*(-\tau) = [r(-\tau) * s^*(-\tau)]^* = r^*(-\tau) * s(\tau) = s(\tau) * r^*(-\tau) = C_{sr}(\tau) \tag{5.35}$$

5.2.4 Théorème de Wiener - Khintchine

Ce théorème est particulièrement important pour tous les processus de diffusion ou de diffraction. Il définit la valeur de la transformée de Fourier de la fonction d'intercorrélation ou d'autocorrélation de deux signaux :

$$T.F.[C_{sr}(\tau)] = T.F.[s(\tau) * r^*(-\tau)] \tag{5.36}$$

$$= T.F.[s(\tau)].T.F.[r^*(-\tau)]$$

Il faut donc évaluer le dernier terme de cette expression :

$$\begin{aligned} T.F.\left[r^*(-\tau)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} r^*(-\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} r^*(t) e^{2\pi j f t} dt \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} r(t) e^{-2\pi j f t} dt\right]^* = R^*(f) \end{aligned}$$

soit

$$T.F.\left[C_{sr}(\tau)\right] = S(f).R^*(f) \tag{5.37}$$

Ceci constitue le théorème de Wiener - Khintchine et montre que dans le cas ou les deux signaux sont identiques alors :

$$T.F.\left[C_{rr}(\tau)\right] = R(f).R^*(f) = |R(f)|^2 = S_{rr}(f) \tag{5.38}$$

Nous pouvons constater que la transformée de Fourier du la fonction d'autocorrélation du signal r fait apparaître le module au carré du spectre de r. Pour cette raison on dit qu'il s'agit de la **densité spectrale d énergie** $S_{rr}(f)$ du signal r.

Théorème de Wiener-Khintchine

"La transformée de Fourier de la fonction d autocorrélation d un signal est égale à sa densité spectrale en énergie.

Ce résultat est particulièrement important puisqu'il montre que l'intensité mesurée dans tous les phénomènes de diffraction est égale à la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. Le théorème montre aussi que

$$C_{rr}(\tau) = T.F.^{-1}\left[R(f).R^*(f)\right] \Longrightarrow C_{rr}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |R(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |r(t)|^2 dt \tag{5.39}$$

ce qui traduit de façon très claire l'identité de Parseval. L'énergie contenue dans un signal est identique que l'on se place dans le domaine fréquentiel ou temporel.

Dans le cas des signaux de puissance moyenne finie, on parle de densité spectrale de puissance.

5.2.5 Degré de Cohérence

On peut définir le degré d'auto-cohérence d'un signal $s(t)$ à l'instant τ par :

$$\gamma = \frac{C_{ss}(\tau)}{C_{ss}(0)} \tag{5.40}$$

et par :

$$\gamma = \frac{C_{sr}(\tau)}{\sqrt{C_{ss}(0)C_{rr}(0)}} \tag{5.41}$$

Le degré d'auto-cohérence permet de savoir si le signal s reste corrélé avec lui-même après un décalage temporel de durée τ.