

# TRAITEMENT DU SIGNAL

Nicolas ERRIEN  
2008/2009

*Signaux*

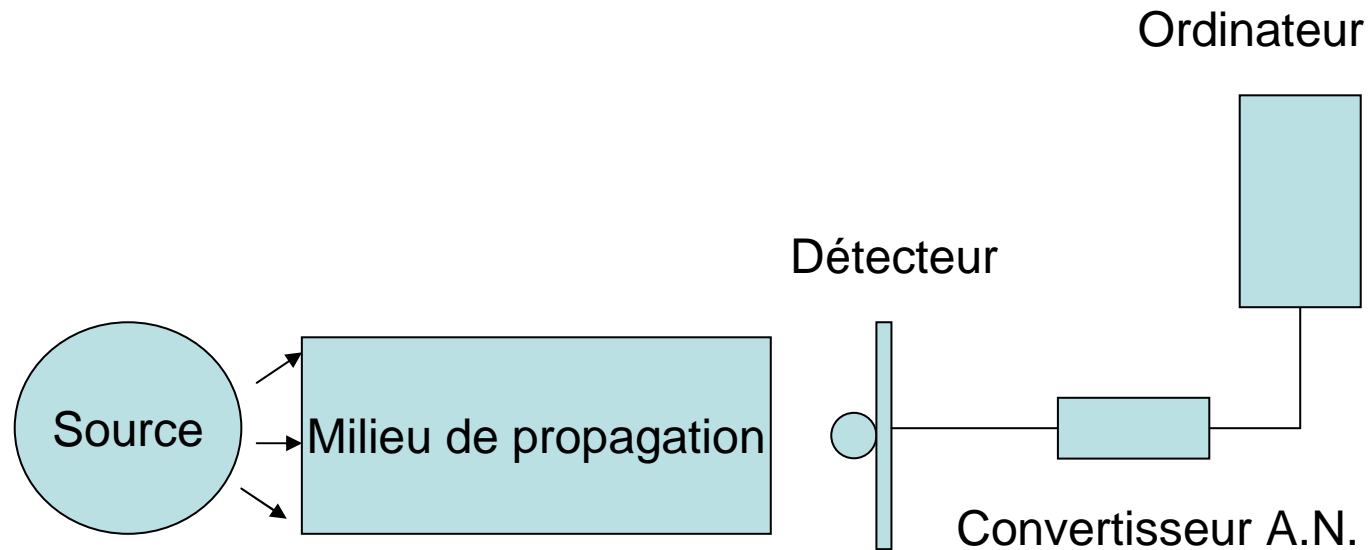
# Introduction

## I- Théorie du signal, généralités

Traitement du signal: science qui analyse et interprète les informations contenues dans un signal

En physique signal=mesure d'un phénomène physique

Ne pas confondre le phénomène et sa mesure !!!



Exemple: control non destructif U.S.:

- source : train d'onde
- milieu de propagation: pièce à contrôler
- Détecteur : capteur U.S.

# Introduction

## I- Théorie du signal, généralités

Théorie du signal, qu'est-ce qu'un signal ?

La notion de **signal** est intimement liée à celle d'**information**.

Signal = représentation physique d'une information à transmettre

Ou Signal = entité qui sert à véhiculer l'information.

Dans un contexte expérimental, on peut entendre par information:

- la mesure du temps de vol d'une onde,
- une pression acoustique
- présence de rupture dans une image ou un signal
- présence ou non d'une fréquence particulière dans un spectre

source	milieu de propagation	détection	phénomène physique
voie H.P. choc	air, eau milieu matériel	oreille microphone	variation de pression
émetteur de particules	vide ou milieu matériel	compteur Geiger, scintilla- teur	radioactivité propagation et diffusion
vibration mécanique	milieu matériel	accéléromètre	accélération
chaleur	vide ou milieu matériel	thermomètre thermo- couple	flux de chaleur

## Introduction

### I- Théorie du signal, généralités

#### Objectifs du traitement du signal

#### TRAITEMENT DU SIGNAL

Théorie du signal	Théorie de l'information
échantillonnage	codage
modulation	cryptographie
analyse spectrale	
estimation	

Théorie du signal : Décrire de façon mathématique ce qu'est un signal ainsi que ses propriétés par :

- Transformation de Fourier
  - Analyse fonctionnelle
  - Analyse statistique
  - Méthode d'estimation

Théorie de l'information : concerne la façon de coder un signal ainsi que de le crypter

# Introduction

## I- Théorie du signal, généralités

Théorie du signal, qu'est-ce qu'un signal ?

Exemples. La Figure 1 montre différents signaux temporels. La dénomination de ces différents signaux est précisé plus tard.

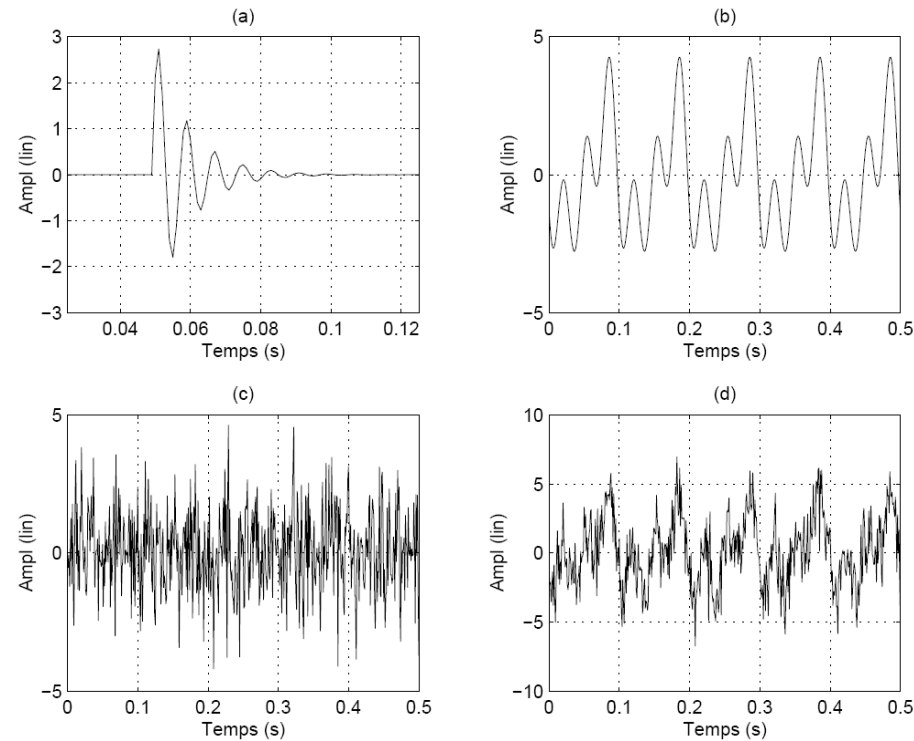


Figure 1 Différents signaux temporels. (a) : signal pulsionnel (ou à support temporel fini), (b) : signal périodique, (c) : signal aléatoire, (d) : signal composite composé de la somme des signaux (a)+(b)+(c).

*Modélisation.* Le signal peut se représenter sous forme temporelle (notée  $x(t)$ , quand la variable d'évolution  $t$  varie continûment) ou sous forme fréquentielle (notée  $X(f)$ , quand la variable d'évolution  $f$  varie continûment), le passage de l'une à l'autre de ces descriptions s'effectuant au moyen de la **transformée de Fourier**.

S'il est possible de modéliser certains signaux  $x(t)$ , sous la forme de fonctions de base (sinus, exponentielle, polynômes, ...) et d'opérations de base (somme, produit, convolution, ...), la plupart des signaux fournis par l'expérience ne sont disponibles que sous une forme  $x(t)$ , sans expression analytique associée.

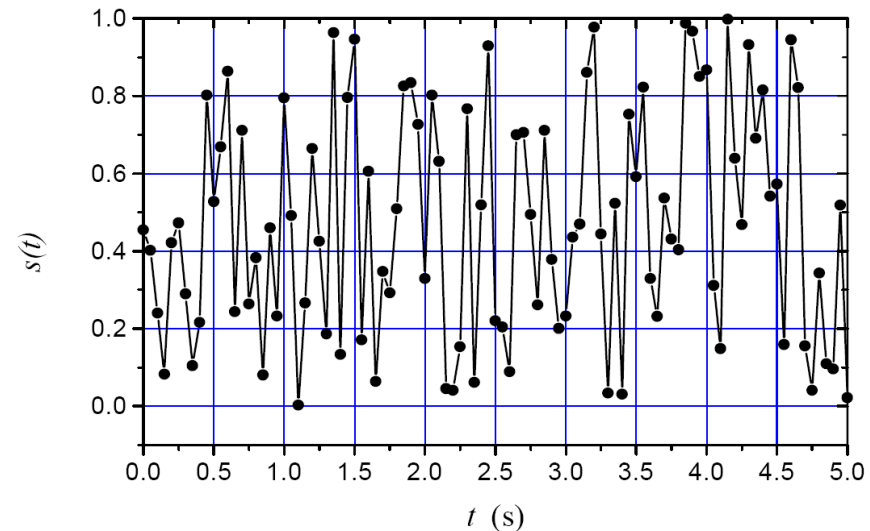
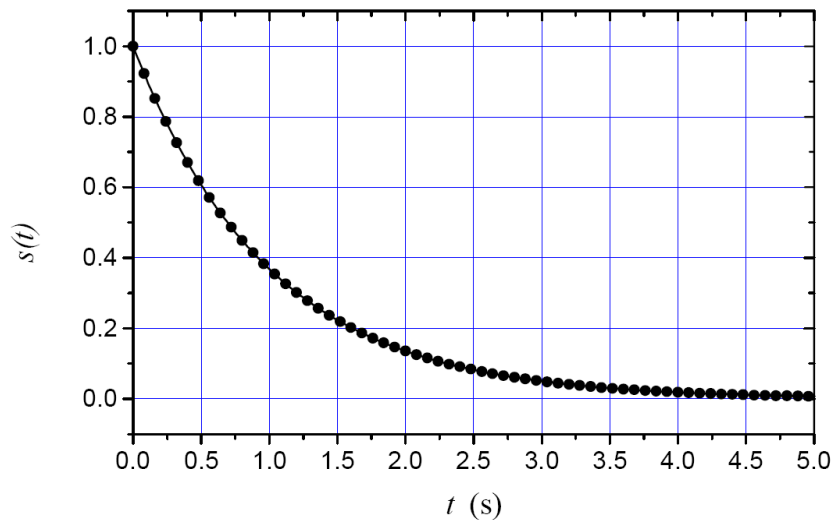
Notion de bruit

Ce qui distingue le signal du bruit c'est que **l'un transporte une information qui nous intéresse**, l'autre une information qui ne nous intéresse pas.

# Classification des signaux

1 par leurs modes de représentation :

**-signaux déterministes ou signaux aléatoires.** La forme temporelle d'un signal déterministe est toujours la même lorsque l'expérience est reproduite dans des conditions identiques, ce qui n'est pas le cas d'un signal aléatoire.

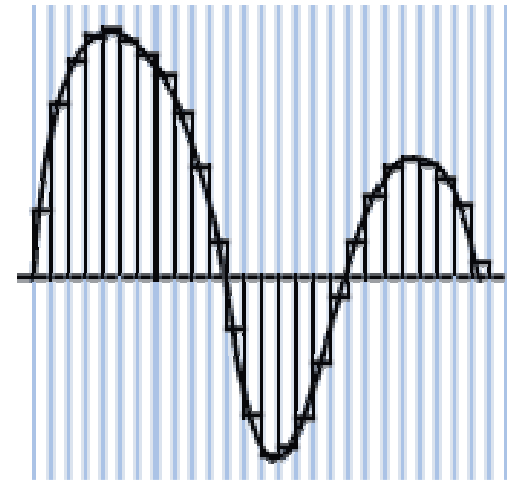
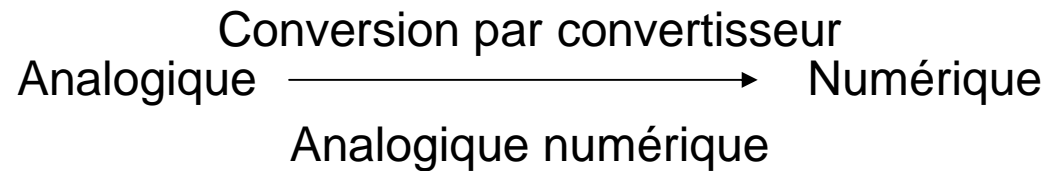


**- signaux à temps continu ou signaux à temps discret,** la plupart des signaux rencontrés dans la nature varient continûment avec le temps.



## Classification des signaux

- **signaux analogiques ou signaux numériques.** Les valeurs que le signal peut prendre peuvent être décrites de manière continue (cas d'un signal de parole mesuré par un microphone de pression) ou discret (codage ADN), liées à une opération de quantification. On parle alors de signal à valeurs continues (ou signal analogique) ou discrètes (ou signal numérique).



deux activités parallèles : l'**échantillonnage** et la **quantification**

## Classification des signaux

2 par certaines de leurs **caractéristiques**

**-signaux stationnaires ou signaux non stationnaires** (Le "contenu fréquentiel" d'un signal stationnaire n'évolue pas au cours du temps. )

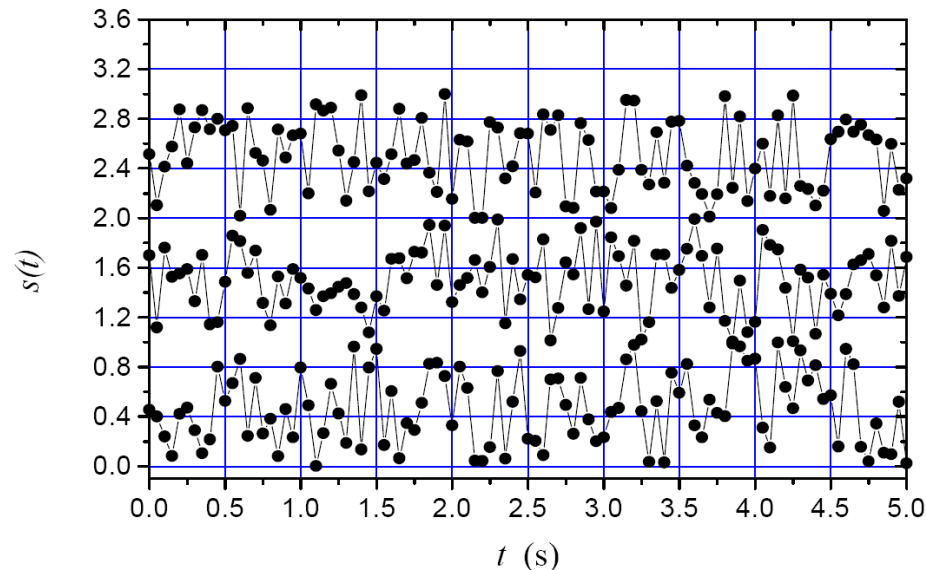


Figure: signal stationnaire **ergodique**. Mesure à 3 temps différents décalé selon l'axe y

**Ergodique**: caractéristiques statistiques équivalentes à chaque réalisation

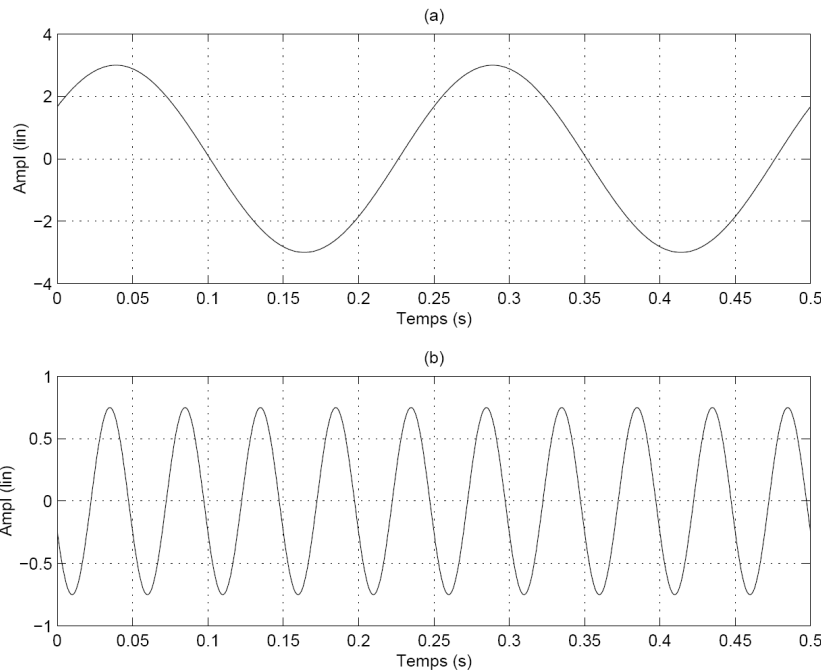
**! Ergodique différent de stationnaire !**

Exemple: valeur constante différente à chaque réalisation

## Classification des signaux

**signaux à bande étroite ou signaux large bande** (Un capteur ultra-sonore est un capteur à bande étroite ; le signal qu'il délivre l'est donc également.),

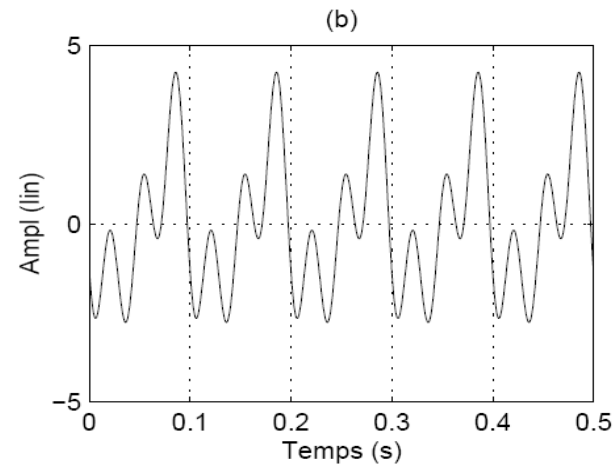
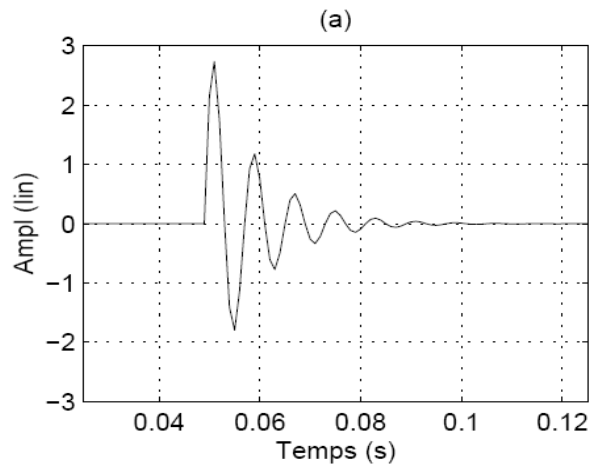
**signaux basses fréquences (BF) ou signaux hautes fréquences (HF)**, (Attention de bien préciser ce que sont des BF et des HF, gammes de fréquences qui ne sont pas les mêmes suivant qu'on s'intéresse à des infra-sons ou à des ondes radio)



**Figure 2 signal  
sinusoidal BF (a)  
et HF(b)**

## Classification des signaux

- **signaux à support temporel fini**, aussi appelés signaux transitoires ou signaux impulsionnels (donc à énergie finie), ou **signaux à support temporel infini** (à puissance finie).



Il est important de noter que cette classification ne sert qu'à sélectionner la méthode la mieux adaptée à un problème donné

## Quelques descripteurs de signaux

Pour les signaux déterministes, l'information pertinente peut se réduire à quelques **descripteurs élémentaires** du signal

**Valeur moyenne** observée sur un temps T:

$$\bar{x}_{t_0, T} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$$

**Valeur efficace** (ou valeur RMS) observée sur un temps T:

$$x_{RMS, t_0, T} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt}$$

**Facteur de crête** : rapport entre la valeur crête du signal temporel sur sa valeur RMS (descripteur pertinent pour les signaux transitoires)

**Énergie** : on appelle énergie du signal sur un temps T la quantité:

$$E_x = \int |x(t)|^2 dt$$

## Quelques descripteurs de signaux

**Puissance instantanée :**

$$P_x^{(i)}(t) = |x(t)|^2$$

**Puissance moyenne :** on appelle puissance moyenne du signal sur un temps T :

$$P_{x,t_0,T} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt$$

Si T s'étend de  $-\infty$  à  $\infty$ , signaux à énergie finie vérifient:

$$E < \infty$$

Signaux à puissance moyenne finie

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) s^*(t) dt < \infty$$

- Si  $s(t)$  est à **énergie finie** nécessairement à **puissance moyenne finie**
- Signaux à énergie finie = signaux à carré sommable
- Pour les signaux de période T, l'intervalle de temps = période du signal

## Quelques descripteurs de signaux

### Parité d'un signal

Un signal peut se décomposer en une somme d'un signal paire et d'un signal impaire

$$s(t) = s_p(t) + s_i(t)$$

Avec

$$s_p(t) = s_p(-t) \quad \text{et} \quad s_i(t) = -s_i(-t)$$

Donc

$$s_p(t) = \frac{s(t) + s(-t)}{2}$$

$$s_i(t) = \frac{s(t) - s(-t)}{2}$$

## Représentation de quelques signaux déterministes

### Fonction signe

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

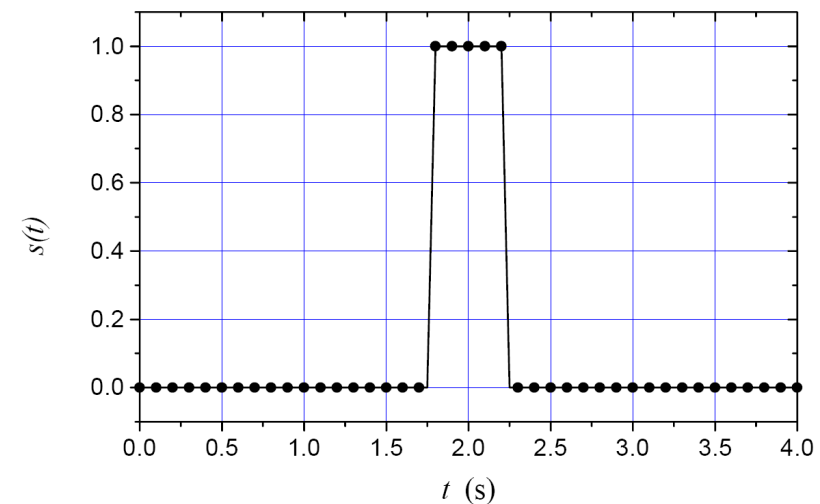
### Fonction de Heaviside (ou échelon unité)

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.5 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad \theta(t) = \frac{1 + \text{sgn}(t)}{2}$$

### Fonction porte

$$\square_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{si } t \notin \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \end{cases}$$

Ou  $\text{rect}_T$

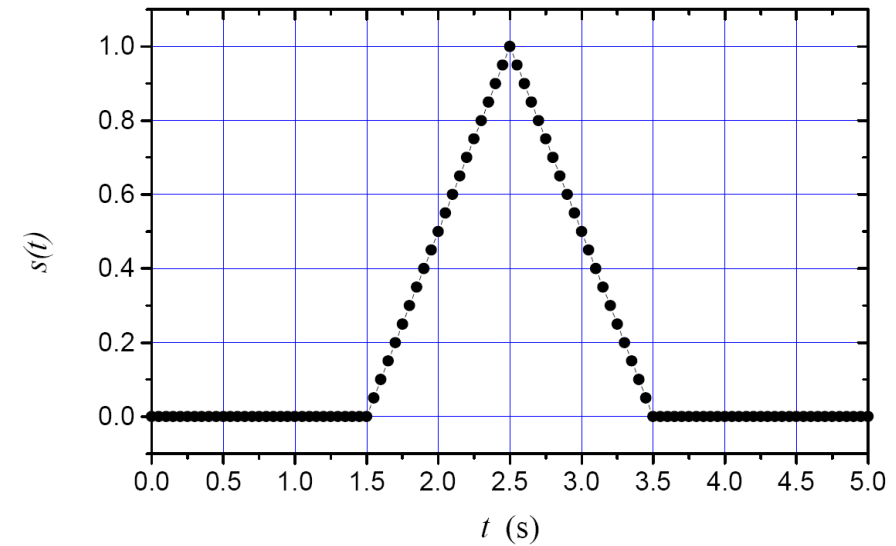




## Représentation de quelques signaux déterministes

Fonction triangle

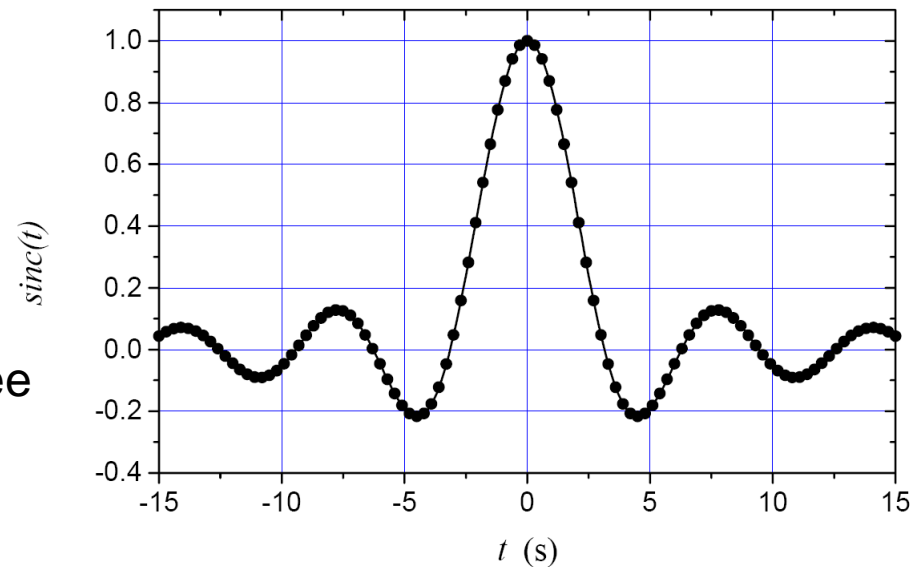
$$tri_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & \text{si } |t| < T \\ 0 & \text{si } |t| \geq T \end{cases}$$



Fonction sinus cardinal

$$sinc(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Fonction importante en traitement du signal car correspond à la transformée de fourrier d'une porte



## Représentation de quelques signaux déterministes

Fonction gaussienne

$$G(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Paramètres importants :

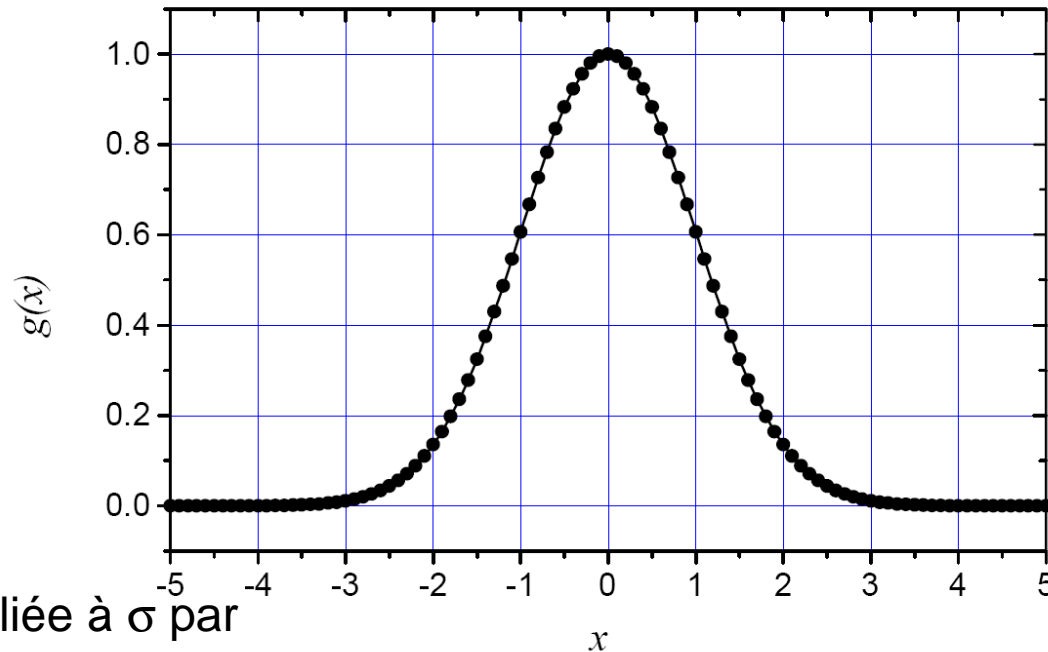
- Son amplitude A
- La demi-largeur à mi hauteur reliée à  $\sigma$  par

$$\sigma = 0.85 \text{d.l.m.h.} \iff \text{d.l.m.h.} = 1.18\sigma$$

Signal gaussien particulièrement utile pour les processus aléatoire car à la base des distributions de probabilités

Gaussienne normalisée par son intensité intégrée

$$G(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$



## Représentation de quelques signaux déterministes

Fonction périodique à temps continu

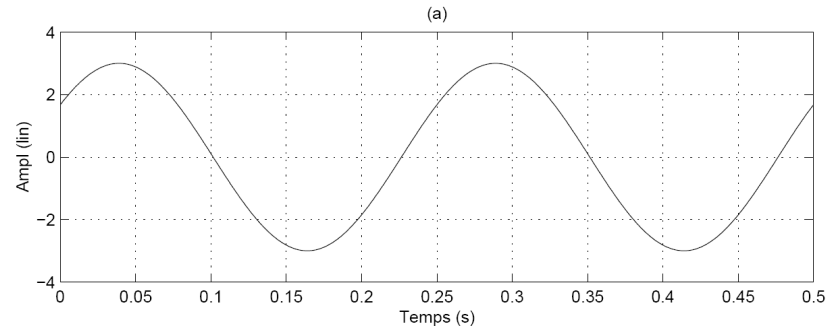
Une fonction est périodique si  $s(t)=s(t+T)$

La somme de deux fonctions périodique est périodique si et seulement si il existe des entier  $k_1$  et  $k_2$  tels que  $k_1T_1=k_2T_2$

$$x(t) = A_0 \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)$$

$$z_x(t) = A_0 \exp j(2\pi F_0 t + \phi_0)$$

$$\text{Real}(z_x(t)) = x(t)$$



Formule d'Euler

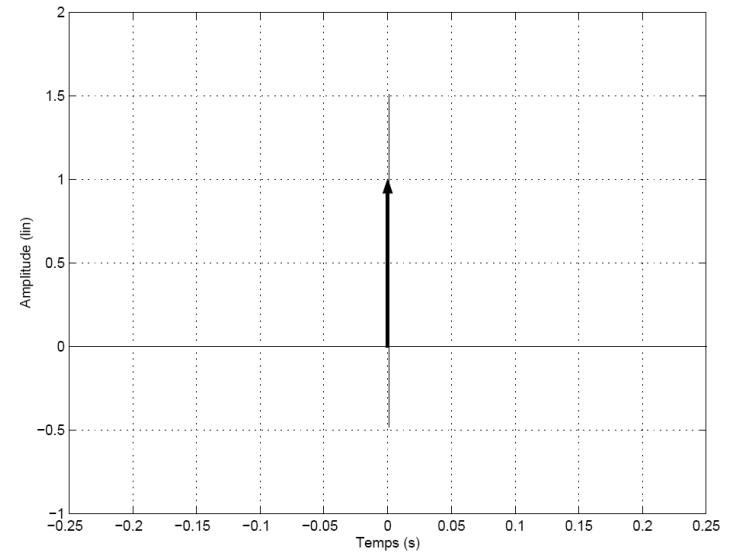
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

## Représentation de quelques signaux déterministes

Dirac  $\delta(t)$

Impulsion, temps court

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{Rect}_T(t)$$



Quelques propriétés de la fonction Dirac

1.  $\forall t \neq 0,$

$$\delta(t) = 0,$$

2.  $\forall t_0,$

$$\int x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0),$$

3. si  $x(t)$  est continu en  $t = t_0,$

$$x(t).\delta(t - t_0) = x(t_0).\delta(t - t_0),$$

4.

$$\int A\delta(t - t_0)dt = A.$$

***MATHEMATIQUE DU SIGNAL***

# *Analyse fonctionnelle*

## Introduction à l'analyse fonctionnelle

Deux domaines particulièrement utiles pour le traitement du signal:

- Analyse fonctionnelle  $\Rightarrow$  Signal déterministe
- Théorie des probabilités  $\Rightarrow$  Signal aléatoire

Analyse fonctionnelle dans un espace vectoriel de Hilbert (fonctions carrés sommables). Il faut définir dans cet espace vectoriel:

- La dimension de l'espace
- la base qui sous tend l'espace
- une métrique et donc une norme

Choix de la base arbitraire, guidé par l'analyse souhaitée

On développe le signal  $s(t)$  sur la base:

$$s(t) = \sum_n c_n \Phi_n(t)$$

Les coefficients  $c_n$  sont les composantes du signal dans la base et constituent une représentation du signal  $s(t)$

La représentation du signal dans la base choisie sera obtenue en déterminant les  $\{c_n\}$ . Pour cela, il suffit de projeter le signal sur chaque vecteur de base donc d'effectuer le produit scalaire du signal par chacun des vecteurs de base

$$\langle \Phi_k(t) | s(t) \rangle = \int_T s(t) \Phi_k^*(t) dt = \int_T \sum_n c_n \Phi_n(t) \Phi_k^*(t) dt \quad (2.10)$$

soit

$$\langle \Phi_k(t) | s(t) \rangle = \sum_n c_n \int_T \Phi_n(t) \Phi_k^*(t) dt = \sum_n c_n \langle \Phi_k(t) | \Phi_n(t) \rangle \quad (2.11)$$

Nous faisons l'hypothèse que la base choisie est orthogonale ce qui nous permet d'éliminer tous les termes de la somme sur  $n$  sauf celui qui correspond à  $n = k$ . Il vient alors :

$$c_k = \frac{\langle \Phi_k(t) | s(t) \rangle}{\langle \Phi_k(t) | \Phi_k(t) \rangle} \quad (2.12)$$

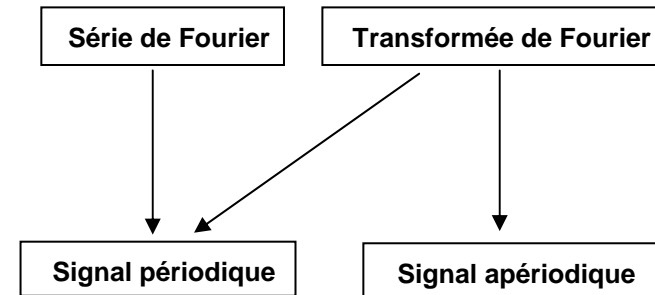
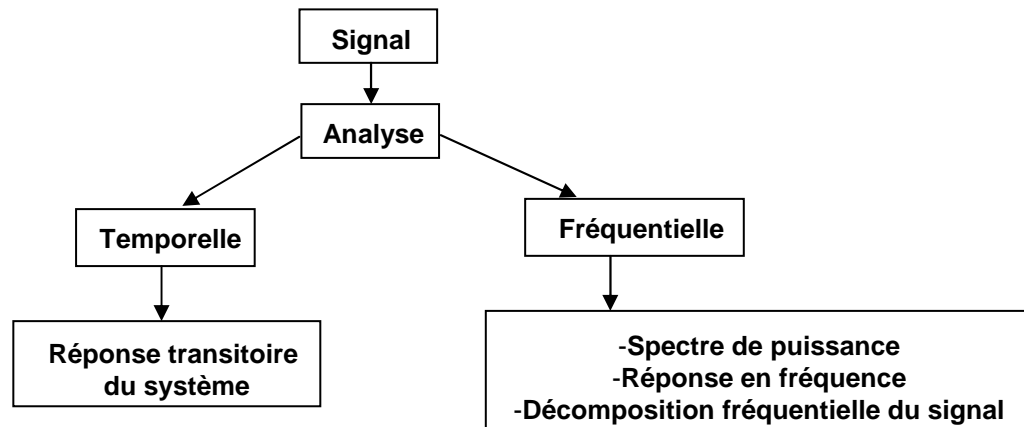


# Représentation fréquentielle des signaux

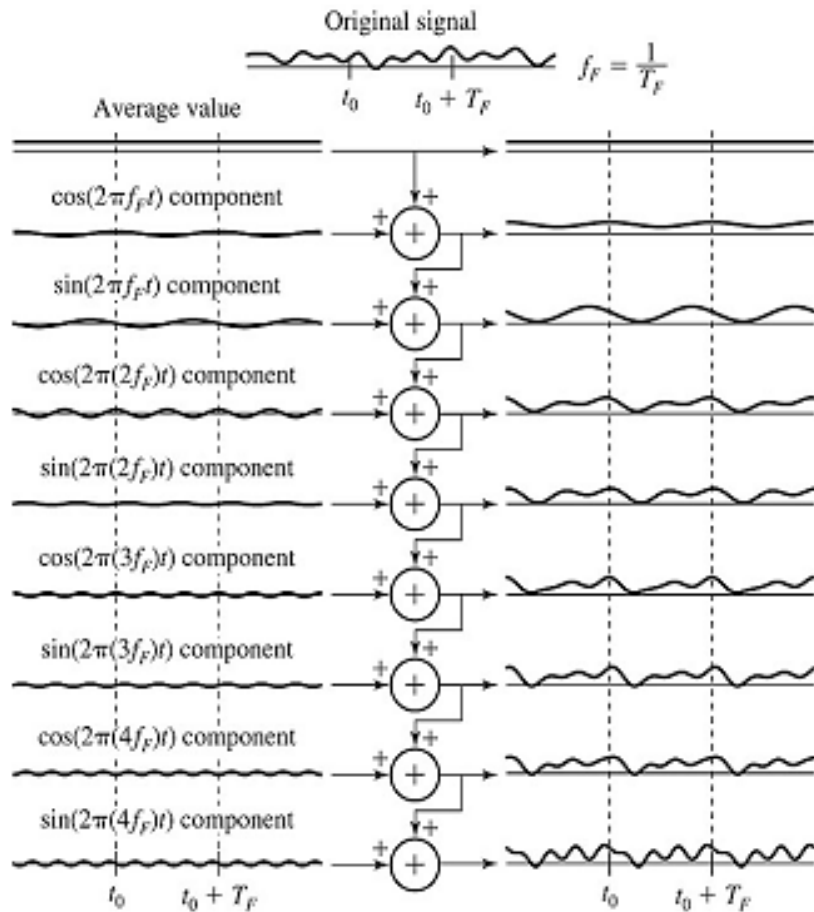
*Les séries de Fourier*

## La série de Fourier

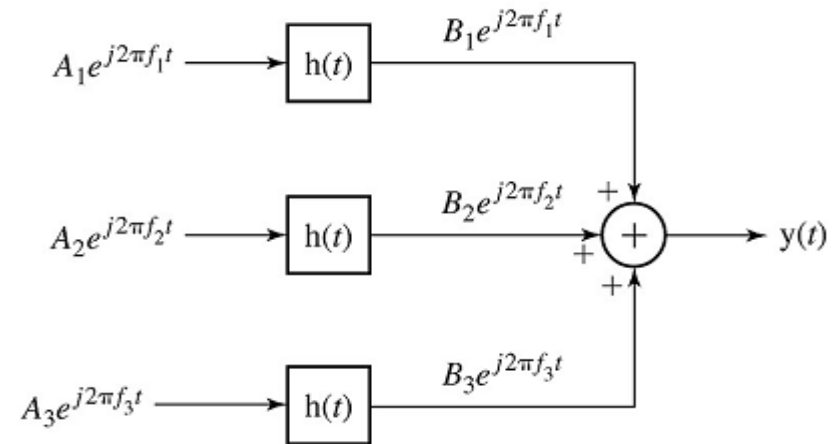
La série de Fourier permet de représenter toutes les fréquences contenues dans un signal périodique dont la fonction  $x(t)$  est connue mathématiquement



Tout signaux périodiques est la somme de signaux harmoniques d'amplitudes distinctes et d'une composante continue si elle existe.

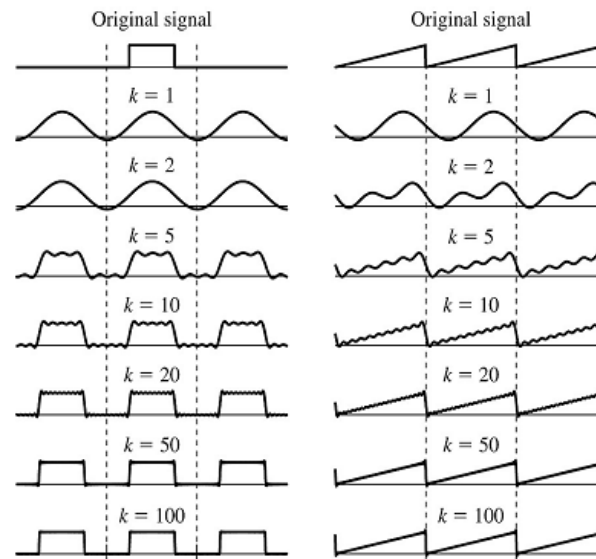


$$x(t) = A_1 e^{j2\pi f_1 t} + A_2 e^{j2\pi f_2 t} + A_3 e^{j2\pi f_3 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$



Pour caractériser un signal, la série de Fourier nous fourni des paramètres qui ne sont pas visibles dans le domaine temporel.

## Exemple de reconstruction de signal:



Reconstitution du signal original à partir d'une somme de signaux sinusoidaux

- + Plus nous avons de signaux et meilleure sera la recombposition du signal original.
- le signal reconstitué contiendra des discontinuités proportionnelles au nombre de signaux combinés → phénomène de Gibbs

## ANALYSE DE FOURIER

Analyse harmonique (ou fréquentielle) = instrument majeur de la théorie des signaux et des systèmes

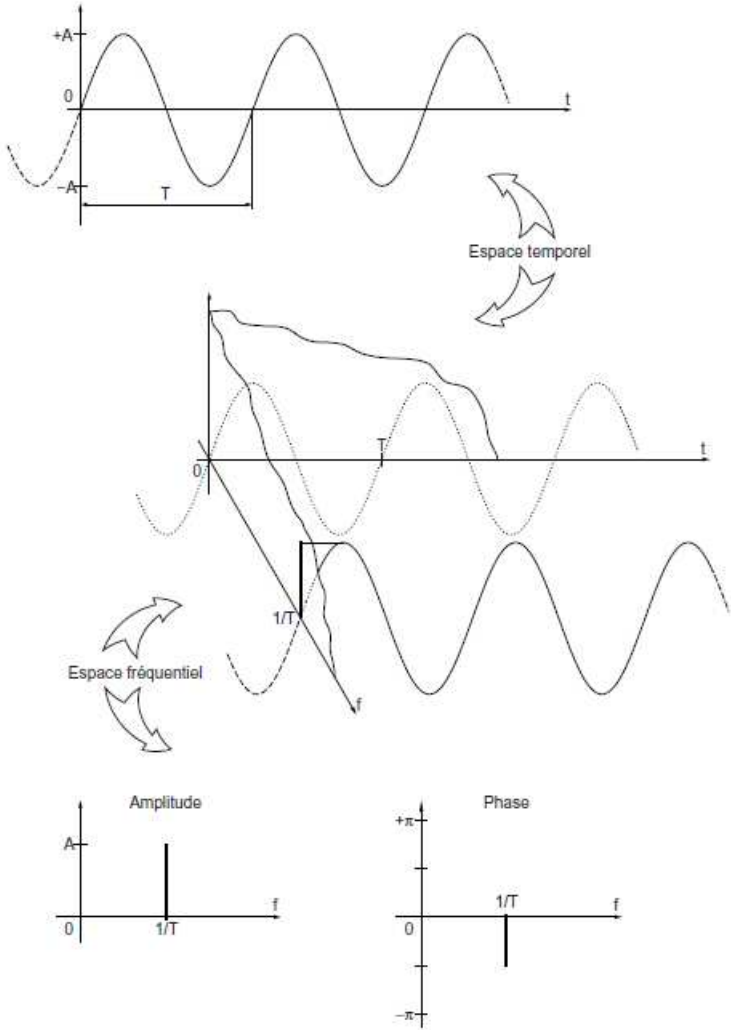
Le développement en séries de Fourier (puis la transformation de Fourier) permettent d'obtenir une représentation spectrale des signaux déterministes, i.e. la répartition de

1. l'amplitude
2. la phase
3. l'énergie
4. la puissance

des signaux considérés en fonction de la fréquence.

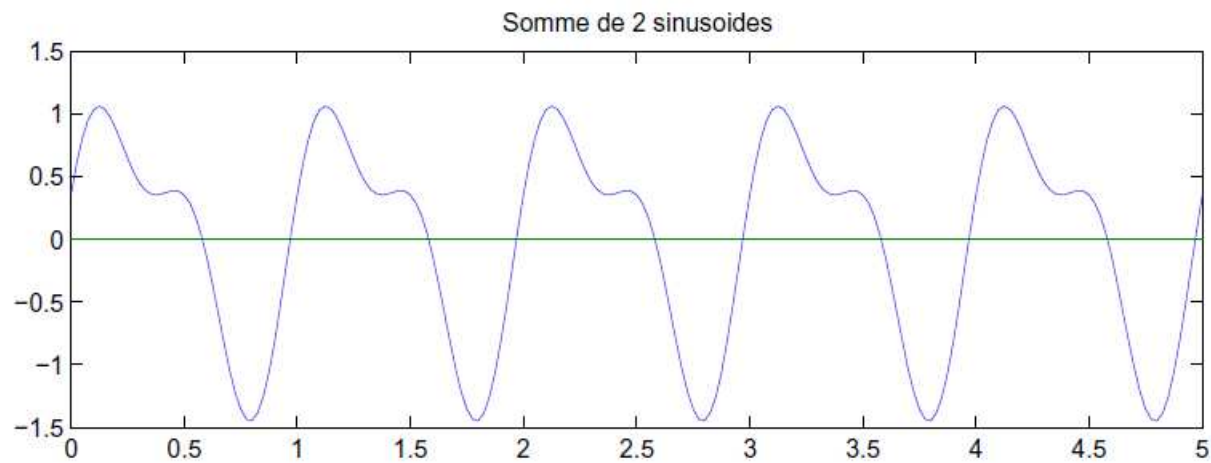
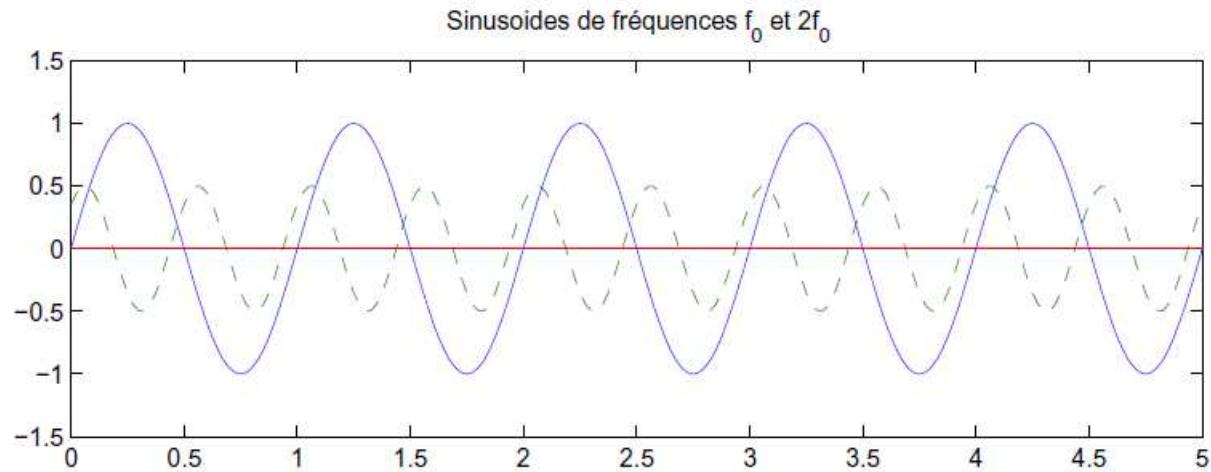
# Deux représentations pour 1 seul signal

$$x(t) = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha)$$



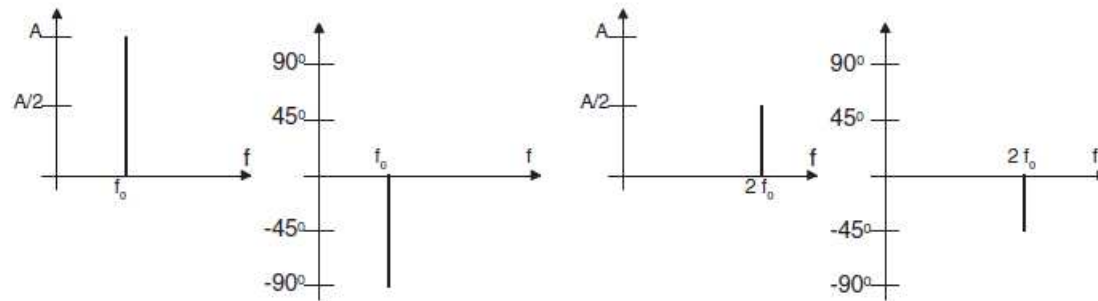
## Deux représentations pour 1 seul signal

$$x(t) = A \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot A \cdot \cos\left(4 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \frac{\pi}{4}\right)$$



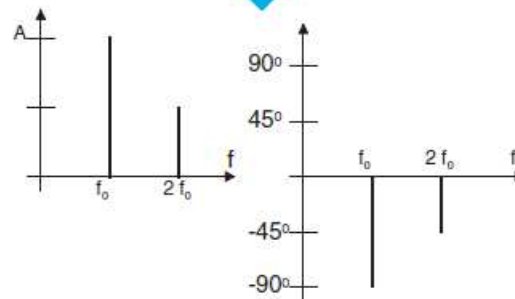
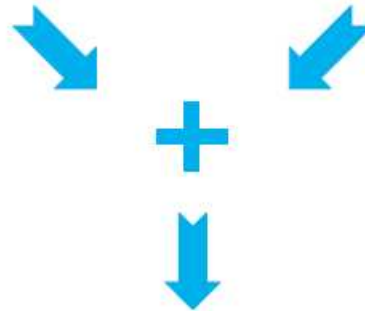
## Deux représentations pour 1 seul signal

$$x(t) = A \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot A \cdot \cos\left(4 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \frac{\pi}{4}\right)$$



Cosinusoïde d'amplitude  $A$  et de phase  $-90^\circ$

Cosinusoïde d'amplitude  $A/2$  et de phase  $-45^\circ$



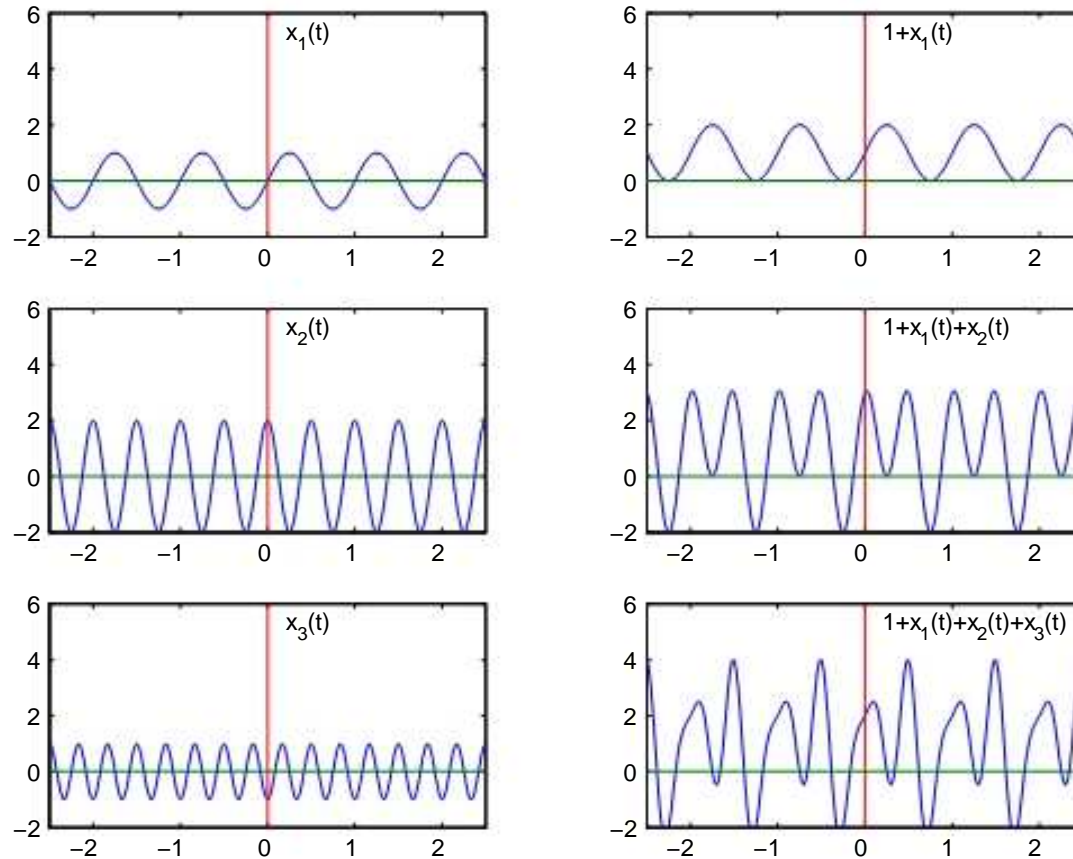
Signal périodique non-sinusoidal



## SERIE DE FOURIER

L'élément fondamental de l'analyse de Fourier est constitué par le fait qu'un signal périodique peut être décomposé en une somme d'ondes sinusoïdales

# SERIE DE FOURIER



Le signal résultant est la somme de trois sinusôides dont la fréquence est chaque fois un multiple de la fondamentale  $f_0$

## Définition de la série de Fourier

Considérons un signal périodique  $x(t)$  de période  $T = \frac{1}{f_0}$ . Son **développement en série de Fourier** est :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t)$$

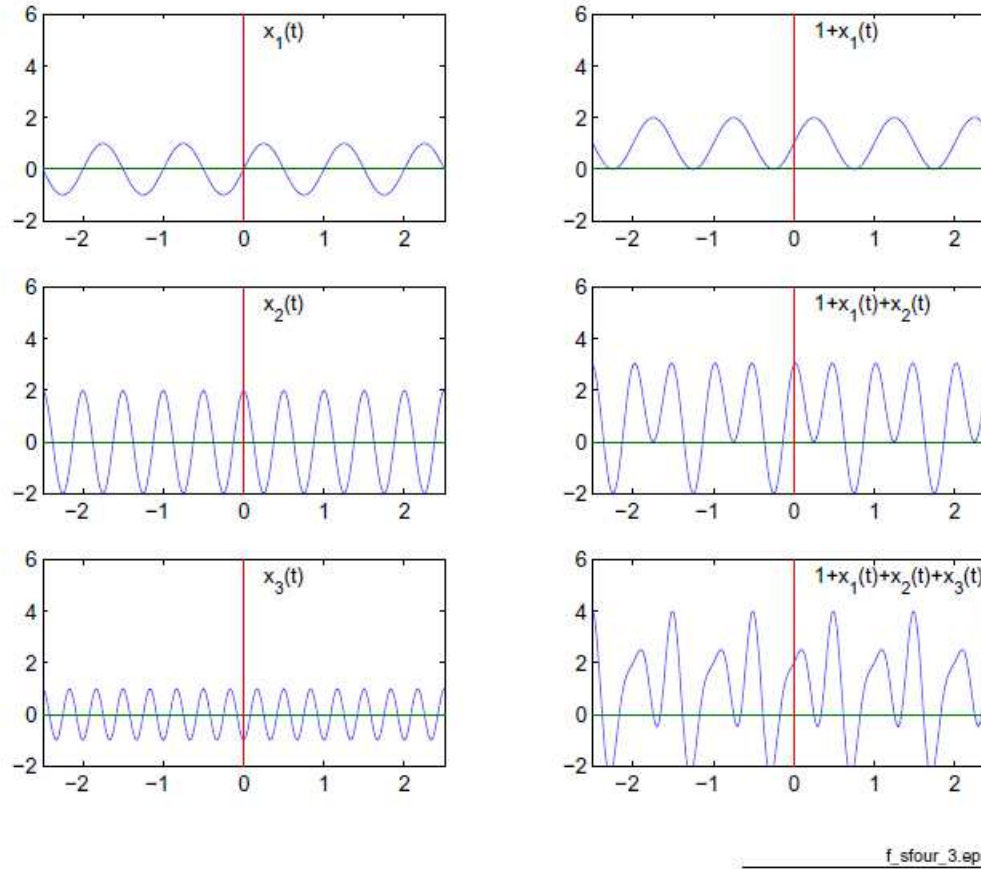
où

- $f_0 = \frac{1}{T}$  est la **fréquence fondamentale** du signal
- $\frac{a_0}{2}$  est la **valeur moyenne** ou composante continue
- $a_k, b_k$  sont les **coefficients de Fourier** du développement en cosinus et sinus :

$$a_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \cdot dt \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \cdot dt \quad k \geq 1$$

## Définition de la série de Fourier



$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t)$$

## Définition de la série de Fourier en cosinus

Partant la relation trigonométrique :

$$A \cdot \cos(x) + B \cdot \sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \cos\left(x + \arctan\left(\frac{-B}{A}\right)\right)$$

le développement en série de Fourier

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t)$$

peut également s'écrire :

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t + \alpha_k)$$

avec :

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \alpha_k = \arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right)$$

## Série de Fourier complexe

### ■ Série de Fourier :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t)$$

### ■ Relations d'Euler :

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{e^{+j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \\ \sin(x) &= \frac{e^{+j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \end{aligned}$$

... on montre aisément que la série de Fourier peut être transformée en une série de Fourier complexe :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j \cdot k) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t}$$

## Série de Fourier complexe

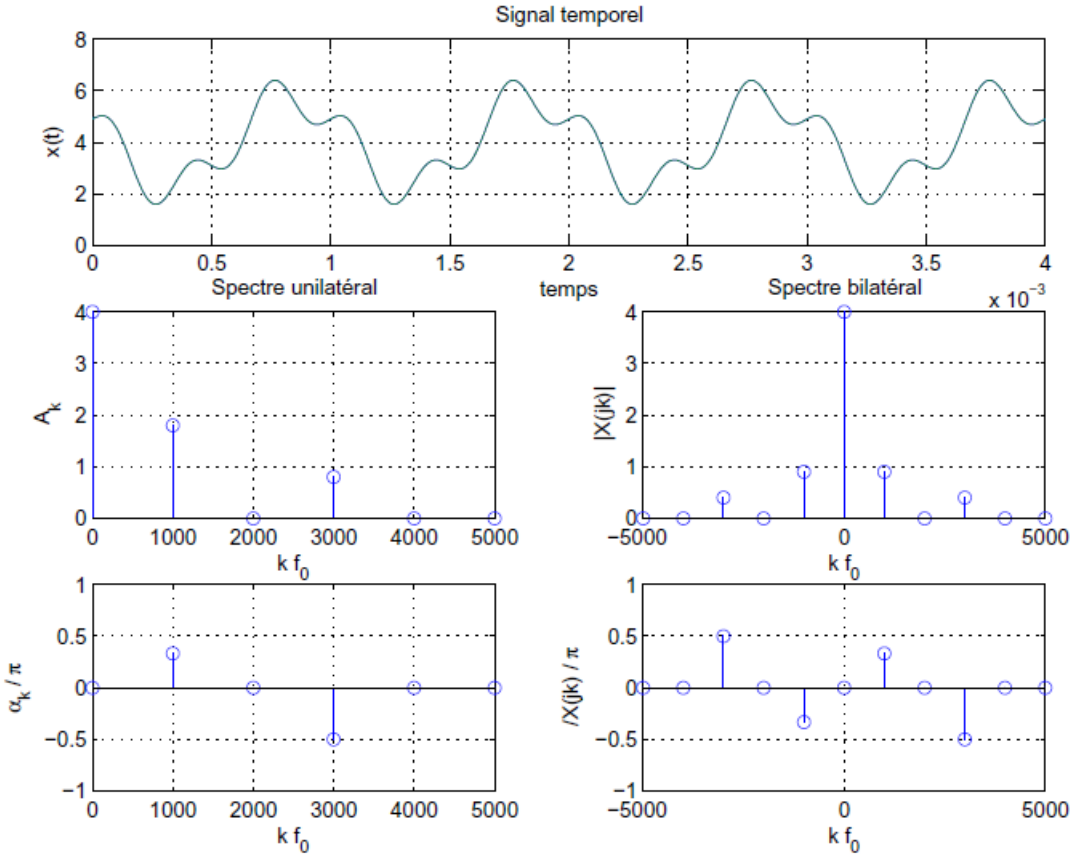
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j \cdot k) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t}$$

Les coefficients  $X(j \cdot k)$  sont alors complexes et valent :

$$X(j \cdot k) = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t} \cdot dt \quad -\infty < k < +\infty$$

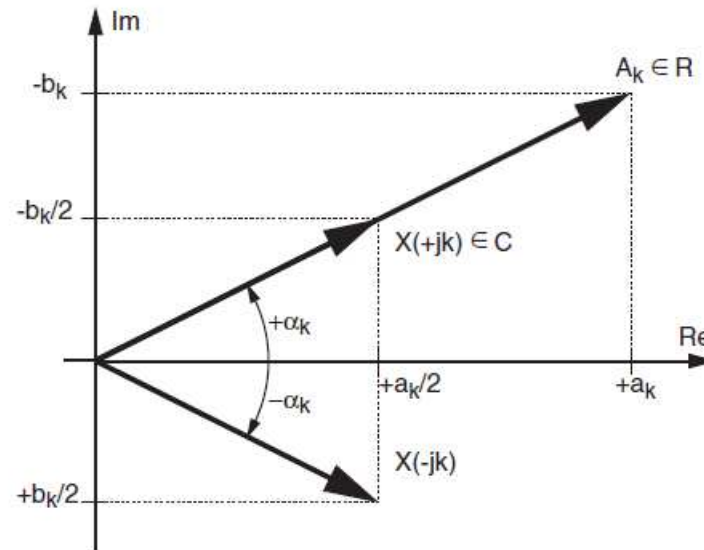
# Série de Fourier complexe

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j \cdot k) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t}$$





## Relation entre les 3 représentations



$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \quad (1)$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t + \alpha_k) \quad (2)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j \cdot k) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t} \quad (3)$$

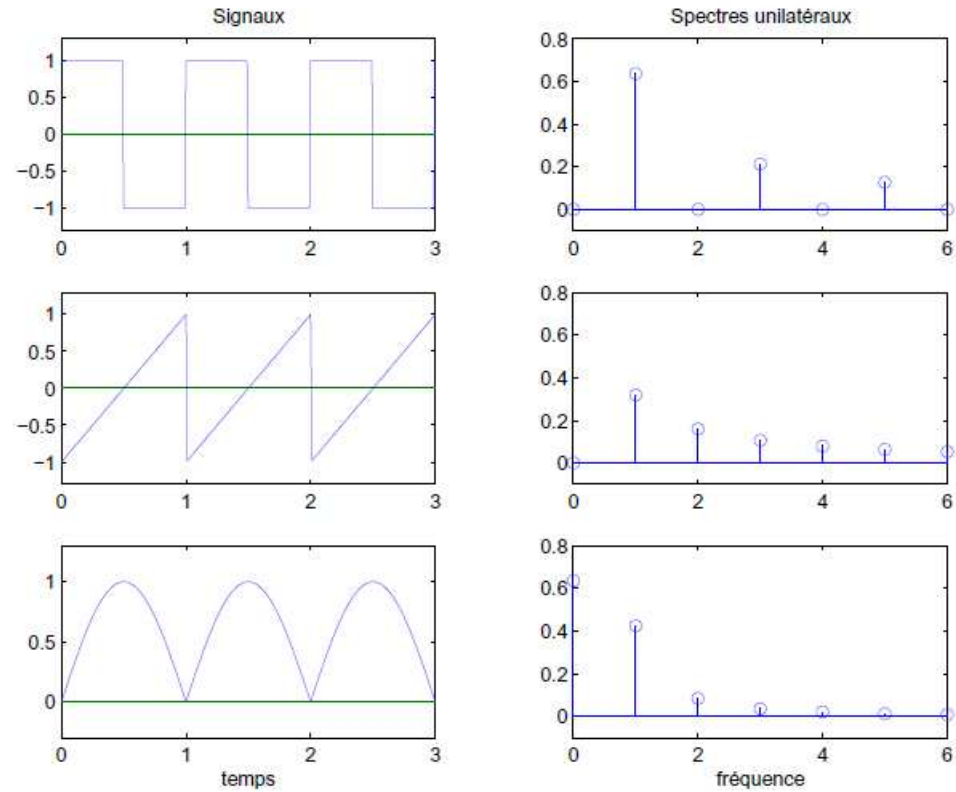
## Relation entre les 3 représentations

$k = 0$	$\frac{a_0}{2}$	$A_0$	$X(0)$
$k > 0$	$\{a_k, b_k\}$	$\{A_k, \alpha_k\}$	$X(\pm j \cdot k)$
$a_k$ $b_k$	$a_k$ $b_k$	$+A_k \cdot \cos(\alpha_k)$ $-A_k \cdot \sin(\alpha_k)$	$+2 \cdot \Re\{X(j \cdot k)\}$ $-2 \cdot \Im\{X(j \cdot k)\}$
$A_k$ $\alpha_k$	$\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ $\arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right)$	$A_k$ $\alpha_k$	$2 \cdot  X(j \cdot k) $ $\arctan\left(\frac{\Im\{X(+j \cdot k)\}}{\Re\{X(+j \cdot k)\}}\right)$
$X(+j \cdot k)$ $X(-j \cdot k)$	$\frac{1}{2} \cdot (a_k - j \cdot b_k)$ $\frac{1}{2} \cdot (a_k + j \cdot b_k)$	$\frac{1}{2} \cdot A_k \cdot e^{+j \cdot \alpha_k}$ $\frac{1}{2} \cdot A_k \cdot e^{-j \cdot \alpha_k}$	$X(+j \cdot k)$ $X(-j \cdot k)$

# Les différents spectres

## Spectres unilatéraux

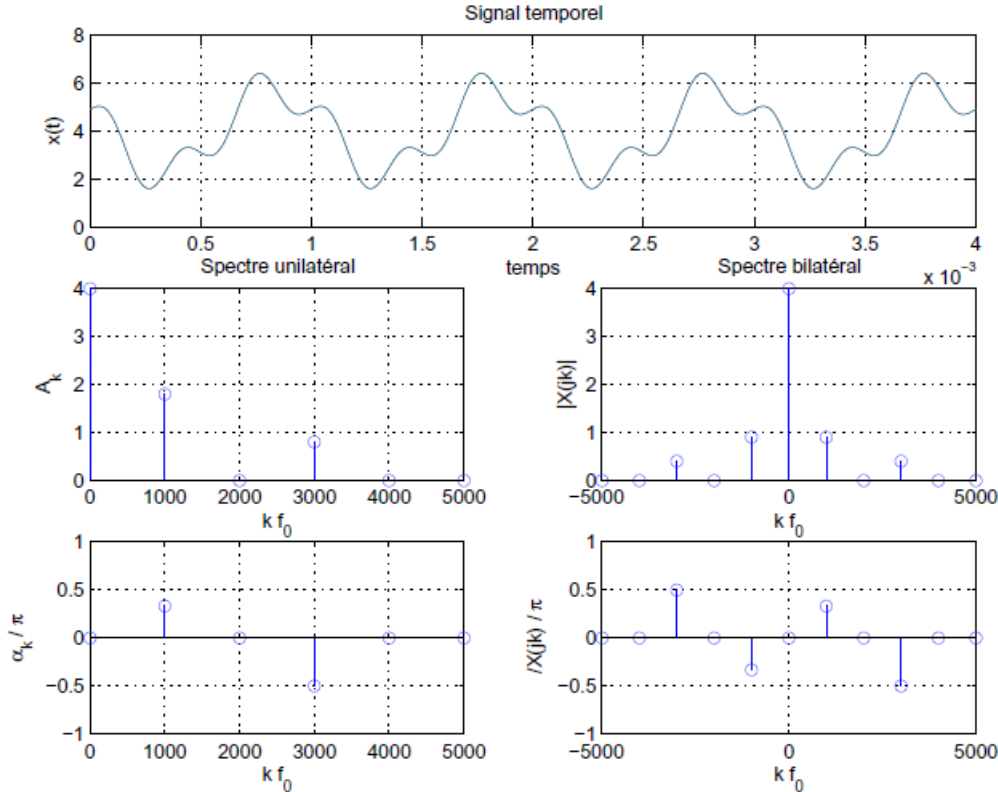
$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t + \alpha_k)$$



# Les différents spectres

## Spectres bilatéraux

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j \cdot k) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t}$$



## SERIE DE FOURIER

$$\begin{aligned}x_{(N)}(t) &= \sum_{k=-N}^N X(j \cdot k) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t} \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t + \alpha_k)\end{aligned}$$

Il est fréquent en traitement du signal de ne parler que des spectres d'amplitudes et de délaissier quelque peu les spectres de phases

Cette attitude est due au fait que lors du filtrage de signaux audio, on se contente de modifier le spectre d'amplitudes car l'oreille est peu sensible aux distorsions de phase

Cependant, lorsque l'on désire conserver la forme d'un signal, en particulier dans le cas du filtrage d'images, il est très important de ne pas négliger le spectre de phases.

La phase contient une part importante de l'information concernant la forme d'un signal

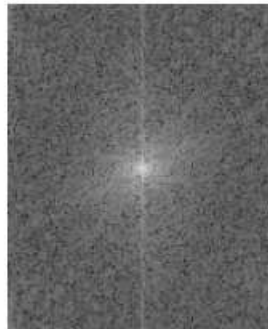
# SERIE DE FOURIER

Importance de la phase

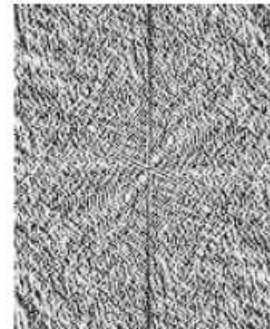
original



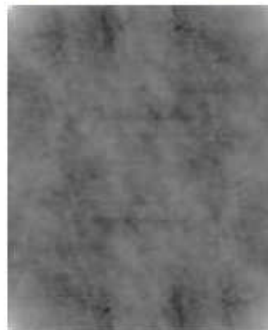
module



phase



TF inverse du module



TF inverse de la phase



Reconstituons le signal selon cette relation:

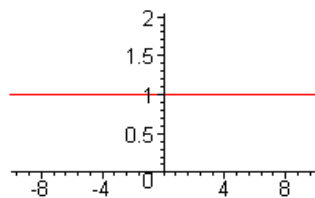
$$x(t) = C_{-3}e^{j(-3)2\pi} + C_{-2}e^{j(-2)2\pi} + C_{-1}e^{j(-1)2\pi} + C_0e^{j(0)2\pi} + C_1e^{j(1)2\pi} + C_2e^{j(2)2\pi} + C_3e^{j(3)2\pi}$$

$$x(t) = \frac{1}{3}e^{-j6\pi} + \frac{1}{2}e^{-j4\pi} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi} + 1 + \frac{1}{4}e^{j2\pi} + \frac{1}{2}e^{j4\pi} + \frac{1}{3}e^{j6\pi}$$

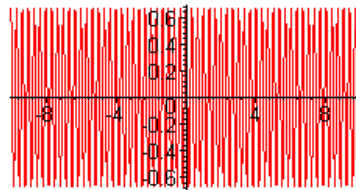
En regroupant les termes sous forme trigonométrique, nous obtenons

$$x(t) = 1 + \frac{2}{3}\cos(6\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi t)$$

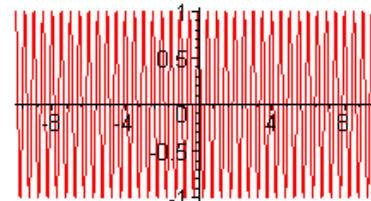
Ce signal est donc composé d'un terme constant (valeur moyenne continue non nulle) et de trois autres signaux de fréquence et amplitudes distinctes.



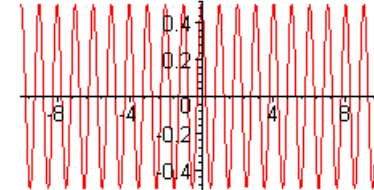
**x0**



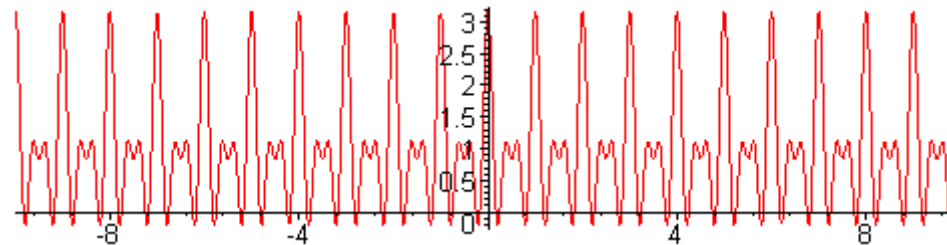
**x1**



**x2**



**x3**



**Signal résultant de l'addition des 4 composantes x0,x1,x2 et x3**

## Phénomène de Gibbs

Soit  $x(t) = \frac{2k}{j\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{jn\pi}$  pour n impair

Comme nous ne pouvons prendre en pratique une somme infinie de termes, alors

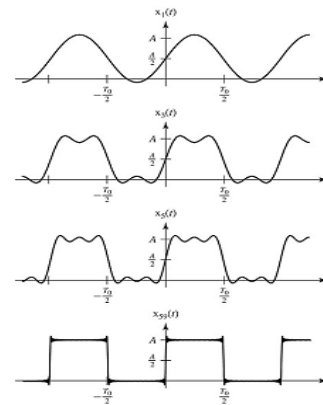
$$x_n(t) = \frac{2k}{j\pi} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{n} e^{jn\pi} \text{ pour n impair}$$

Cette somme étant maintenant limitée, on retrouve nécessairement une erreur lors de la reconstitution du signal.

$$e_n(t) = x(t) - x_n(t)$$

Cette erreur doit tendre vers zéro lorsque N tend vers l'infini. Lorsque le signal comporte des discontinuités (comme par exemple un signal à ondes carrées périodique) l'approximation  $x_n(t)$  présente des ondulations que l'on nomme phénomènes de Gibbs et qui s'atténue avec l'augmentation de N.

Pour N faible, on remarque les oscillations qui se produisent sur les bords de l'onde carrée périodique.





## Densité spectrale de puissance

Un signal périodique possède une **énergie infinie** et une **puissance moyenne finie**. Sa puissance moyenne sur une période est définie par

$$P_x = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt$$

Si on développe cette équation, nous avons

$$P_x = \frac{1}{T} \int_T x(t)x^*(t)dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^* e^{-jk\omega_0 t} \right) dt$$
$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^* \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^* C_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2$$

Cela signifie que la puissance d'un signal à temps continu périodique est égale à la somme des coefficients de Fourier au carrés. C'est ce que l'on nomme le **théorème de Parseval**.

Cela signifie que si nous avons un signal quelconque que nous pouvons décomposer en série de Fourier, nous pouvons connaître la puissance de ce signal uniquement à l'aide des coefficients spectraux.

*Les transformées de Fourier*  
*Théorie et applications*

## Pourquoi la transformée de Fourier

La transformée de Fourier est une généralisation des séries de Fourier pour tout types de signaux. Pour développer la transformée de Fourier, nous avons que l'idée principale est de tendre la période T d'un signal périodique vers l'infini. En insérant cette condition dans la série de Fourier, on obtient la relation suivante concernant la transformée de Fourier d'un signal apériodique;

$$TF \rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$X(\omega)$  représente une fonction continue en fréquence angulaire. La transformée inverse de Fourier est de reconstruire le signal à partir de la fonction de fréquence angulaire  $X(\omega)$ .

$$TFI \rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

On peut également utiliser la forme fréquentielle  $\omega = 2\pi f$  où f est la fréquence en Hertz.

$$TF \rightarrow X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t} dt$$

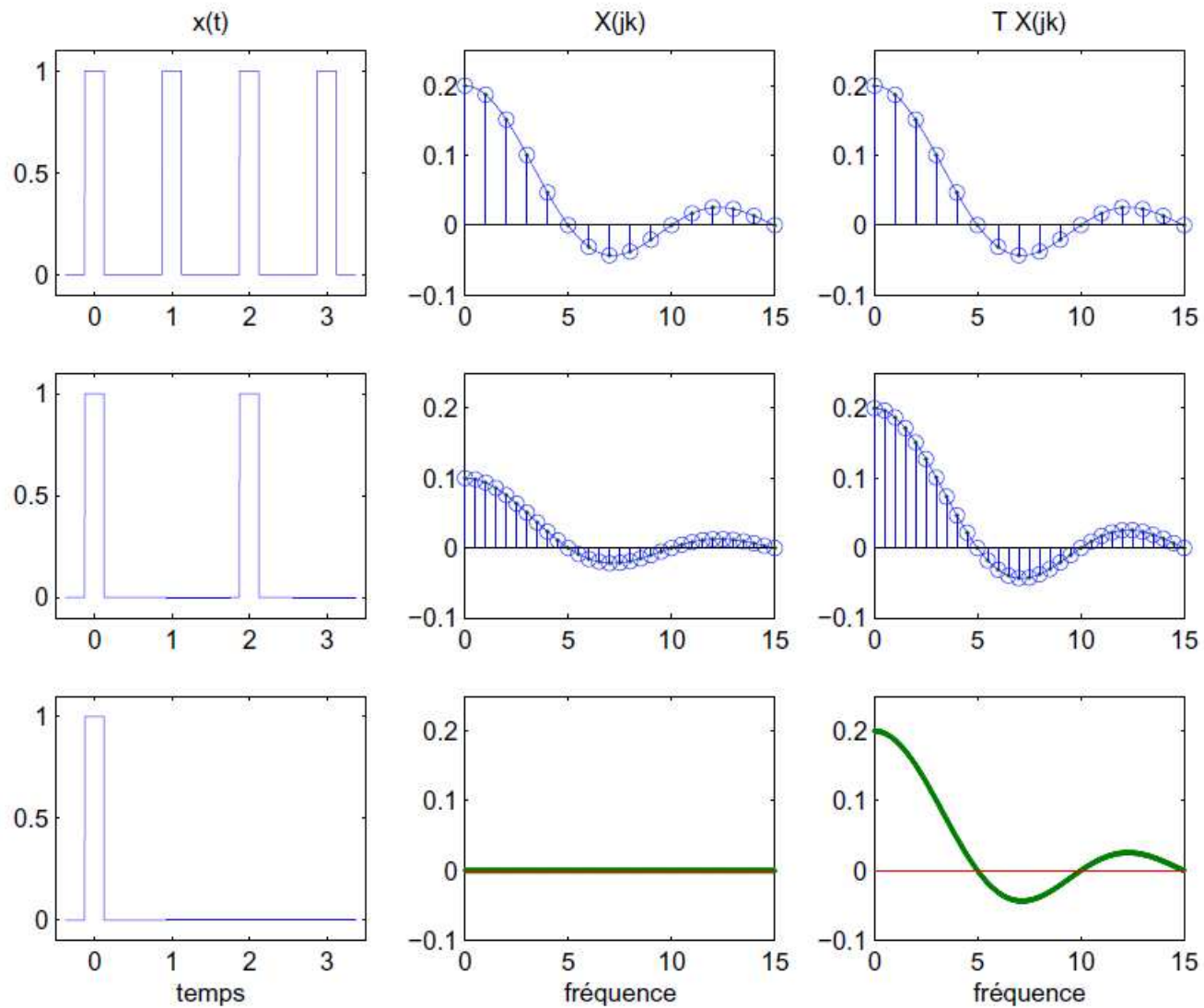
$$TFI \rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f t} d\omega$$

## Relation entre série et transformée de Fourier

$$x(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} X(j \cdot k) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t}$$

$$X(j \cdot k) = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t} \cdot dt$$

# Relation entre série et transformée de Fourier



## Relation entre série et transformée de Fourier

$$x(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} X(j \cdot k) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t}$$

$$X(j \cdot k) = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t} \cdot dt$$

$$T \cdot X(j \cdot k) = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t} \cdot dt$$

$$T \rightarrow \infty \quad f_0 \rightarrow df \quad k \cdot f_0 \rightarrow f \quad T \cdot X(j \cdot k) \rightarrow X(j \cdot f)$$

$$X(j \cdot f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt$$

## Relation entre série et transformée de Fourier

- Si la fonction  $x(t)$  ne possède pas de symétries particulières, sa densité spectrale d'amplitude  $X(j \cdot f)$  est une fonction complexe :

$$x(t) \longleftrightarrow X(j \cdot f) = X_r(f) + j \cdot X_i(f)$$

- Les densités spectrales du module et de la phase valent alors :

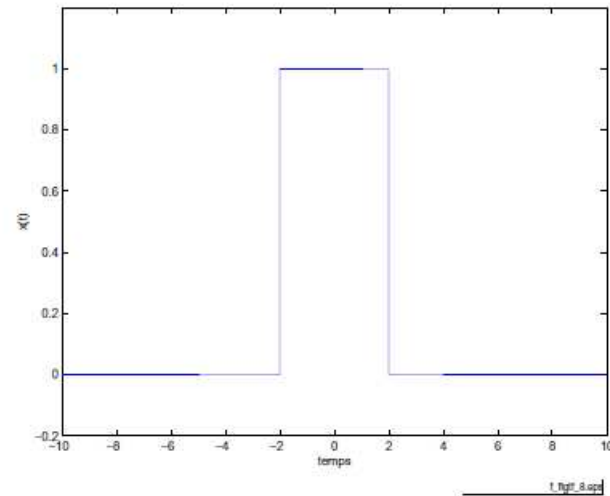
$$\begin{aligned} |X(j \cdot f)| = X(f) &= \sqrt{X_r^2(f) + X_i^2(f)} \\ \angle X(j \cdot f) = \alpha(f) &= \arctan\left(\frac{X_i(f)}{X_r(f)}\right) \end{aligned}$$

## Propriétés de la transformée de Fourier

a)	linéarité	$a \cdot x(t) + b \cdot y(t)$	$a \cdot X(j \cdot f) + b \cdot Y(j \cdot f)$
b)	décalage	$x(t + t_d)$	$X(j \cdot f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_d}$
c)	amortissement	$x(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \epsilon(t)$	$X(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f + a)$
d)	modulation	$x(t) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}$	$X(j \cdot (f - f_0))$
e)	dérivation	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot X(j \cdot f)$
f)	intégration	$\int_{-\infty}^t x(\tau) \cdot d\tau$	$\frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot X(j \cdot f) + \frac{1}{2} \cdot X(0) \cdot \delta(f)$ avec $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot dt$
g)	convolution	$h(t) * x(t)$ $h(t) \cdot x(t)$	$H(j \cdot f) \cdot X(j \cdot f)$ $H(j \cdot f) * X(j \cdot f)$
h)	énergie	$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) \cdot dt$	$W = \int_{-\infty}^{+\infty}  X(j \cdot f) ^2 \cdot df$
j)	valeurs à l'origine	$x(t = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j \cdot f) \cdot df$	$X(f = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot dt$
k)	rotation Oy	$y(t) = x(-t)$	$Y(j \cdot f) = X(-j \cdot f) = X^*(j \cdot f)$
l)	fonction paire	$x(-t) = x(t)$	$X(j \cdot f) \in \mathfrak{R}$
m)	fonction impaire	$x(-t) = -x(t)$	$X(j \cdot f) \in \mathfrak{I}$
n)	symétrie	$X(t)$ $X(-t)$	$x(-j \cdot f)$ $x(j \cdot f)$



## Exemple d'une impulsion rectangulaire :



$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > \frac{\Delta t}{2} \\ A & \text{si } |t| \leq \frac{\Delta t}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(j \cdot f) &= \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} A \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt \\ &= \frac{A}{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \Big|_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \\ &= \frac{A}{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot \left[ e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{\Delta t}{2}} - e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{\Delta t}{2}} \right] \\ &= \frac{A}{\pi \cdot f} \cdot \frac{e^{+j \cdot \pi \cdot f \cdot \Delta t} - e^{-j \cdot \pi \cdot f \cdot \Delta t}}{2 \cdot j} \end{aligned}$$

Trait

Exemple d'une impulsion rectangulaire :

$$\begin{aligned} X(j \cdot f) &= \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} A \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt \\ &= \frac{A}{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \Big|_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \\ &= \frac{A}{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot \left[ e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{\Delta t}{2}} - e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{\Delta t}{2}} \right] \\ &= \frac{A}{\pi \cdot f} \cdot \frac{e^{+j \cdot \pi \cdot f \cdot \Delta t} - e^{-j \cdot \pi \cdot f \cdot \Delta t}}{2 \cdot j} \end{aligned}$$

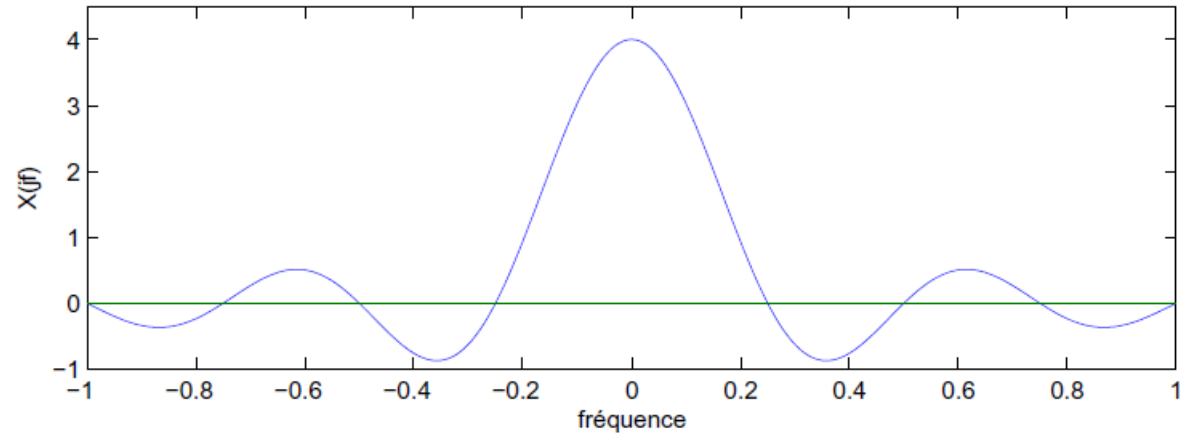
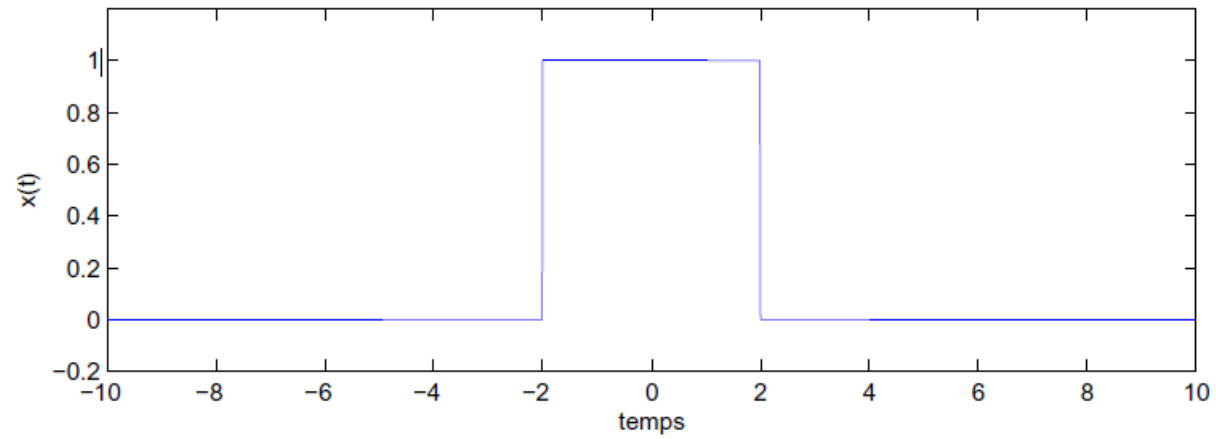
Utilisant la formule d'Euler

$$\sin(u) = \frac{e^{+j \cdot u} - e^{-j \cdot u}}{2 \cdot j}$$

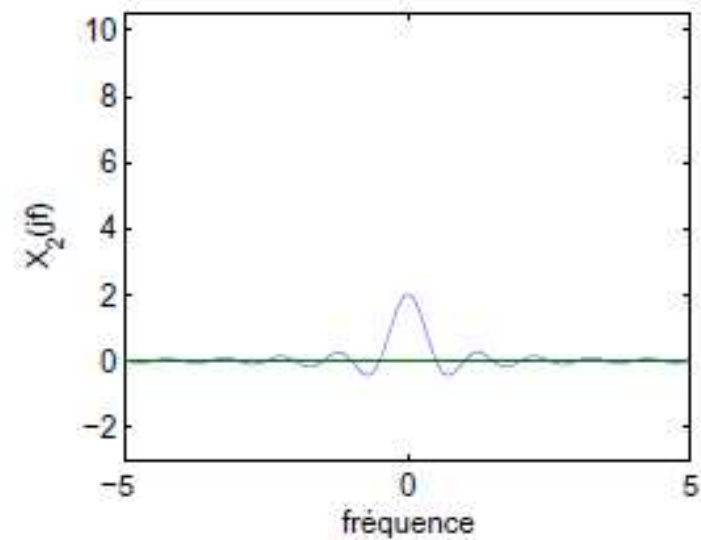
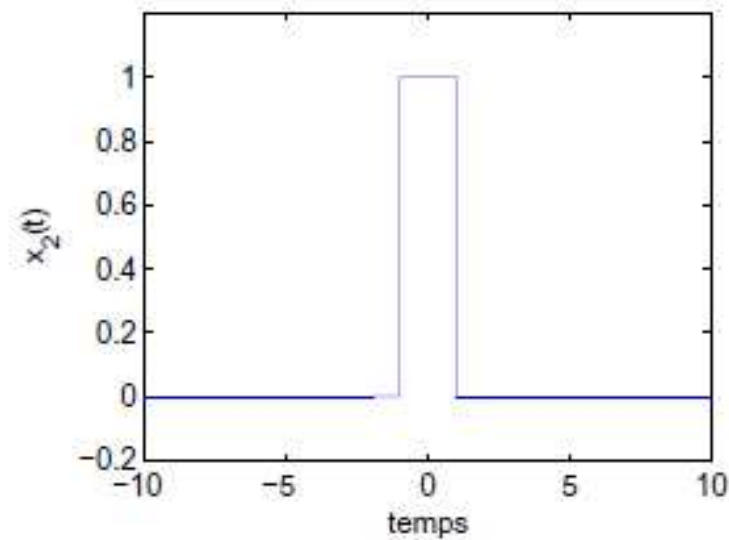
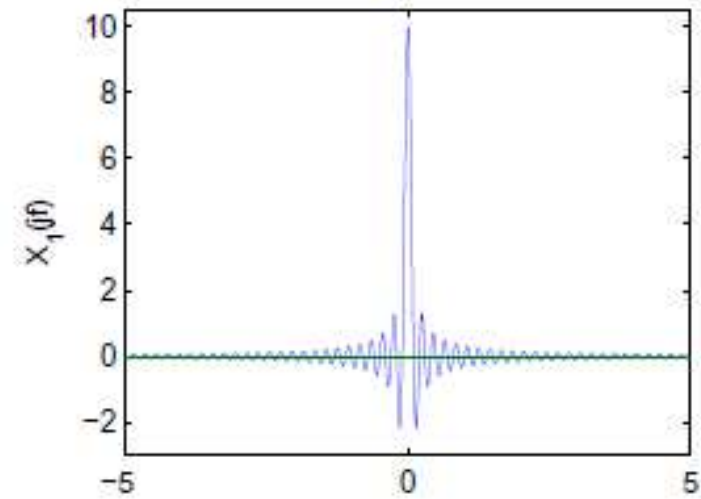
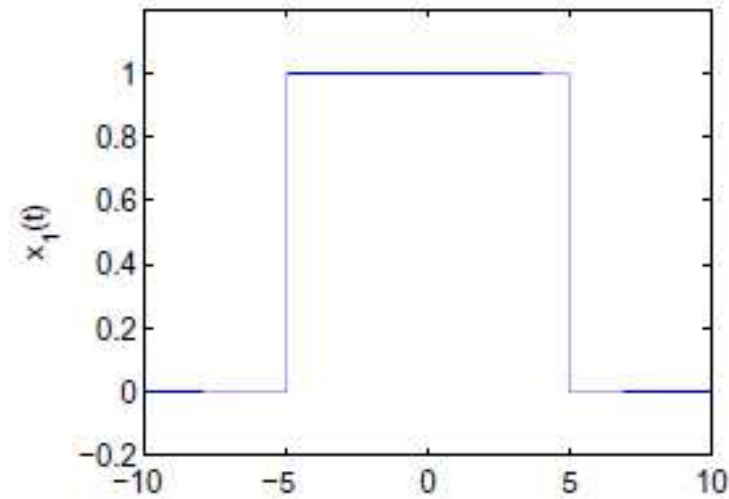
on obtient finalement :

$$X(j \cdot f) = A \cdot \Delta t \cdot \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot \Delta t)}{\pi \cdot f \cdot \Delta t} = A \cdot \Delta t \cdot \text{sinc}(f \cdot \Delta t) \in \mathfrak{R}$$

## Spectre d'amplitude d'une impulsion rectangulaire



## Relation entre largeur spectrale et étendue dans le temps



## Exemple d'un sinus amorti

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_p \cdot t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

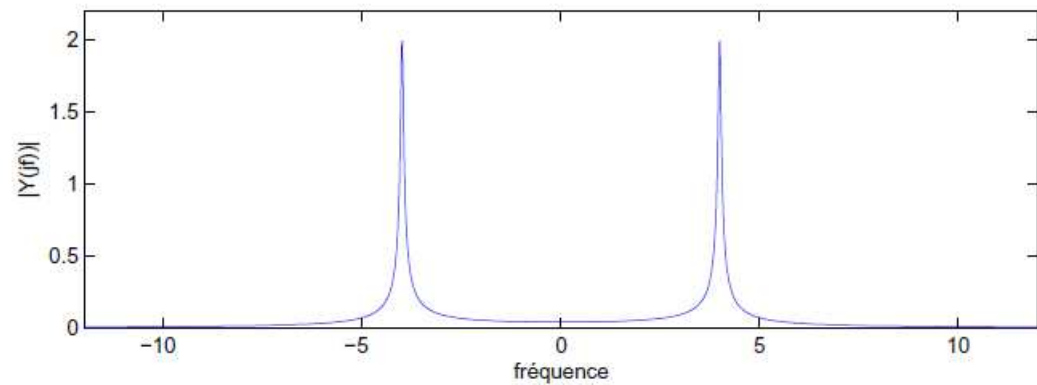
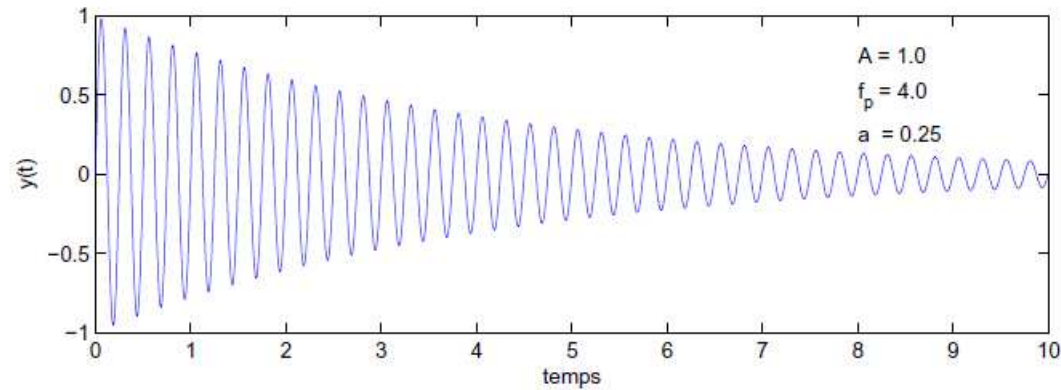
$$\begin{aligned} Y(j \cdot f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_0^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_p \cdot t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_0^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_p \cdot t} - e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_p \cdot t}}{2 \cdot j} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt \end{aligned}$$

$$Y(j \cdot f) = A \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot f_p}{(a + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^2 + (2 \cdot \pi \cdot f_p)^2} \in \mathcal{C}$$

$$f = 0 \quad : \quad Y(0) = A \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot f_p}{a^2 + (2 \cdot \pi \cdot f_p)^2} \approx \frac{A}{2 \cdot \pi \cdot f_p} \quad \text{si } a \ll 2 \cdot \pi \cdot f_p$$

$$f = f_p \quad : \quad Y(j \cdot f_p) = \frac{A}{a} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot f_p}{a + j \cdot 4 \cdot \pi \cdot f_p} \approx \frac{A}{j \cdot 2 \cdot a} \quad \text{si } a \ll 2 \cdot \pi \cdot f_p$$

## Exemple d'un sinus amorti



f\_figtf\_4.eps

$$Y(j \cdot f) = A \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot f_p}{(a + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^2 + (2 \cdot \pi \cdot f_p)^2} \in \mathcal{C}$$

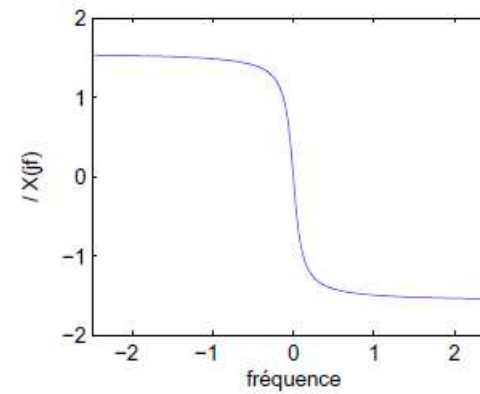
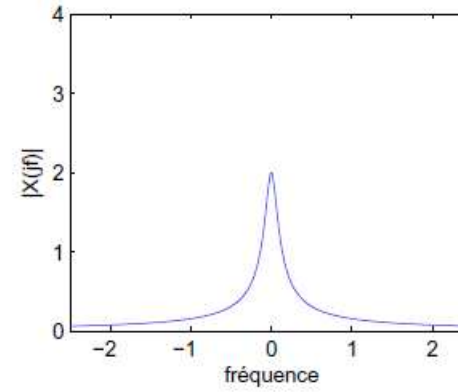
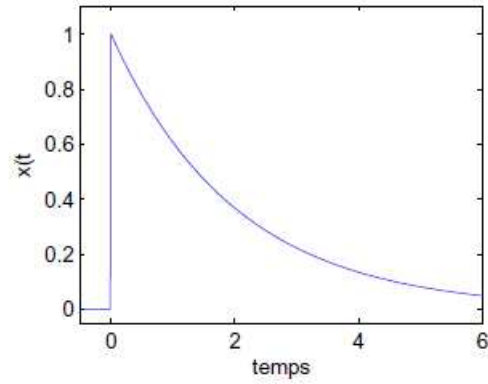
## Exemple d'une exponentielle décroissante

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-a \cdot t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$X(j \cdot f) = \int_0^{+\infty} e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt$$

$$X(j \cdot f) = \frac{1}{a + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}$$

## Exemple d'une exponentielle décroissante



f\_fig3\_1.eps

$$X(j \cdot f) = \frac{1}{a + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}$$



## Autres exemples de transformées de Fourier

### Impulsion $\delta(t)$

$$\text{Soit } TF(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \delta(t) dt$$

$$\text{Selon la définition que } \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t) dt = x(0) = e^{-j\omega(0)} = 1$$

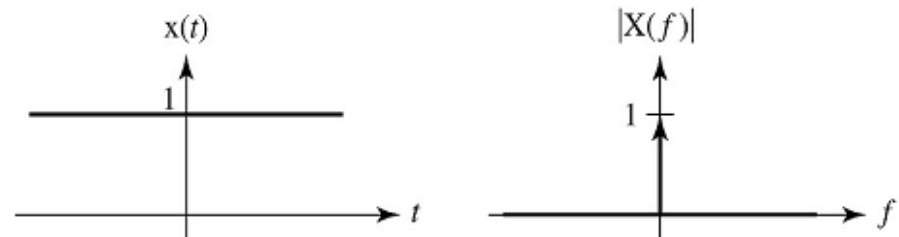
$$\text{Donc } \delta(t) \text{ TF } \rightarrow 1$$

### Impulsion fréquentielle $\delta(\omega)$

$$\text{Soit } TF^{-1}(\delta(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \delta(\omega) d\omega$$

$$\text{Selon la définition que } \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) \delta(\omega) d\omega = x(0) = e^{-j(0)t} = 1$$

$$\text{Donc } \delta(\omega) \text{ TF } \rightarrow \frac{1}{2\pi}$$



## Décalage dans le temps

$$\begin{aligned}\text{Si} \quad x(t) &\Rightarrow X(\omega) \\ x(t - t_0) &\Rightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)\end{aligned}$$

Preuve :

$$\text{TF}(x(t - t_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

En effectuant un changement de variable  $\lambda = t - t_0$ ,  $d\lambda = dt$  et  $t = \lambda + t_0$

$$\text{TF}(x(t - t_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{-j\omega(\lambda + t_0)} d\lambda = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{-j\omega \lambda} d\lambda = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

$$\text{Donc} \quad x(t - t_0) \quad \text{TF} \Rightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

## Décalage dans le domaine des fréquences

$$\begin{aligned}\text{Si} \quad x(t) &\Rightarrow X(\omega) \\ x(t) e^{-j\omega_0 t} &\Rightarrow X(\omega - \omega_0)\end{aligned}$$

Preuve :

$$\text{TF}^{-1}(X(\omega - \omega_0)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega$$

En effectuant un changement de variable  $\lambda = \omega - \omega_0$ ,  $d\lambda = d\omega$  et  $\omega = \lambda + \omega_0$

$$\text{TF}(x(t - t_0)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda) e^{j(\lambda + \omega_0)t} d\lambda = e^{j\omega_0 t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda) e^{j\lambda t} d\lambda = e^{j\omega_0 t} x(t)$$

$$\text{Donc} \quad e^{j\omega_0 t} x(t) \quad \text{TF} \Rightarrow X(\omega - \omega_0)$$

## Changement d'échelle dans le domaine temporel.

Un signal peut également subir une compression ou une extension dans le temps et il serait intéressant de savoir ce que cela implique dans le domaine fréquentiel.

$$\text{Si } x(t) \Rightarrow X(\omega)$$

$$x(at) \Rightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

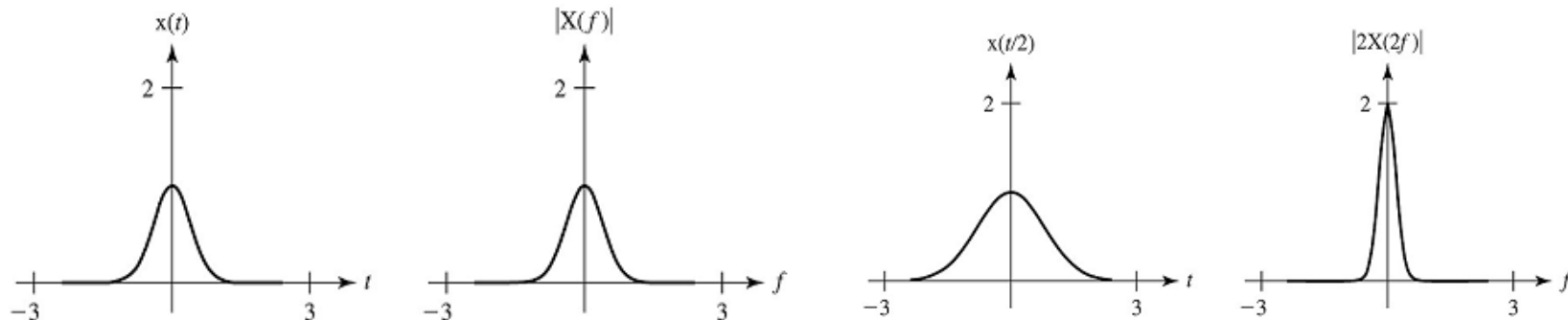
Preuve :

$$\text{TF}(x(at)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$$

En effectuant un changement de variable  $\lambda = at$ ,  $d\lambda = a dt$  et  $t = \frac{\lambda}{a}$

$$\text{TF}(x(at)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{-j\omega \frac{\lambda}{a}} \frac{d\lambda}{a} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{-j\frac{\omega}{a}\lambda} d\lambda = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{-j\omega \lambda} d\lambda = \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$\text{Donc } x(at) \text{ TF} \Rightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



*Fonctions de corrélation temporelles,  
densités spectrales d'énergie et de  
puissance, applications*

## Corrélation

Qu'est ce que la corrélation ?

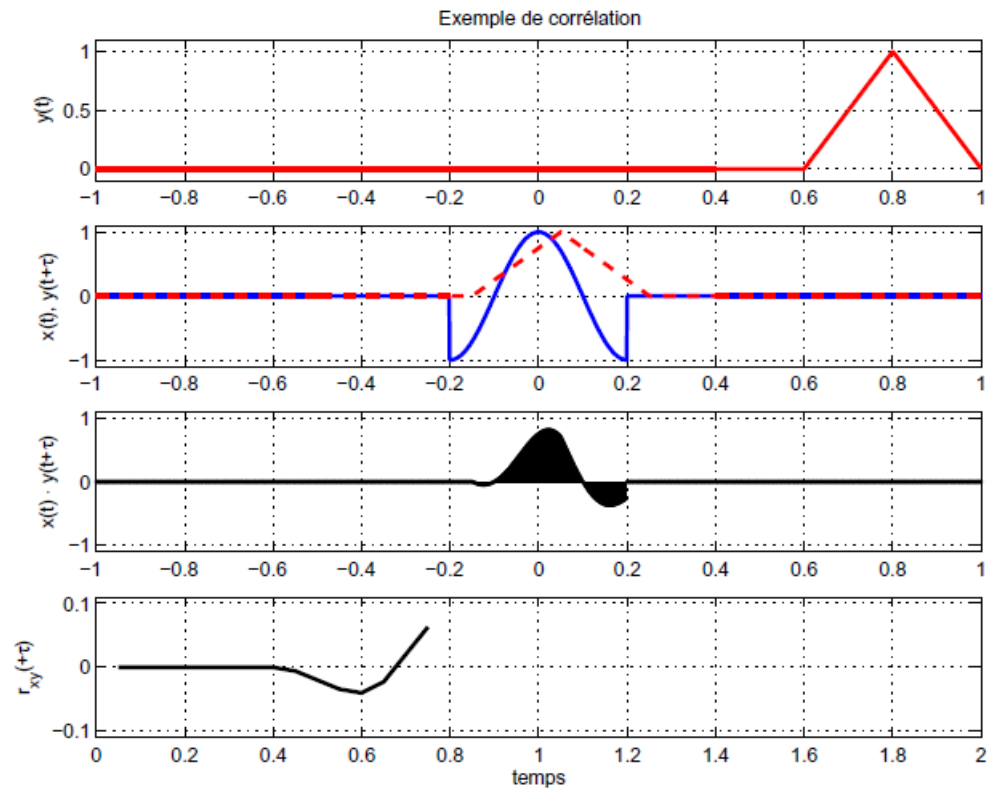
Comparaison de deux signaux entre eux

Cette fonction agit principalement dans le domaine temporel

On s'intéresse à des signaux d'énergie finie (support temporel fini)

Ou aux signaux à puissance moyenne finie

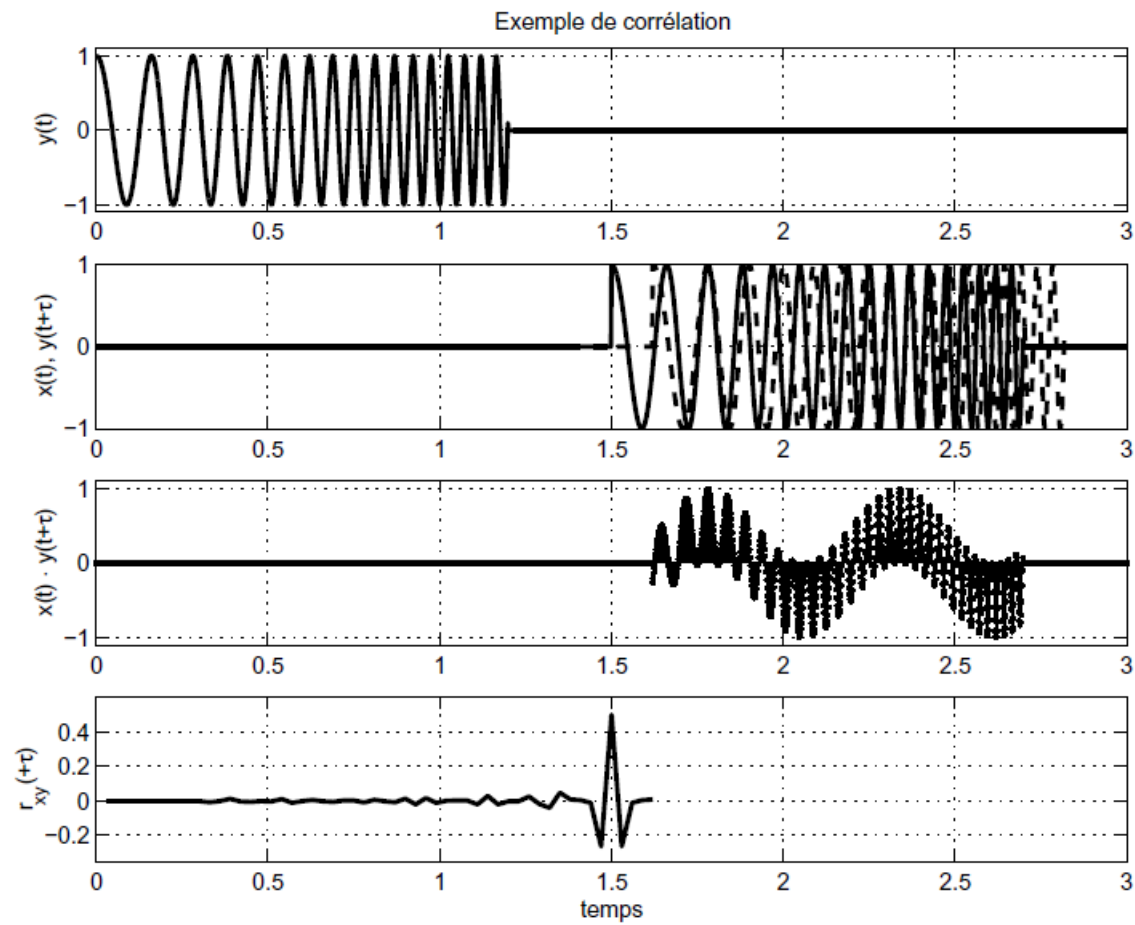
# Corrélation de signaux a énergie finie



f\_democorrelb\_15\_1.eps

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) \cdot dt$$

## Corrélation de signaux a énergie finie



$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) \cdot dt$$

## Corrélation de signaux à énergie finie

### Auto corrélation

- **Modélisation.** Dans le cas d'un unique signal  $x(t)$ , sa fonction d'autocorrélation est définie comme

$$C_{xx}(\tau) = \int x(t)x^*(t - \tau)dt, \quad (14.1)$$

où  $\tau \in \mathbb{R}$ . Le paramètre  $\tau$  est un retard. La corrélation mesure donc une ressemblance de forme entre  $x(t)$  et  $x^*(t - \tau)$ . La variable  $\tau$  correspond à un retard. Pour tout signal  $x(t)$  d'énergie finie  $E_x$ , la fonction d'autocorrélation est maximale en 0 (sa valeur en 0 s'identifiant à l'énergie du signal)

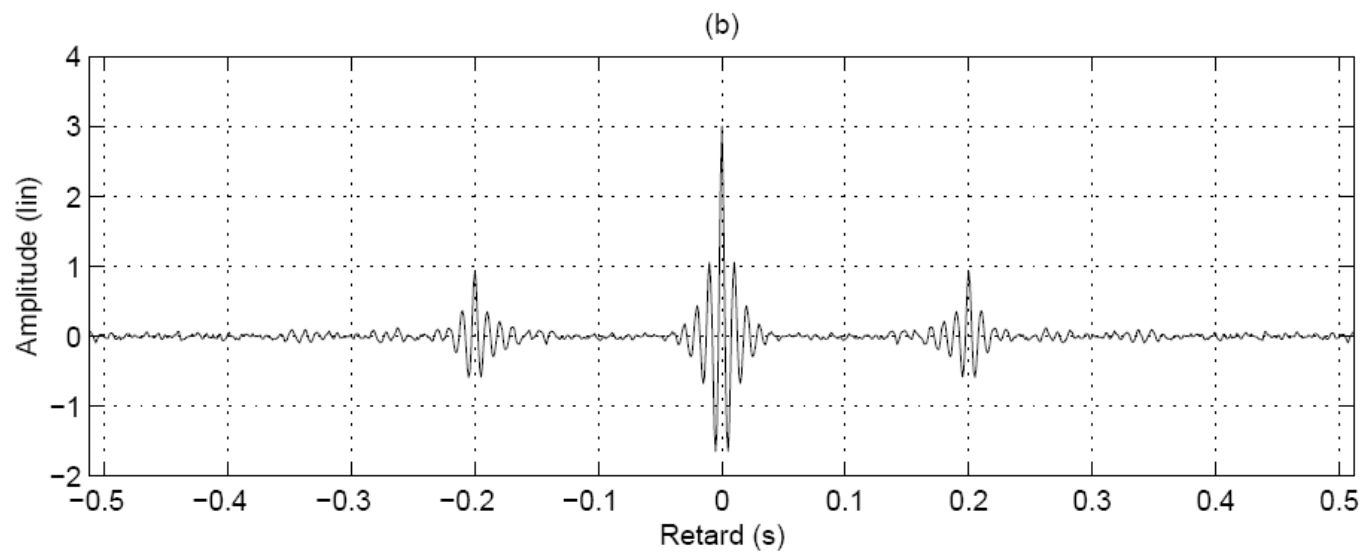
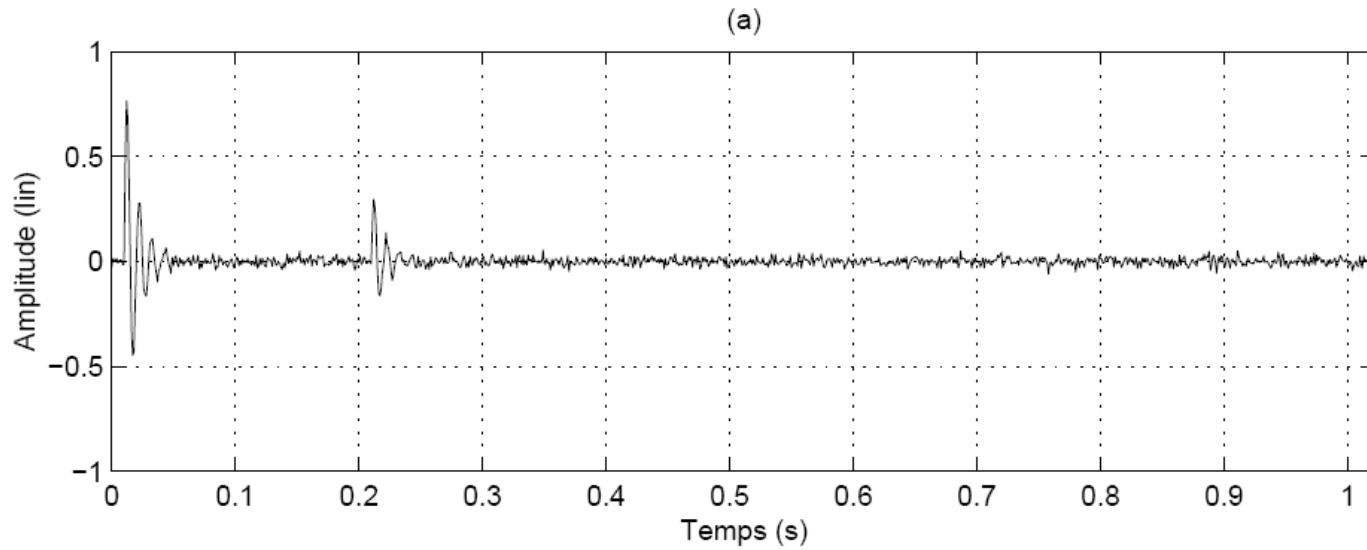
$$C_{xx}(0) = E_x \geq C_{xx}(\tau), \quad (14.2)$$

où  $\tau \in \mathbb{R}$ , et est une fonction paire :

$$C_{xx}(-\tau) = C_{xx}(\tau), \quad (14.3)$$



Exemple : signal temporel bruité composé d'un trajet direct et de son écho (a)  
Fonction d'autocorrélation en b



## Corrélation de signaux à énergie finie

### Théorème de Wiener - Khintchine

Défini la valeur de la T.F. de la fonction d'intercorrélation ou d'autocorrélation de 2 signaux

$$\begin{aligned} T.F. [C_{sr}(\tau)] &= T.F. [s(\tau) * r^*(-\tau)] \\ &= T.F. [s(\tau)] \cdot T.F. [r^*(-\tau)] \\ T.F. [r^*(-\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} r^*(-\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} r^*(t) e^{2\pi j f t} dt \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} r(t) e^{-2\pi j f t} dt \right]^* = R^*(f) \end{aligned}$$

$$T.F. [C_{sr}(\tau)] = S(f) \cdot R^*(f)$$

Si les deux signaux sont identiques, on a alors

$$[C_{rr}(\tau)] = R(f) \cdot R^*(f) = |R(f)|^2 = S_{rr}(f)$$

On obtient le module du spectre au carré: densité spectrale d'énergie

**Théorème de Wiener - Khintchine :**

La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation d'un signal est égale à sa densité spectrale d'énergie

## Corrélation de signaux à puissance moyenne fine

### Intercorrélation

$$r_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y(t + \tau) \cdot dt$$

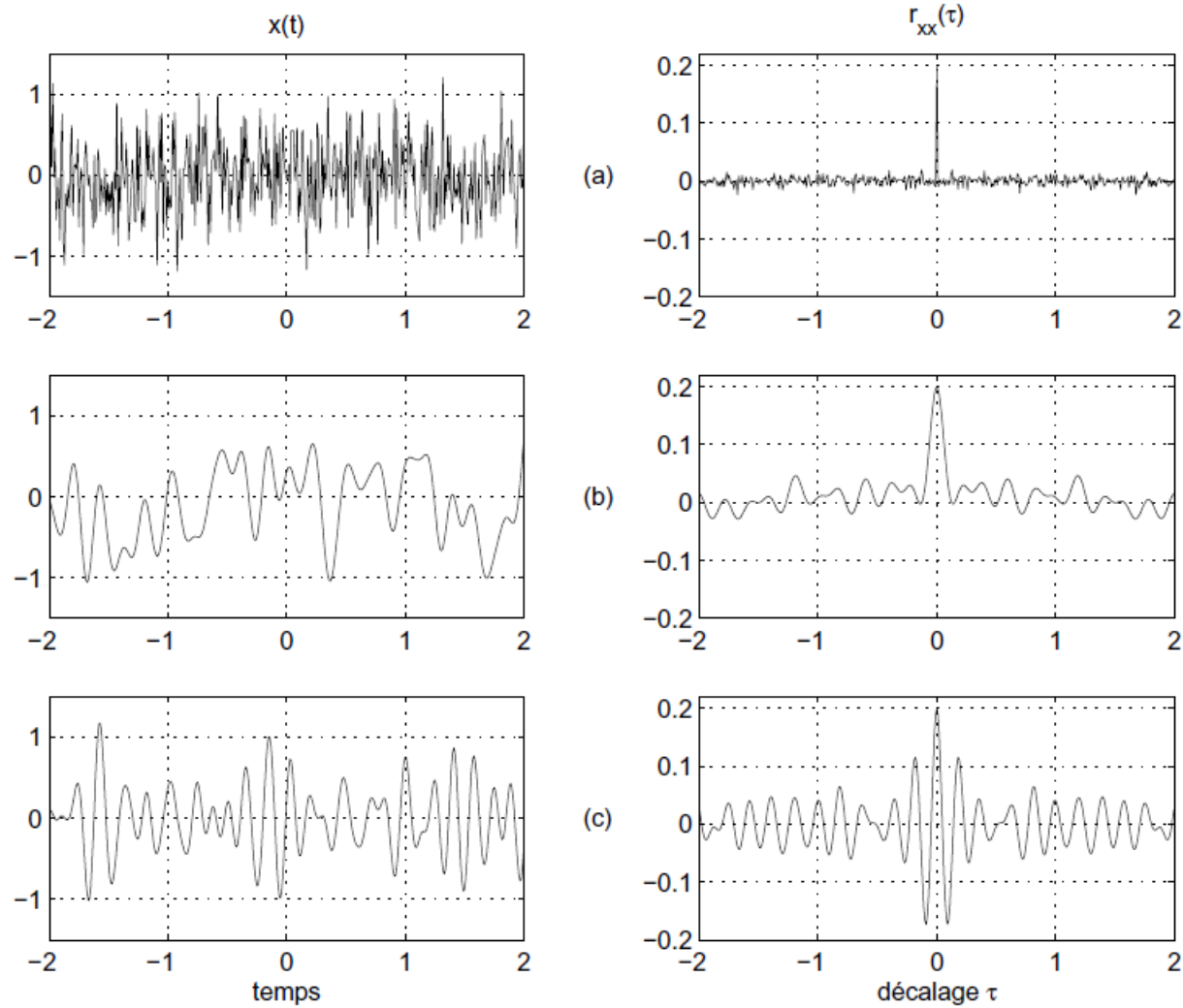
### Autocorrélation

$$r_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x(t + \tau) \cdot dt$$

Pout  $\tau = 0$  [s]

$$r_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)^2 \cdot dt = X_{\text{eff}}^2 = P_x$$

# Corrélation de signaux à puissance moyenne fine



## Propriétés de l'autocorrélation

### Borne supérieure de $r_{xx}(\tau)$

$$r_{xx}(0) \geq r_{xx}(\tau)$$

### $r_{xx}(\tau)$ une fonction paire

$$r_{xx}(\tau) = r_{xx}(-\tau)$$

**Bruit blanc** La valeur présente de  $x(t)$  est indépendante des valeurs passées  
→  $r_{xx}(\tau)$  non nulle uniquement pour  $\tau = 0$  :

$$r_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 \cdot \delta(t)$$

$\sigma^2$  est la variance du signal aléatoire = puissance du signal

## Propriétés de l'autocorrélation

**Signal périodique** La fac d'une fonction périodique est une fonction périodique **paire**

Exemple :  $x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$

$$\begin{aligned} r_{xx}(\tau) &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x(t + \tau) \cdot dt \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \sin(\omega \cdot t + \alpha) \cdot \sin(\omega \cdot (t + \tau) + \alpha) \cdot dt \end{aligned}$$

d'où :

$$r_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cdot \cos(\omega \cdot \tau)$$

L'amplitude de cette  $r_{xx}(\tau)$  est la puissance  $\frac{A^2}{2}$  du signal  $x(t)$ , la fac ne nous donne aucune information sur la phase  $\alpha$  du signal

## Propriétés de l'autocorrélation

**Signal  $x(t)$  perturbé par du bruit  $n(t)$   $y(t) = x(t) + n(t)$**

$$\begin{aligned} r_{yy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} (x(t) + n(t)) \cdot (x(t + \tau) + n(t + \tau)) \cdot dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} (x(t) \cdot x(t + \tau) + n(t) \cdot n(t + \tau) + \dots \\ &\quad \dots + x(t) \cdot n(t + \tau) + n(t) \cdot x(t + \tau)) \cdot dt \\ &= r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) + r_{xn}(\tau) + r_{nx}(\tau) \end{aligned}$$

d'où :

$$r_{yy}(\tau) = r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) + r_{xn}(\tau) + r_{nx}(\tau)$$

## Propriétés de l'autocorrélation

**Signal  $x(t)$  perturbé par du bruit  $n(t)$   $y(t) = x(t) + n(t)$**

$$r_{yy}(\tau) = r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) + r_{xn}(\tau) + r_{nx}(\tau)$$

Dans le cas où le signal  $x(t)$  et le bruit  $n(t)$  ne sont **pas corrélés**, on a

$$r_{xn}(\tau) = 0 = r_{nx}(\tau)$$

ce qui donne :

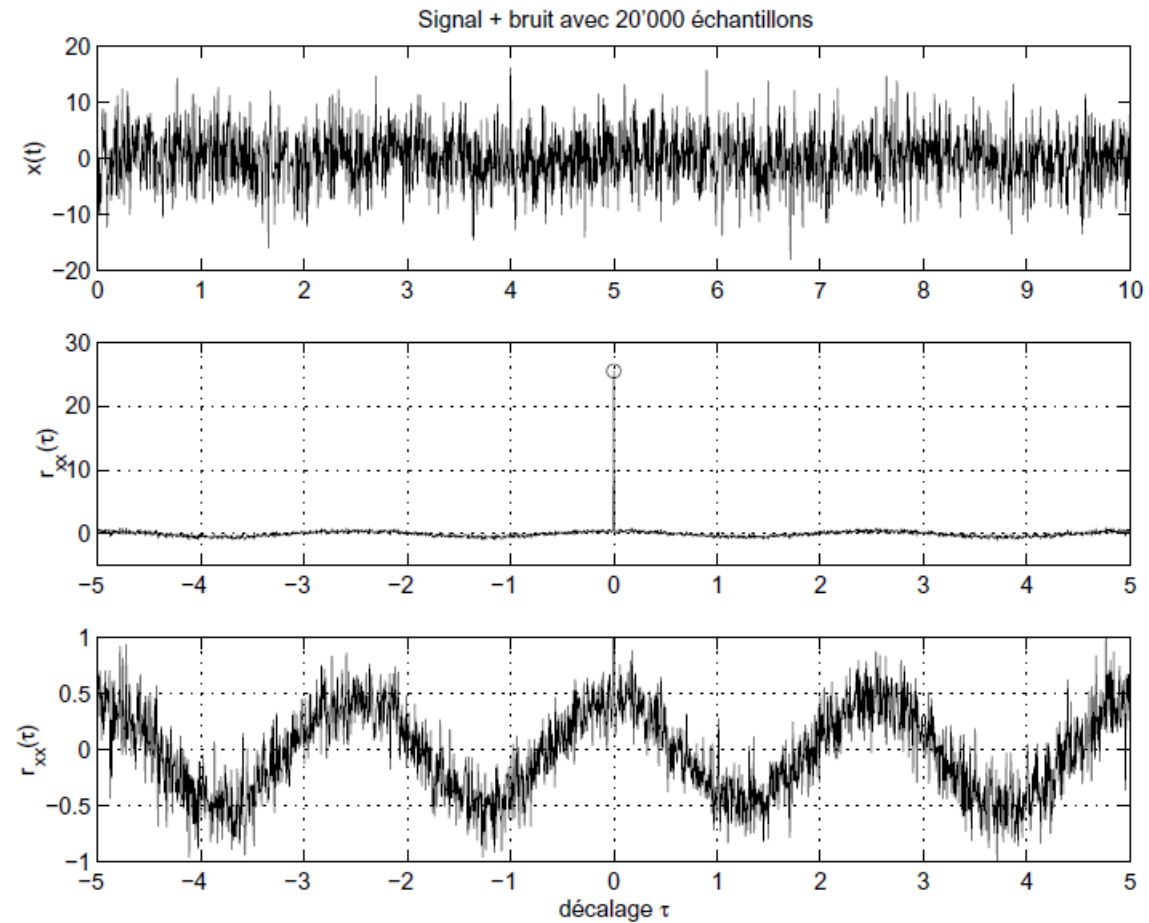
$$r_{yy}(\tau) = r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau)$$

Comme généralement **la fac  $r_{nn}(\tau)$  du bruit tend rapidement vers 0**, on voit que, pour un décalage suffisamment grand, il restera la fac  $r_{xx}(\tau)$  du signal  $x(t)$



## Propriétés de l'autocorrélation

Signal  $x(t)$  perturbé par du bruit  $n(t)$   $y(t) = x(t) + n(t)$



## Propriétés de l'intercorrélation

**Parité, imparité** En général la fic n'est ni paire, ni impaire.

**Borne supérieure** Le maximum de la fic se situe à l'endroit du décalage correspondant au maximum de similitude entre les deux signaux. Cette propriété est très utilisée pour mesurer des temps de propagation

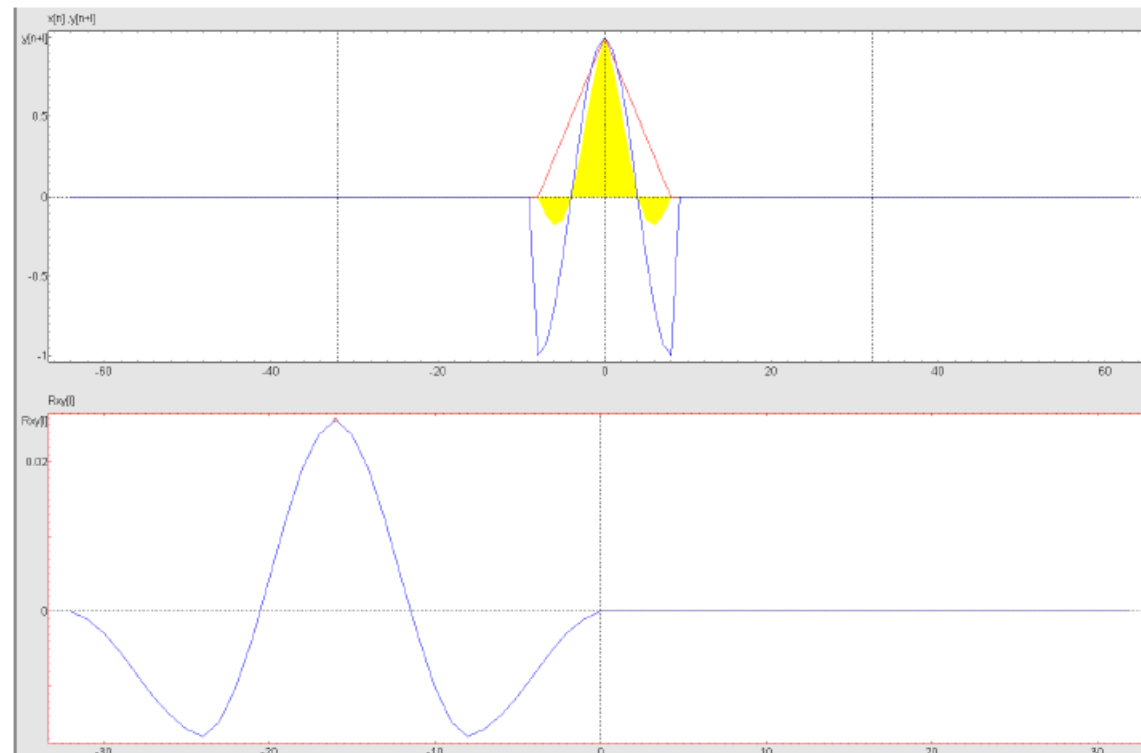
$r_{xy}(\tau)$ ,  $r_{yx}(\tau)$  Comme le fait de retarder ( $\tau < 0$ )  $y(t)$  par rapport à  $x(t)$  d'une valeur  $\tau$  équivaut à avancer ( $\tau > 0$ ) le signal  $x(t)$  par rapport à  $y(t)$  de la même valeur  $\tau$ , on aura :

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau)$$

## Propriétés de l'intercorrélation

$r_{xy}(\tau)$ ,  $r_{yx}(\tau)$  Comme le fait de retarder ( $\tau < 0$ )  $y(t)$  par rapport à  $x(t)$  d'une valeur  $\tau$  équivaut à avancer ( $\tau > 0$ ) le signal  $x(t)$  par rapport à  $y(t)$  de la même valeur  $\tau$ , on aura :

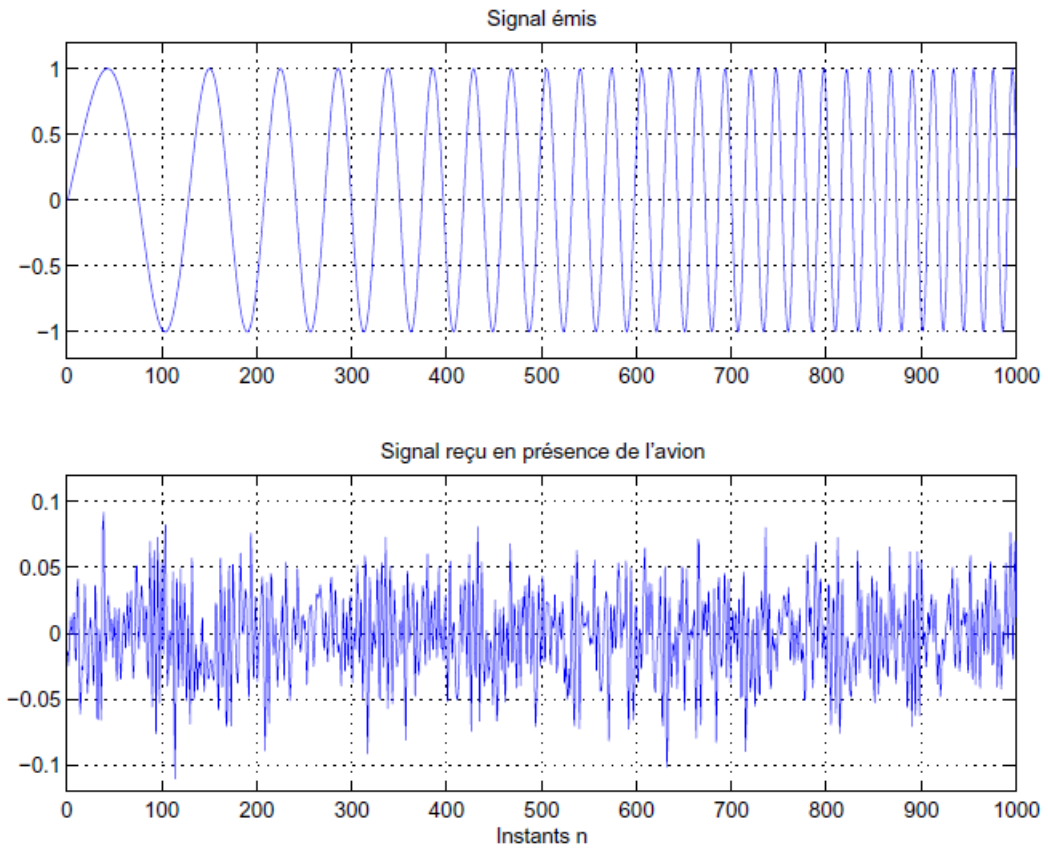
$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau)$$



**Périodicité** Si les deux signaux sont périodiques de même période, la fic sera également périodique

Exemple

Radar



## Exemple

### Radar

$$y(t) = A \cdot x(t - t_d) + n(t)$$

- $A$  = une fonction d'atténuation dépendant de la distance et de la forme de l'avion
- $t_d$  = le temps mis par l'onde pour faire son aller et retour
- $n(t)$  = le bruit additionnel capté par l'antenne et généré par l'électronique du radar

Pratiquement, le signal reçu est tellement perturbé par le bruit qu'une analyse visuelle est incapable de détecter la présence ou l'absence d'un signal réfléchi par l'avion

## Exemple

### Radar

$$y(t) = A \cdot x(t - t_d) + n(t)$$

Calcul de l'intercorrélation entre le signal émis  $x(t)$  et le signal reçu  $y(t)$

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) \cdot dt$$

$r_{xy}(\tau)$  devrait être

- faible si  $x(t)$  et  $y(t)$  ne sont pas corrélés (pas d'avion)
- élevée et maximum en  $\tau = t_d$  si  $x(t)$  et  $y(t)$  sont corrélés ( $\exists$  avion)

## Exemple

### Radar

ins

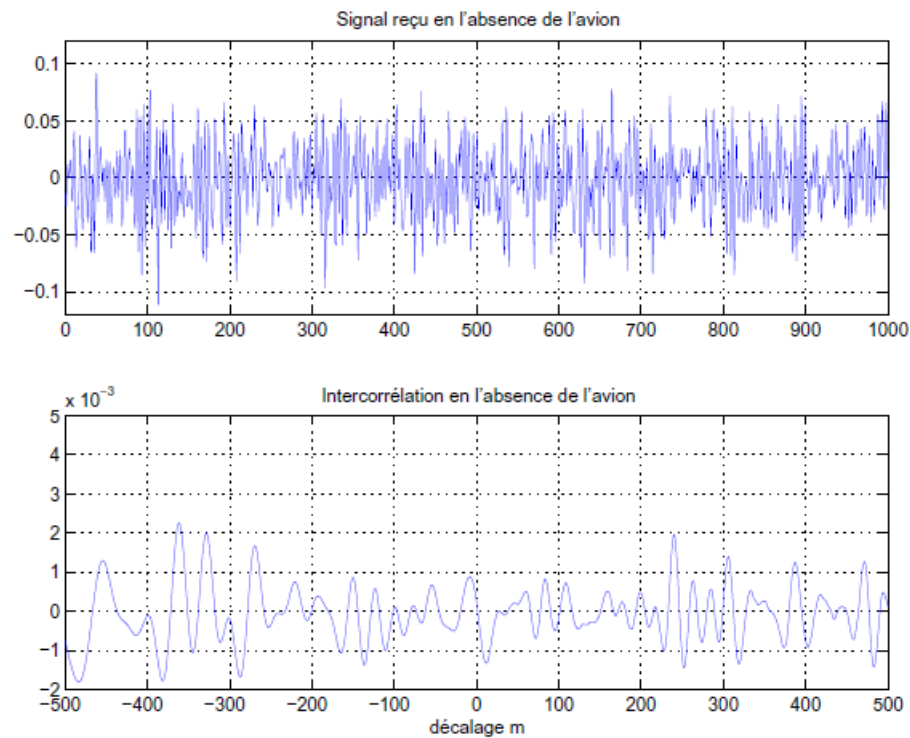
$$y(t) = A \cdot x(t - t_d) + n(t)$$

Calcul de l'intercorrélation entre le signal émis  $x(t)$  et le signal reçu  $y(t)$  :

$$\begin{aligned} r_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot A \cdot [x(t - t_d + \tau) + n(t + \tau)] \cdot dt \\ &= A \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x(t - t_d + \tau) \cdot dt}_{\text{max pour } \tau = t_d} + A \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot n(t + \tau) \cdot dt}_{r_{xn}(\tau) \rightarrow 0} \end{aligned}$$

## Exemple

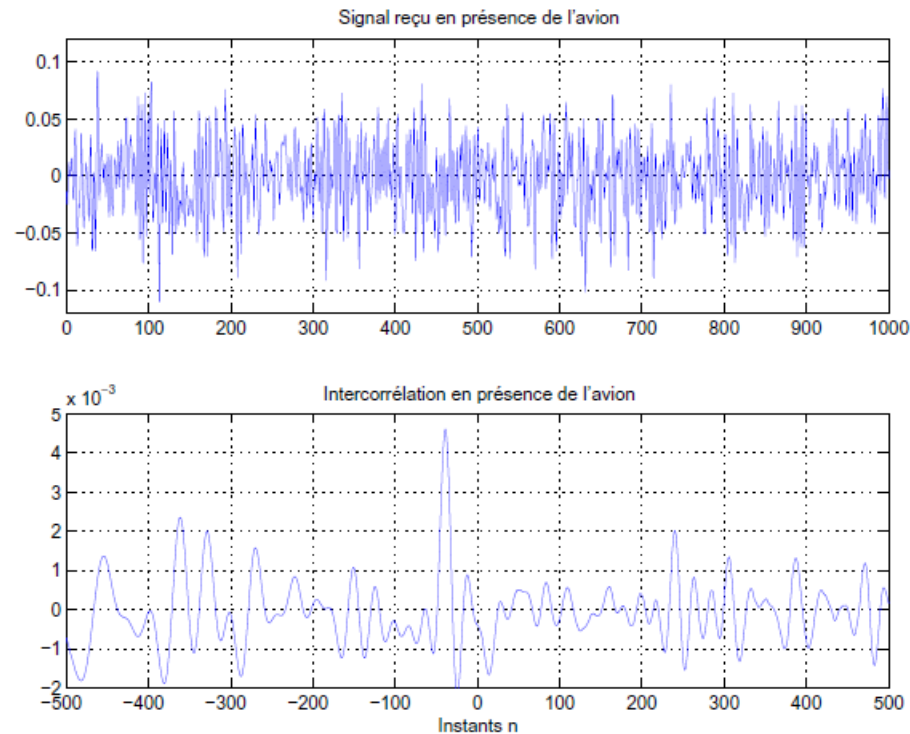
**Radar** Pratiquement, le signal reçu est tellement perturbé par le bruit qu'une analyse visuelle est incapable de détecter la présence ou l'absence d'un signal réfléchi par l'avion





## Exemple

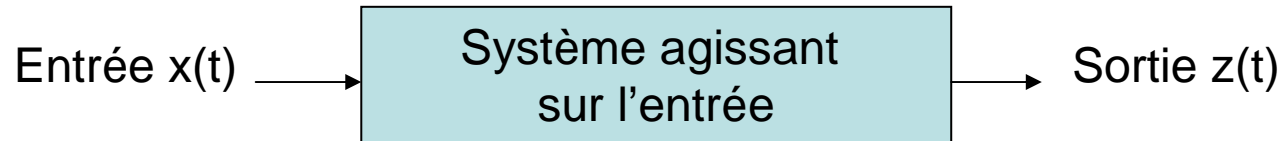
**Radar** Pratiquement, le signal reçu est tellement perturbé par le bruit qu'une analyse visuelle est incapable de détecter la présence ou l'absence d'un signal réfléchi par l'avion



*Interactions des signaux avec les  
systèmes linéaires : convolution, réponse  
impulsionnelle, transmittance  
fréquentielle ; filtrage, déconvolution,  
identification*

# Systeme

Définition: Operateur qui agit sur un signal  $x(t)$  pour donner un autre signal  $y(t)$



Ex: filtres

Différents systemes:

- à memoire : la sortie depend des valeurs anterieur à celle de l'instant  $t$  (systeme physique non entretenu qui emmagasine de l'énergie potentielle: ressort, RLC...)

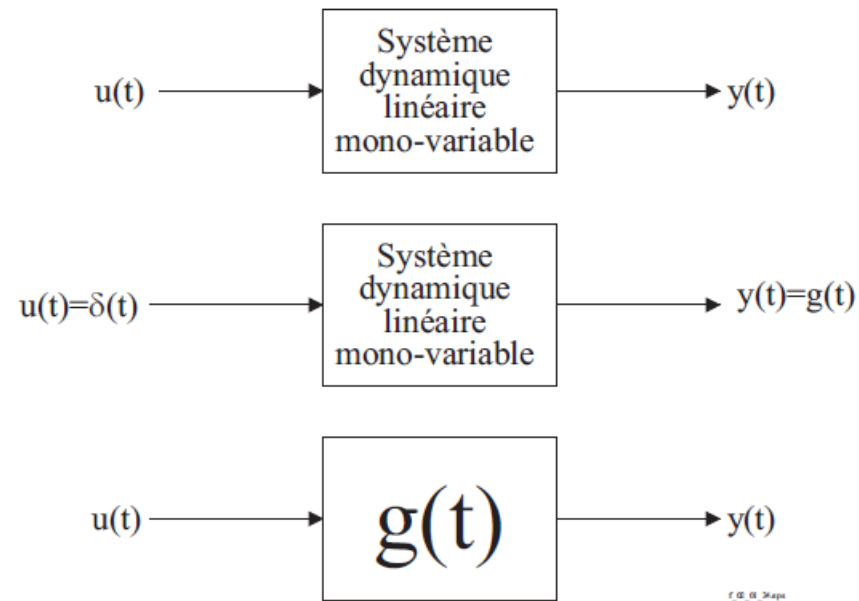
- sans memoire: la sortie ne depend que de la valeur du signal d'entree à l'instant  $t$

Les systemes physiques ne peuvent être influencé par le futur. Ils ne peuvent être anticipatoire ou non casual

# Systeme Linéaire Invariable par translation dans le temps (SLI)

Exemple : filtre décrit par

- sa réponse impulsionnelle  $h(t)$



ou

- sa réponse fréquentielle  $H(j \cdot f)$

## Systeme Linéaire Invariable par translation dans le temps (SLI)

Exemple : filtre décrit par

■ sa réponse impulsionnelle  $h(t)$

ou

■ sa réponse fréquentielle  $H(j \cdot f)$

$\implies$  les signaux d'entrée  $x(t)$  et de sortie  $y(t)$  sont alors reliés par

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) \cdot x(t - \theta) \cdot d\theta$$

$$\boxed{Y(j \cdot f) = H(j \cdot f) \cdot X(j \cdot f)}$$

## Produit de convolution

**Modélisation.** L'opération de convolution entre les signaux temporels à temps continu  $x(t)$  et  $y(t)$  est définie de la façon suivante :  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{(\tau)} x(\tau)y(t - \tau)d\tau = \int_{(\tau)} y(\tau)x(t - \tau)d\tau.$$

« Recette »: pour calculer un produit de convolution, il faut conserver le premier signal, trouver le symétrique du second par rapport à l'axe des ordonnées, décalé ce signal du temps t, multiplier les deux signaux obtenus et finalement intégrer le résultat

Propriétés du produit de convolution:

### Commutativité

Le produit de convolution est commutatif. En effet :

$$h(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

en posant  $t' = t - \tau$  il vient

$$h(t) * g(t) = - \int_{\infty}^{-\infty} h(t - t')g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)h(t - t')dt = g(t) * h(t)$$

De la commutativité, on peut déduire que :

$$h(t) * g(-t) = \int h(\tau)g(\tau - t)d\tau$$

## Linéaire et distributivité

Cette propriété découle de la linéarité de l'intégrale :

$$h(t) * [ag(t) + bg(t)] = ah(t) * g(t) + bh(t) * g(t)$$

## Élément neutre de la convolution

L'élément neutre du produit de convolution est la distribution de Dirac.

$$h(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = h(t)$$



**Exemples.** Associée à la fonction *delta* (ou au Dirac à temps discret), la convolution permet de modéliser des décalages temporels (modélisation basique de phénomènes propagatifs). Ainsi, pour des signaux à temps continu, et pour un décalage temporel  $t_0 \in \mathbb{R}$ , le signal décalé dans le temps  $x(t - t_0)$  peut se modéliser suivant

$$z(t) = x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0), \quad (13.3)$$

où  $t \in \mathbb{R}$ . Si  $t_0 > 0$ ,  $x(t - t_0)$  "arrive" plus tard que  $x(t)$ , comme le montre la figure 13.1.

Pour des signaux à temps discret, le signal temporel décalé de  $n_0 \in \mathbb{Z}$  s'écrit,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,

$$z[n] = x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]. \quad (13.4)$$

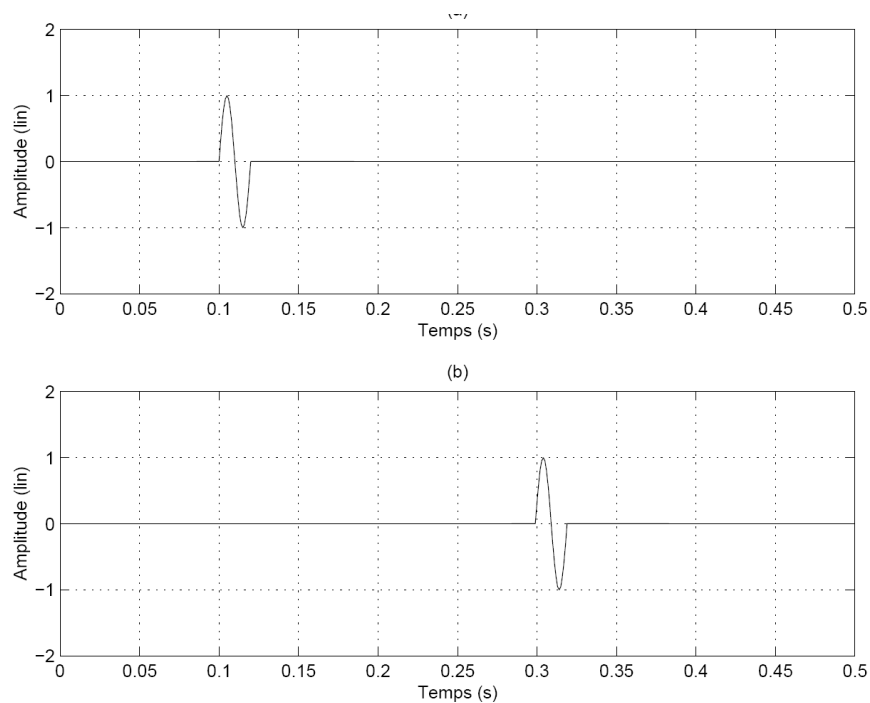


FIG. 13.1 – Propagation d'un signal : (a)  $x(t)$ , (b)  $x(t - t_0)$ .

Attention, la conservation du signal n'est qu'un cas particulier  
Existence d'atténuation, dispersion  
: incompatibilité avec cette modélisation

## T.F. du produit de convolution: Théorème de Plancherel

$$\begin{aligned} T.F.(s(t) * r(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} [s(t) * r(t)] e^{-2\pi jft} dt \\ &= \int \int s(\tau) r(t - \tau) e^{-2\pi jft} dt d\tau \\ &= \int s(\tau) \int r(t - \tau) e^{-2\pi jft} dt d\tau \\ &= \int s(\tau) \int r(t - \tau) e^{-2\pi jf(t-\tau)} dt e^{-2\pi jf\tau} d\tau \\ &= \int s(\tau) e^{-2\pi jf\tau} d\tau \int r(u) e^{-2\pi jfu} du \\ &= S(f).R(f) \end{aligned}$$

Théorème de Plancherel:

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux signaux  $s(t)$  et  $r(t)$  est égale au produit des transformées de Fourier de ces deux signaux

## T.F. du produit de deux signaux

$$\begin{aligned} T.F. [r(t).s(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} r(t)s(t)e^{-2\pi jft} dt \\ &= \int \int R(f)e^{2\pi jft} df s(t)e^{-2\pi jft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R(f) \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-2\pi j(f-f')t} dt df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R(f)S(f-f') df \\ &= R(f) * S(f) \end{aligned}$$

$$\underline{T.F. [r(t)s(t)] = T.F. [r(t)] * T.F. [s(t)]}$$

La transformée de Fourier du produit de deux signaux  $s(t)$  et  $r(t)$  est égale au produit de convolution des transformées de Fourier de ces deux signaux

## *Fenêtrage des signaux*

- **Éléments de réponse.** S'il est impossible de "rencontrer" un sinus défini comme en équation 4.1 (car il faudrait attendre un temps infini), l'expérience montre que des extraits temporels de sinus sont couramment observés, utilisés, simulés, ... dans de nombreux domaines des sciences expérimentales. Le bon sens consiste alors à modéliser un tel signal au moyen d'une opération (la multiplication) et d'une fenêtre (fonction nulle en dehors de l'intervalle d'observation).
- **Modélisation.** La plus élémentaire des fenêtres est la fenêtre rectangulaire (ou porte rectangulaire - *boxcar* en anglais). Cette fenêtre (ou ce signal) est définie de la façon suivante (figure 12.1)

$$\text{Rect}_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (12.1)$$

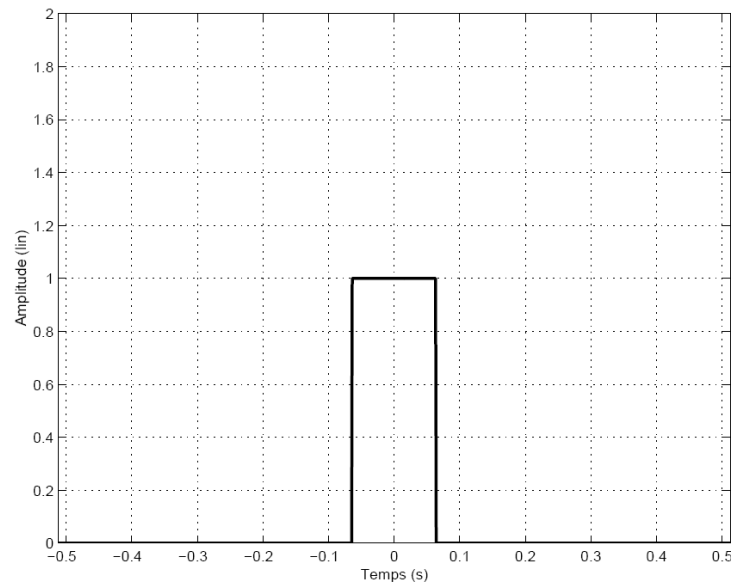
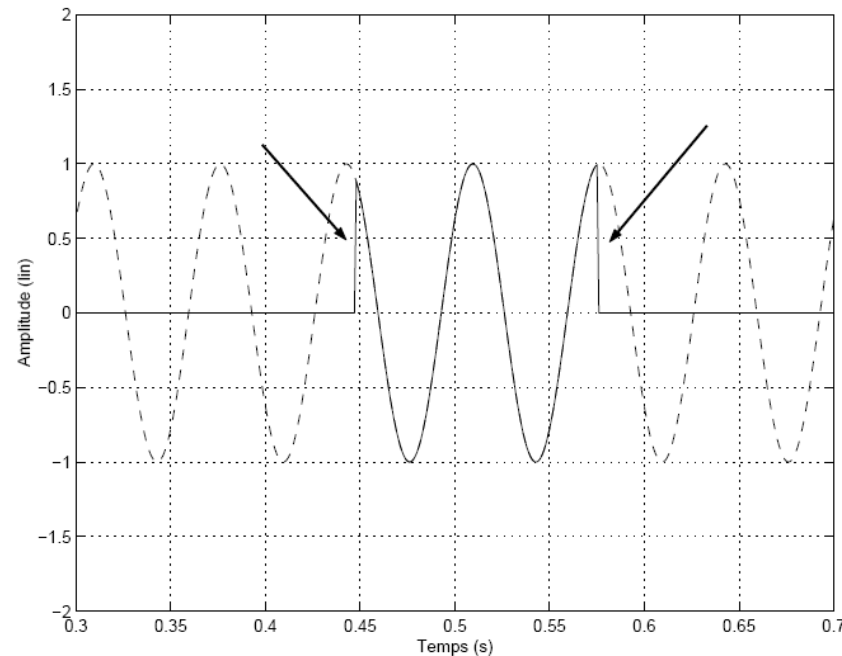


FIG. 12.1 – Fenêtre rectangulaire.

Modéliser une partie de sinus (observé dans un intervalle  $[t_1, t_2]$ ) revient alors à écrire que le signal observé  $x(t)$  vaut

$$x(t) = A_0 \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \cdot \text{Rect}_T(t - t_c), \quad (12.2)$$

où  $t \in \mathbb{R}$ , où  $A_0$ ,  $F_0$  et  $\phi_0$  codent le signal oscillant (équation 4.1), le temps  $t_c$  correspondant au temps central de la fenêtre rectangulaire ( $t_c = \frac{t_1+t_2}{2}$ ). La figure 12.2 montre ainsi un extrait de sinus fenêtré par une telle fenêtre.



**Règles à retenir (1).** Les effets de bord qui apparaissent clairement en figure 1.4 sont délicats à gérer. En effet, on comprend qu'en analysant un signal fenêtré, on analyse le signal (sinus) et la fenêtre (ce qui est toujours le cas, quelque soit la fenêtre, même si on cherche souvent à profiter des "bonnes" propriétés de celle-ci). La discontinuité introduite génère en particulier des hautes fréquences qui vont polluer l'analyse. On préfère alors parfois utiliser des fenêtres dites à bords doux (qui sont nulles sur les extrémités de la fenêtre).

## Exemples d'autre fenêtres

- pour la fenêtre de Hann

$$g(t) = \alpha + (1 - \alpha)\cos(2\pi F_0 t),$$

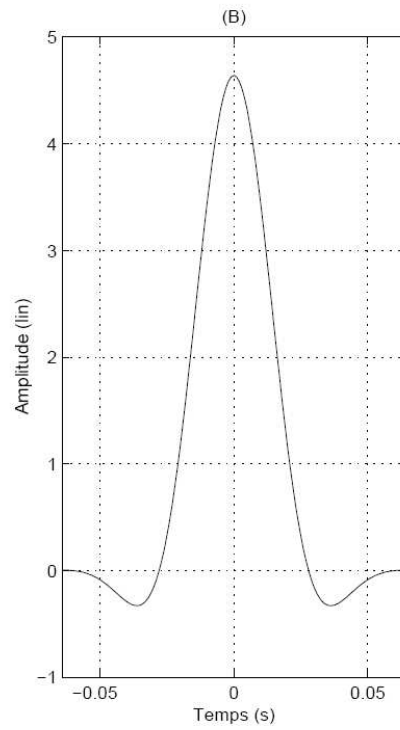
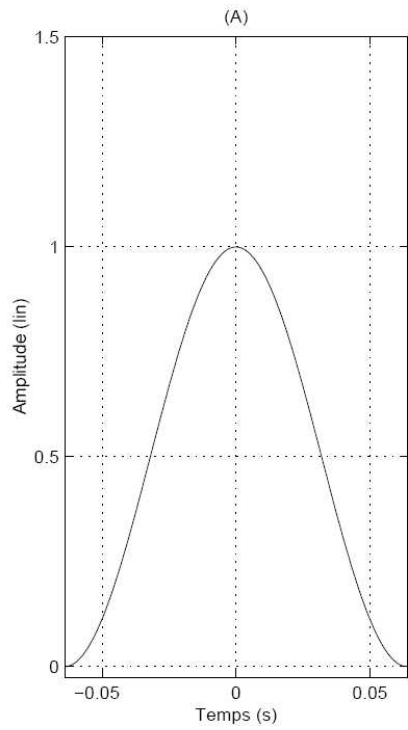
où  $t \in [-\frac{1}{2F_0}, \frac{1}{2F_0}] \equiv [-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ , avec  $\alpha = 0.5$ ; le paramètre  $F_0$  est choisi par l'opérateur et définit le support temporel de la fenêtre,

- pour la fenêtre *Flat Top*

$$g(t) = 1 - 1.93\cos\left(\frac{2\pi(t + \frac{T}{2})}{T}\right) + 1.29\cos\left(\frac{4\pi(t + \frac{T}{2})}{T}\right) - 0.388\cos\left(\frac{6\pi(t + \frac{T}{2})}{T}\right) + 0.0322\cos\left(\frac{8\pi(t + \frac{T}{2})}{T}\right)$$

pour  $t \in [0, T]$ , où  $T$  désigne son support temporel.

**Règles à retenir (2).** La fenêtre rectangulaire est utilisée pour l'analyse des signaux impulsionnels (naturellement fenêtrés). La fenêtre de Hann correspond à un bon compromis entre qualités et défauts des fenêtres. La fenêtre *Flat Top* est utilisée pour estimer les amplitudes des composantes d'un spectre (tout particulièrement lors des phases de calibration des chaînes de mesure).



A – Fenêtre de Hann

B - Fenêtre flap top  $T=0,128$  s

Sinus fenêtré par une fenêtre de Hann non centrée en  $t=0$

