# Chapitre 7

# ECHANTILLONNAGE

## 7.1 Dé nition de l échantillonnage

L'échantillonage est une opération qui consiste à transformer un signal analogique en un signal numérique. Cette opération est fondamentale en traitement de signal car à l'issue de l'opération le signal obtenu étant numérique il est possible de le traiter au moyen d'un ordinateur. Il s'agit donc au cours de cette opération de passer d'un signal continu $s(t)$ d'une variable $t$ quelconque à une suite de nombres ou d'échantillons $\{s(n)\}$ avec $n \in N$. Cette opération est réalisée au moyen d'un convertisseur anlogique numérique (C.A.N.). Le CA.N. prend au cours de cette opération les valeurs de $s(t)$ à intervalles réguliers $T_e$. L'intervalle choisi est par définition la période d'échantillonage qui est notée $T_e$. L'inverse de cette quantité est appelé fréquence d'échantillonage $f_e$. Si un signal $s(t)$ est échantilloné à la fréquence $f_e$ sur un intrevalle $T$ alors le signal échantillonné sera de dimension finie et contiendra

$$N = T/T_e \quad \text{échantillons}$$

L'intervalle entre deux échantillons est donc

$$T_e = \frac{T}{N} \tag{7.1}$$

et l'échantillons $p$ de la suite numérique sera déterminé par la valeur du signal $s(t)$ au temps $t_p = p\frac{T}{N}$ soit

$$s(p) = s(t_p) = s\left(p\frac{T}{N}\right) \text{ avec } p \in [1, N] \tag{7.2}$$

Il est clair que la période d'échantillonage va conditionner la dimension du signal échantillonné. Il s'agit donc de comprendre comment il faut choisir $T_e$ pour que le signal échantilloné conserve un rapport avec le signal analogique. On se doute bien que plus $T_e$ sera petit et meilleure sera la représentation mais que réciproquement plus la dimension du signal sera grande. Ceci n'est pas forcément un avantage en particulier si l'on a à effectuer des calculs sur le signal numérique.

## 7.2 Théorème de Shannon ou comment choisir $f_e$

Nous commençons par le cas d'un signal numérique de dimension infinie. Dans ce cas, la conversion analogique numérique peut être appréhendée mathématiquement en utilisant la distribution peigne de Dirac. Il suffit d'appliquer la distribution peigne pour passer de $s(t)$ à $\{s(n)\}$

$$s(t) \longmapsto s_e(t) = \underline{\uparrow\uparrow\uparrow}_{Te} s(t) = \sum s(nTe) \tag{7.3}$$

Si l'on se place dans l'espace de Fourier, il apparaît alors que

$$S_e(f) = S(f) * T.F. \left[\underline{\uparrow\uparrow\uparrow}_{Te}\right] = f_e S(f) * \underline{\uparrow\uparrow\uparrow}_{fe}(f) \tag{7.4}$$

Nous concluons donc que le fait d'échantillonner un signal dans l'espace temporel périodise le signal dans l'espace fréquentiel et que cette périodicité se fait à la fréquence $f = f_e$ d'échantillonnage.

Si nous supposons que le signal $s(t)$ possède un spectre borné tel que $S(f) = 0$ si $f \notin [-f_{\max}, f_{\max}]$ ,nous voyons que le spectre du signal échantillonné sera non recouvert (voir Fig. 7.1) si la condition

$$f_e > 2f_{max} \tag{7.5}$$

est vérifiée.

Cette condition définit le critère de choix de la fréquence d'échantillonnage et correspond au **théorème de Shannon.**

## 7.3 Retour au signal analogique

Le problème majeur de tout échantillonnage est de savoir si il est possible de revnir après échantillonage au signal de départ. Pour cela nous voyons que l'oprétaion d'échantillonage se traduit dans le spectre de Fourier par une périodisation du signal fréquentiel. Comme le spectre du signal est borné la technique de calcul est de se limiter aux fréquences contenues dans l'intervalle $[-f_e/2, f_e/2]$ pour décrire le spectre total. Cela revient en clair à fenêtrer le spectre du signal échantillonné et à ne considérer dans le spectre du signal échantillonné que le spectre de base $S_{e_0}(f)$. Cette opération peut être décrite à l'aide d'une porte de largeur $f_e$ et conduit à

$$S_{e_0}(f) = S_e(f). \sqcap_{f_e}(f) \tag{7.6}$$

Si l'on repasse dans le domaine temporel et si l'on utilise le théorème de Plancherel, il vient

$$s_{e_0}(t) = s_e(t) * f_e sinc\,(\pi f_e t) \tag{7.7}$$

soit

$$s_{e_0}(t) = \sum s(nTe) * f_e sinc\,(\pi f_e t) = \left\{\sum \left[s(t).\delta\left(t - nT_e\right)\right]\right\} * f_e sinc\,(\pi f_e t) \tag{7.8}$$

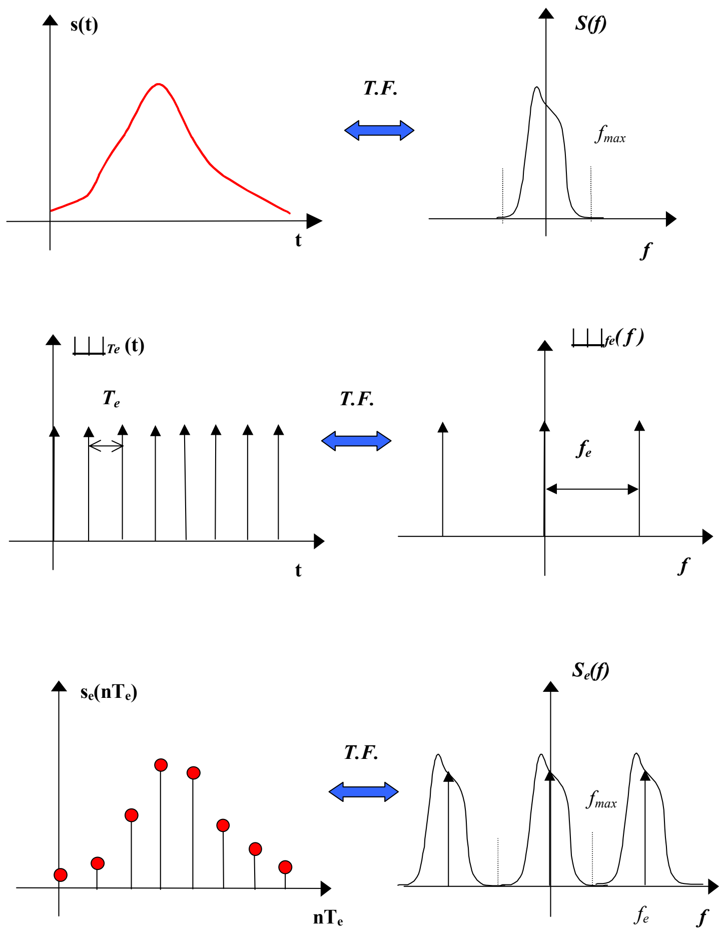


FIG. 7.1 – *De bas en haut : signal s(t) et sa T.F. ; Peigne de Dirac et sa T.F. ; signal numérique et sa T.F.*

L'équation 7.8 peut s'écrire également

$$s_{e_0}(t) = f_e \sum s(nT_e) sinc\left(\pi f_e \left(t - nT_e\right)\right) \tag{7.9}$$

On peut vérifier que ce signal diffère du signal $s(t)$ par une constante égale à $f_e$. Le signal analogique $s(t)$ peut donc être entièrement reconstruit comme suit

$$s(t) = \sum s(nT_e) sinc\left(\pi f_e \left(t - nT_e\right)\right) \tag{7.10}$$