Partie II - Vibrations Chaotiques

O. Richoux

LAUM, UMR CNRS 6613

5 janvier 2016

Introduction

- La théorie des oscillations non-linéaires est basée sur l'hypothèse que la réponse forcée à une source périodique en régime permanent est également périodique (périodes différentes éventuellement : résonance sous-harmonique par exemple).
- **Postulat contesté** par la théorie des vibrations chaotiques.
- Cadre (général) de l'étude des systèmes dynamiques (sous entendu non-linéaires et dissipatifs) dont les applications rejaillissent dans de nombreux domaines de la connaissances :
  - physique (mécanique des fluides, électronique, automatique, ..),
  - chimie,
  - climatologie,
  - science du vivant,
  - économie, ..

Définitions et propriétés de base

- Ensemble de variables d'état

$$\mathbf{X} = \{X_j; j = 1, 2, ..., d\}$$

  - Description de l'état instantané d'un système
  - Représentation de l'état du système à un instant donné par ses coordonnées $\mathbf{X}$
  - Espace appelé "espace des phases" (espace des états),
  - Le nombre de composantes de $\mathbf{X}$, noté d, est appelé la *dimension du système*.

Définitions et propriétés de base

- Ensemble de variables d'état

$$\mathbf{X} = \{X_j; j = 1, 2, ..., d\}$$

- Les systèmes dynamiques
  - Evolution supposée déterministe et non-linéaire,
  - le futur des systèmes considérés dépend de manière spécifique du passé : la connaissance du système à un instant donné t suffit pour analyser son évolution au-delà,
  - Etat initial connu complètement + règle de calcul $\rightarrow$ Etat final **unique**.

Définitions et propriétés de base

- L'évolution temporelle de ce système de dimension d caractérisée par
  - un système de d équations différentielles non-linéaires d'ordre 1 :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = F(\mathbf{X}, t),$$

  - Appelé *flot* :
    - Autonome : F ne dépend pas explicitement du temps, mais seulement de $\mathbf{X}$,
    - Non-autonome : cas contraire.

Définitions et propriétés de base

- Connaissance d'une condition initiale $\mathbf{X_0} = \mathbf{X}(t_0)$ et des équations d'évolutions
  - $\rightarrow$ Une solution $\mathbf{X}(t, \mathbf{X_0})$ représentée par une trajectoire dans l'espace des phases ("trajectoire des phases"),
  - $\rightarrow$ Un ensemble de trajectoires de phase constitue un "portrait de phase"

Définitions et propriétés de base

- Connaissance d'une condition initiale $\mathbf{X_0} = \mathbf{X}(t_0)$ et des équations d'évolutions
  - $\rightarrow$ Une solution $\mathbf{X}(t, \mathbf{X_0})$ représentée par une trajectoire dans l'espace des phases ("trajectoire des phases"),
  - $\rightarrow$ Un ensemble de trajectoires de phase constitue un "portrait de phase"
- Dans d'autres cas on pourra avoir affaire à un système dynamique *à temps discret* (au contraire du *temps continu*) ; la règle d'évolution est alors une itération (relation de récurrence) :

$$\mathbf{X_{k+1}} = G(\mathbf{X_k}, k).$$

Définitions et propriétés de base

- Dans d'autres cas on pourra avoir affaire à un système dynamique *à temps discret* (au contraire du *temps continu*) ; la règle d'évolution est alors une itération (relation de récurrence) :

$$\mathbf{X_{k+1}} = G(\mathbf{X_k}, k).$$

- Exemple de l'application dite "application logistique" ($d = 1$)

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n).$$

Remarque : étudier les comportements sur des temps longs ($k \to +\infty$) : étude de l'état final, du régime permanent, des attracteurs des portraits de phase (cycles limites, points fixes). Les états finaux envisagés ne sont plus exclusivement des positions d'équilibres ou des régimes périodiques.

Définitions et propriétés de base

- Exemples :
  - le modèle de Lorentz (1963)

$$\begin{cases} dX/dt = Pr.(Y - X) \\ dY/dt = -XY + rX - Y \\ dZ/dt = XY - bZ, \end{cases}$$

  - oscillateur à 1 degré de liberté en oscillations libres ($d = 2$) et forcée ($d = 3$),
  - système différentiel d'ordre n autonome ou non.

Étude d'un système dynamique

- Essentiel pour la connaissance du système : nature du **régime permanent** qui s'installe dans des conditions données.

Étude d'un système dynamique

- Essentiel pour la connaissance du système : nature du **régime permanent** qui s'installe dans des conditions données.
- La mémoire des **conditions initiales effacée** (trajectoire particulière).

Étude d'un système dynamique

- Essentiel pour la connaissance du système : nature du **régime permanent** qui s'installe dans des conditions données.
- La mémoire des **conditions initiales effacée** (trajectoire particulière).
- Régime permanent : régime asymptotique atteint longtemps après **extinction du transitoire**.

Étude d'un système dynamique

- Essentiel pour la connaissance du système : nature du **régime permanent** qui s'installe dans des conditions données.
- La mémoire des **conditions initiales effacée** (trajectoire particulière).
- Régime permanent : régime asymptotique atteint longtemps après **extinction du transitoire**.

But : Rendre compte des caractéristiques du régime permanent en fonction des conditions initiales.

Stabilité

- Essentiel : nature du régime permanent avec des conditions données (mémoire des conditions initiales associées à une trajectoire particulière effacée).

Stabilité

- Essentiel : nature du régime permanent avec des conditions données (mémoire des conditions initiales associées à une trajectoire particulière effacée).
- Régime permanent ; Régime asymptotique atteint longtemps après extinction du transitoire.

Stabilité

- Essentiel : nature du régime permanent avec des conditions données (mémoire des conditions initiales associées à une trajectoire particulière effacée).
- Régime permanent ; Régime asymptotique atteint longtemps après extinction du transitoire.
- Rendre compte de ses caractéristiques en fonction des conditions initiales.

Stabilité

- Essentiel : nature du régime permanent avec des conditions données (mémoire des conditions initiales associées à une trajectoire particulière effacée).
- Régime permanent ; Régime asymptotique atteint longtemps après extinction du transitoire.
- Rendre compte de ses caractéristiques en fonction des conditions initiales.
- Les régimes permanents les plus simples sont cherchés sous forme de solutions particulières du système de départ. Ces solutions sont couramment appelées **Etats de base**.

Stabilité

- Essentiel : nature du régime permanent avec des conditions données (mémoire des conditions initiales associées à une trajectoire particulière effacée).
- Régime permanent ; Régime asymptotique atteint longtemps après extinction du transitoire.
- Rendre compte de ses caractéristiques en fonction des conditions initiales.
- Les régimes permanents les plus simples sont cherchés sous forme de solutions particulières du système de départ. Ces solutions sont couramment appelées **Etats de base**.
- Pour être observable, un état de base doit être stable, c'est à dire pouvoir résister aux perturbations.

Stabilité

- Essentiel : nature du régime permanent avec des conditions données (mémoire des conditions initiales associées à une trajectoire particulière effacée).
- Régime permanent ; Régime asymptotique atteint longtemps après extinction du transitoire.
- Rendre compte de ses caractéristiques en fonction des conditions initiales.
- Les régimes permanents les plus simples sont cherchés sous forme de solutions particulières du système de départ. Ces solutions sont couramment appelées **Etats de base**.
- Pour être observable, un état de base doit être stable, c'est à dire pouvoir résister aux perturbations.

$\rightarrow$ Etude de la stabilité des solutions (position d'équilibre).

Stabilité

- Essentiel : nature du régime permanent avec des conditions données (mémoire des conditions initiales associées à une trajectoire particulière effacée).
- Régime permanent ; Régime asymptotique atteint longtemps après extinction du transitoire.
- Rendre compte de ses caractéristiques en fonction des conditions initiales.
- Les régimes permanents les plus simples sont cherchés sous forme de solutions particulières du système de départ. Ces solutions sont couramment appelées **Etats de base**.
- Pour être observable, un état de base doit être stable, c'est à dire pouvoir résister aux perturbations.

→ Etude de la stabilité des solutions (position d'équilibre).

- Ceci suppose qu'il puisse, au préalable, être atteint d'un ensemble suffisamment vaste de conditions initiales. Ces deux propriétés sont liées via les notions d'**attracteurs** et de **bassin d'attraction**.

Stabilités locale et globale

Position d'équilibre (ou point singulier) et stabilité

$\mathbf{X_s} = \{X_{sj}; j = 1, 2, ..., d\}$ est un point singulier (ou position d'équilibre) du système dynamique s'il vérifie :

$$\frac{d\mathbf{X_s}}{dt} = F(\mathbf{X_s}) = \mathbf{0}.$$

Par la suite il est supposé que le point singulier étudié est l'origine $\mathbf{X_s} = \mathbf{0}$ (après un changement de variable si nécessaire).

Stabilités locale et globale

- Stabilité de Lyapunov (au sens de Lyapunov)
- Définition :
  Soit le point d'équilibre $\mathbf{X_s} = 0$, si, pour tout λ, aussi petit que l'on veut, on peut trouver un nombre $A > 0$, tel que pour tout point $\mathbf{X_0}$ vérifiant $\sum_j X_{0j}^2 \leq A^2$, entraîne $\sum_j X_j^2(t) \leq \lambda^2$, pour t suffisamment grand.
  $\rightarrow$ Equilibre stable, sinon il est dit instable.
- Si on a, en plus :
  $$\lim_{t\rightarrow\infty}(\sum_j X_j^2(t)) = 0$$
  alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

La stabilité asymptotique est une notion plus restrictive que la stabilité tout court. Tout équilibre asymptotiquement stable est (à fortiori) stable. Mais inversement un équilibre peut être stable sans l'être asymptotiquement.

Stabilités locale et globale

Systèmes linéaires

Soit le système dynamique linéaire de dimension d caractérisé par :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = M\mathbf{X}$$

où M est un matrice carrée d'ordre d.

Théorème : si toute les valeurs propres de la matrice M ont une partie réelle négative, la position d'équilibre est asymptotiquement stable.

Stabilités locale et globale

Systèmes non-linéaires, stabilité locale, stabilité globale

Soit un système dynamique non-linéaire de dimension d caractérisé par

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = F(\mathbf{X}),$$

soit $\mathbf{X} = 0$ un de ses points singuliers, l'équation précédente peut être réécrite de la manière suivante :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = M\mathbf{X} + G(\mathbf{X})$$

où M est la matrice Jacobienne de F en $\mathbf{X} = 0$ définie par

$$M = \{\frac{\partial F_i}{\partial X_j}|_{\mathbf{X}=0}\}.$$

Stabilités locale et globale

Systèmes non-linéaires, stabilité locale, stabilité globale

Premier théorème de Lyapunov (stabilité locale) :

si la matrice M n'a pas de valeur propre à partie réelle nulle, alors on peut utiliser le système linéaire

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = M\mathbf{X}.$$

- Justification de l'approximation des petits mouvements : "linéarisation" d'un système non-linéaire en se limitant à de petits domaines de variation des variables (autrement dit, en assimilant les fonctions non-linéaires des variables au premier terme de leurs développements en série),
- si une des valeurs propres est à partie réelle nulle, le problème est plus complexe, la nature de la stabilité du point d'équilibre dépend des termes d'ordres supérieurs à 1 dans le développement limité en série de Taylor de F en $\mathbf{X} = 0$. On parle alors de cas critique de Lyapunov.

Stabilités locale et globale

Systèmes non-linéaires, stabilité locale, stabilité globale

Deuxième théorème de Lyapunov (stabilité globale dans le domaine G) : s'il est possible de trouver une fonction V définie non nulle positive ou négative dans un domaine G de l'espace des phases comprenant la position d'équilibre et dont la dérivée totale dV/dt par rapport au temps soit définie et de signe opposé dans le même domaine G, alors l'équilibre sera asymptotiquement stable dans ce domaine.

Remarques :

- cette approche est parfois appelée "méthode directe" car il est possible de conclure sur la stabilité ou l'instabilité d'une position d'équilibre sans construire la solution ;
- le problème essentiel de la méthode est qu'il n'existe pas de procédé général de recherche de ces fonctions V ;
- notons que la méthode de Lyapunov n'est pas une condition nécessaire de stabilité mais seulement une condition suffisante.

Notion de bifurcation

Chaque fois que pour une valeur donnée d'un paramètre (appelé paramètre de contrôle) - dite valeur critique - la solution de l'équation ou du système d'équation change qualitativement on dira qu'il y a **bifurcation**.

Le point de l'espace des paramètres où survient un tel évènement est **un point de bifurcation** ;
$\rightarrow$ branches de solution, soit stables, soit instables.
$\rightarrow$ La représentation d'une propriété quelconque, mais caractéristique de la ou des solutions, en fonction du paramètre de bifurcation (ou de contrôle) constitue **un diagramme de bifurcation**.

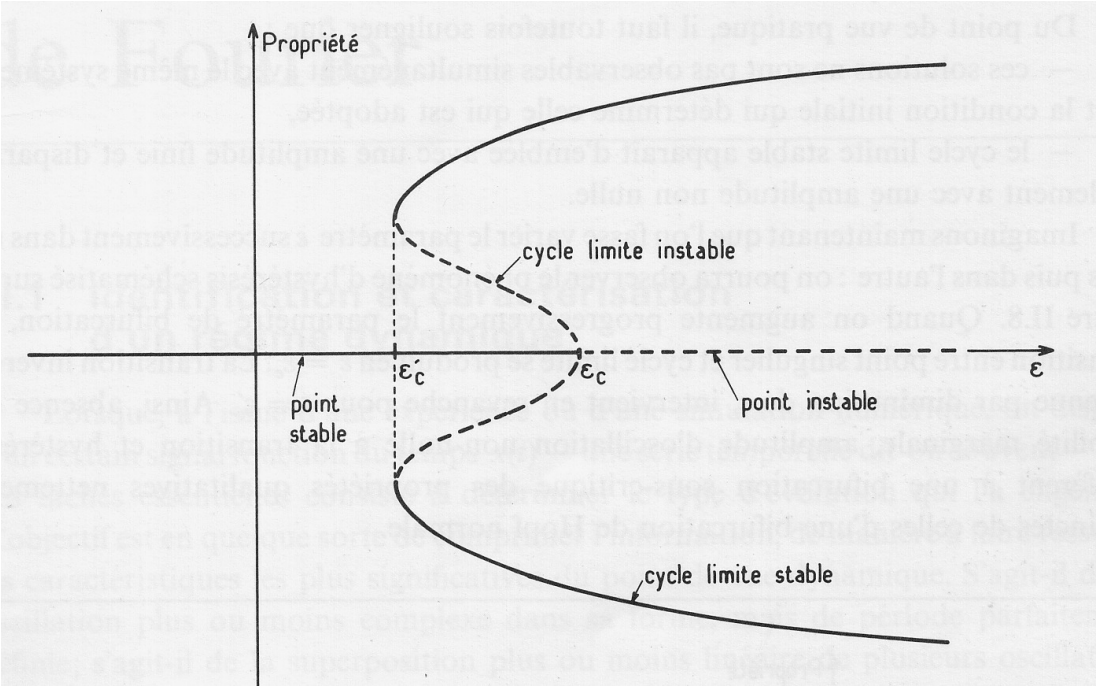
Notion de bifurcation

Bifurcation de Hopf : lorsqu'un point singulier donne naissance à un cycle limite par franchissement d'une valeur critique,
$\Rightarrow$ bifurcation de Hopf.

Bifurcation sur-critique et sous-critique : lorsque le cycle limite naît avec une amplitude nulle et, au point de bifurcation, le système se trouve dans un état de stabilité marginale, la bifurcation est dite **sur-critique (ou super-critique) ou normale**. Par la suite la solution ne subit pas de transformation brutale à la bifurcation, mais se modifie de façon progressive.

Notion de bifurcation

La situation diamètralement opposée conduit à une **bifurcation sous-critique** : c'est l'envers de la bifurcation normale (on parle d'ailleurs de bifurcation inverse). Un point singulier stable devient instable et donne naissance à un cycle limite instable ce qui fait coexister à l'intérieur d'un même domaine deux solutions stables : l'une est stationnaire (point attracteur), l'autre oscillante (cycle limite).



Dynamique générale

Soit un système dynamique à une dimension (une seule variable)

$$\frac{dA}{dt} = F(A)$$

où F est une fonction non-linéaire à une variable A. Soit le potentiel $G(A)$ dérivant de F, défini par

$$G(A) = -\int F(A)dA,$$

l'équation différentielle peut se réécrire sous la forme

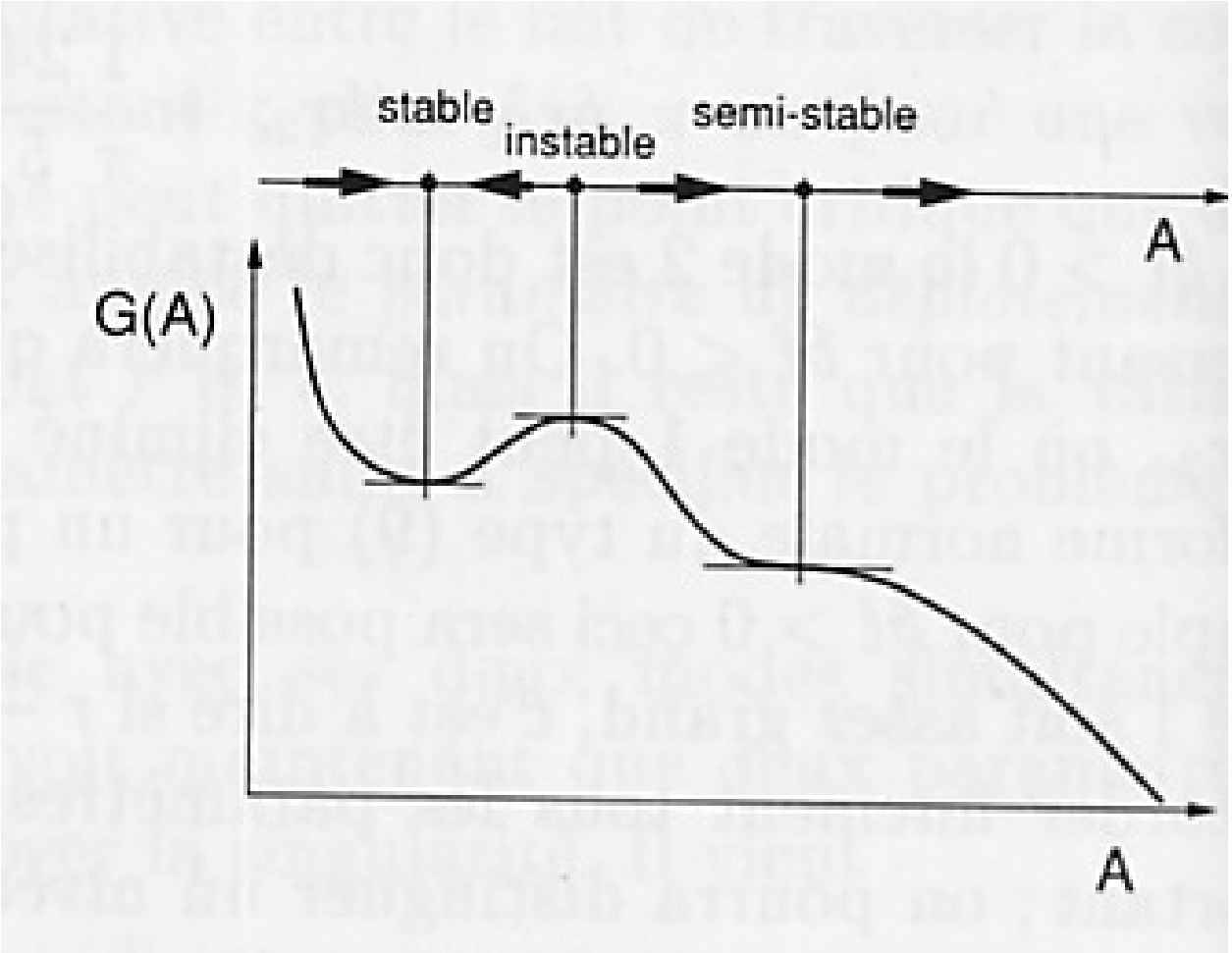
$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\partial G(A)}{\partial A}.$$

Le potentiel ne peut que décroître au cours du temps puisque

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G(A)}{\partial A}\frac{dA}{dt} = -(\frac{dA}{dt})^2 \leq 0.$$

Les point fixes de $F \rightarrow$ points stationnaires de G.

Dynamique générale



Bifurcation normale/inverse

Hypothèse : point fixe à l'origine des phase, perte de stabilité en $r = 0$ (paramètre de contrôle) : stable pour $r < 0$ et instable pour $r > 0$.

$$\frac{dA}{dt} = rA - bA^3.$$

Les points fixes sont donnés par

$$A_f = 0 \text{ et } A_f = \pm\sqrt{r/b}.$$

La bifurcation est dite normale ou super-critique lorsque $b > 0$ car la solution non-triviale existe alors pour $r > 0$, c'est ‡ dire au delà du seuil linéaire. Si $b < 0$, la solution non-triviale existe en dessous du seuil : la bifurcation est dite inverse ou sous-critique.

Bifurcation normale/inverse

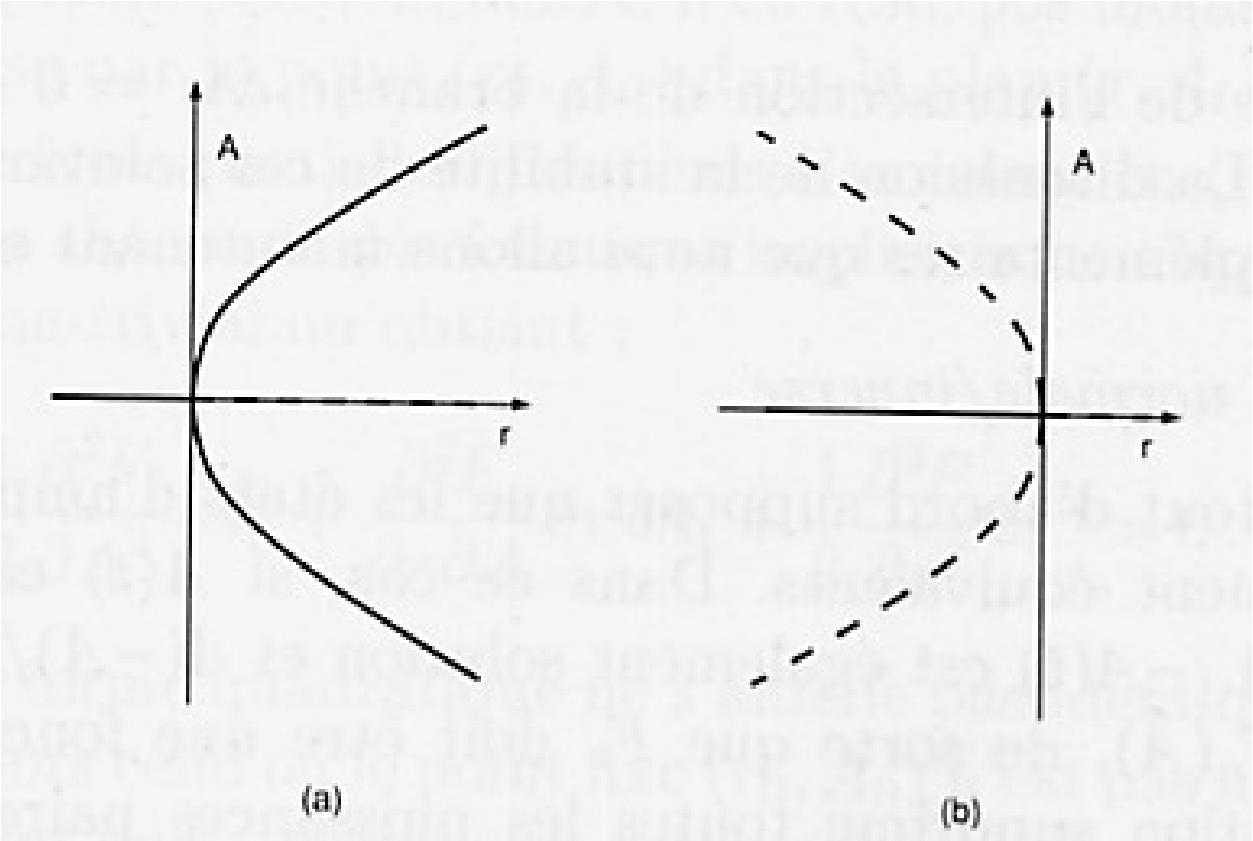
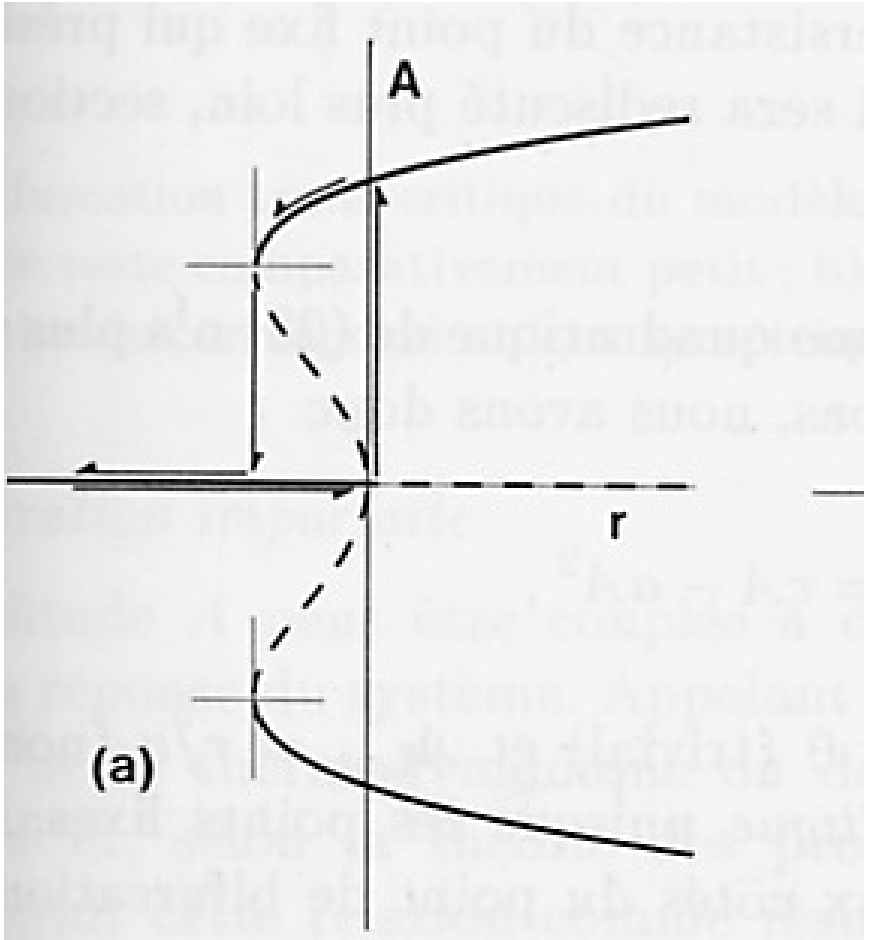


Figure: Bifurcation super-critique (a) et sous-critique (b).

Stabilité conditionnelle, hystérésis, points tournants

$$\frac{dA}{dt} = rA - bA^3 - dA^5 \text{ avec } b < 0 \text{ et } d > 0.$$



Dynamique linéaire (rappel)

Le système dynamique linéaire réel d'ordre 2 le plus général s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = aA_1 + bA_2, \\ \\ \frac{dA_2}{dt} = cA_1 + dA_2. \end{cases}$$

Soient s_1 et s_2 les deux valeurs propres de la matrice carrée (a, b, c, d), solutions de l'équation caractéristique suivante :

$$(s - a)(s - d) - bc = s^2 - (a + d)s + ad - bc = 0.$$

Cette équations a deux racines en général, soient réelles, distinctes ou confondues, soit complexes conjuguées.

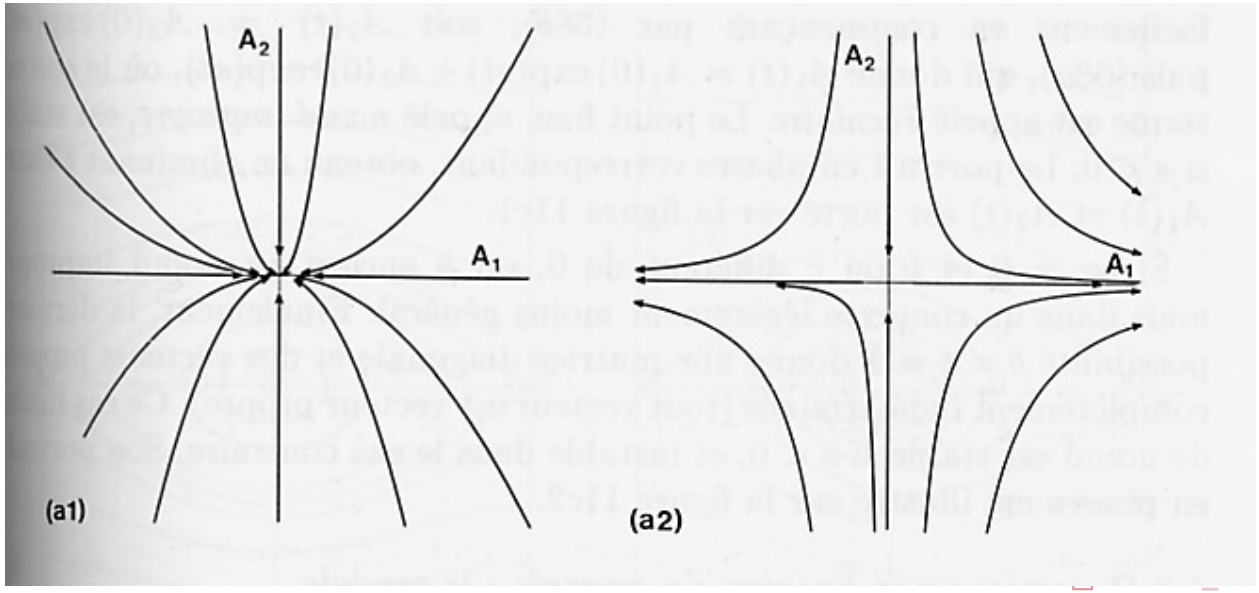
Dynamique linéaire (rappel)

Cas des racines réelles distinctes

Dans la base des vecteurs propres la matrice se met sous la forme diagonale :

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = s_1 A_1, \\ \\ \frac{dA_2}{dt} = s_2 A_2. \end{cases}$$

Le portrait de phase est l'ensemble des trajectoires obtenues en liminant le temps t entre les solutions $A_1(t) = A_1(0)\exp(s_1 t)$ et $A_2(t) = A_2(0)\exp(s_2 t)$ où $A_1(0)$ et $A_2(0)$ sont les conditions initiales.



Dynamique linéaire (rappel)

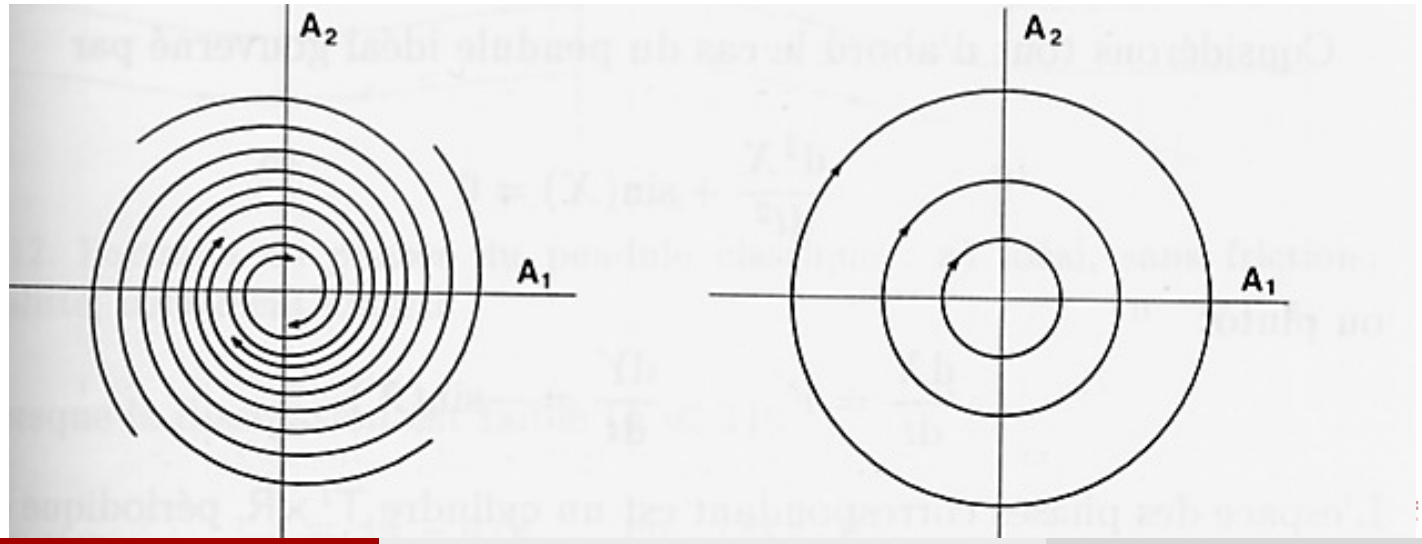
Cas des racines complexes conjuguées

Notons $s = \sigma \pm j\omega$ $\rightarrow$changement de variables

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \sigma A_1 - \omega A_2, \\ \\ \frac{dA_2}{dt} = \omega A_1 + \sigma A_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1(t) = \exp(\sigma t)(A_1(0)\cos(\omega t) - A_2(0)\sin(\omega t)) \\ A_2(t) = \exp(\sigma t)(A_1(0)\sin(\omega t) + A_2(0)\cos(\omega t). \end{cases}$$

Le point fixe est appelé "foyer" (ou point spiral) stable si $\sigma < 0$ et instable si $\sigma > 0$.



Dynamique linéaire (rappel)

Tache essentielle : déterminer le type d'évolution qui a engendré le signal.
Objectif : comprimer l'information pour en faire ressortir les caractéristiques les plus significatives du point de vue dynamique.
Situations simples : solutions périodiques de l'équation d'un oscillateur auto-entretenu (par exemple). La période de base et l'amplitude sont connues.
Autres situations : superposition d'oscillations qui diffèrent par l'amplitude, la période, le taux d'harmoniques, etc. L'attracteur qui leur est associé n'est plus un cycle limite : c'est un tore (régime quasi-périodique).

D'autres régimes sont de nature encore plus difficile à saisir. Etant donné leur apparence complètement désordonnée, on les dit volontiers "chaotiques". Lorsque la dynamique est déterministe l'entité correspondante dans l'espace des phases est un attracteur étrange.

Introduction

- Signal en fonction du temps (expérience ou simulation numérique)
  $\rightarrow$ détermination du type d'évolution qui l'a engendré.
  Objectif : comprimer l'information pour en faire ressortie les caractéristiques les plus significatives du point de vue dynamique.
  S'agit-il d'une oscillation plus ou moins complexe dans la forme mais de période parfaitement définie ? S'agit-il de la superposition plus ou moins linéaire de plusieurs oscillations différentes ? Ou bien d'autre chose encore ?

Introduction

- Signal en fonction du temps (expérience ou simulation numérique)
  $\rightarrow$ détermination du type d'évolution qui l'a engendré.
  Objectif : comprimer l'information pour en faire ressortie les caractéristiques les plus significatives du point de vue dynamique.
  S'agit-il d'une oscillation plus ou moins complexe dans la forme mais de période parfaitement définie ? S'agit-il de la superposition plus ou moins linéaire de plusieurs oscillations différentes ? Ou bien d'autre chose encore ?
- Situations particulièrement simples $\rightarrow$ Solutions périodiques de l'équation d'un oscillateur auto-entretenu (période de base et l'amplitude sont connues).

Introduction

- Signal en fonction du temps (expérience ou simulation numérique)
  $\rightarrow$ détermination du type d'évolution qui l'a engendré.
  Objectif : comprimer l'information pour en faire ressortie les caractéristiques les plus significatives du point de vue dynamique.
  S'agit-il d'une oscillation plus ou moins complexe dans la forme mais de période parfaitement définie ? S'agit-il de la superposition plus ou moins linéaire de plusieurs oscillations différentes ? Ou bien d'autre chose encore ?
- D'autres régimes sont de nature encore plus difficile à saisir. Étant donné leur apparence complètement désordonnée $\rightarrow$ "chaotiques". Lorsque la dynamique est déterministe l'entité correspondante dans l'espace des phases est un attracteur étrange.

Introduction

- Signal en fonction du temps (expérience ou simulation numérique)
  $\rightarrow$ détermination du type d'évolution qui l'a engendré.
  Objectif : comprimer l'information pour en faire ressortie les caractéristiques les plus significatives du point de vue dynamique.
  S'agit-il d'une oscillation plus ou moins complexe dans la forme mais de période parfaitement définie ? S'agit-il de la superposition plus ou moins linéaire de plusieurs oscillations différentes ? Ou bien d'autre chose encore ?
- D'autres régimes sont de nature encore plus difficile à saisir. Étant donné leur apparence complètement désordonnée $\rightarrow$ "chaotiques". Lorsque la dynamique est déterministe l'entité correspondante dans l'espace des phases est un attracteur étrange.

$\Rightarrow$ Méthodes d'analyse "objectives" pour pouvoir différentier tous ces différents régimes d'évolution. Pour cela on peut utiliser différentes méthodes : la transformation de Fourier et les sections de Poincaré.

Notion d'attracteur

Attracteur, exemples du point fixe et du cycle limite

- Les systèmes dynamiques dissipatifs sont caractérisés par l'attraction de toutes les trajectoires de phase, passant dans un certain domaine de l'espace des phases, vers un objet géométrique nommé attracteur (point fixe ou cycle limite par exemple).
- Attracteur $\Rightarrow$ limite asymptotique (régime permanent) des solutions partant de toutes conditions initiales situées dans son bassin d'attraction.

2 caractéristiques trés importantes liées au phénomène d'attraction

- Oubli des conditions initiales,
- Dimension de l'attracteur $\rightarrow$ contraction des aires dans l'espace des phases.

Notion d'attracteur

Contraction des aires dans l'espace des phases, dimension de l'attracteur
Exemple du cycle limite dans le plan de phase

- Lorsque la limite asymptotique est atteinte, une seule trajectoire subsiste : le cycle limite
- Une seule abscisse curviligne le long de cette courbe suffit pour repérer le point figuratif,
- Ce cas particulier met clairement en évidence un fait trés général : la dimension de l'attracteur est inférieure à celle de l'espace des phases.

Notion d'attracteur

Non-intersection des trajectoires de phase

Système dynamique décrit par un ensemble fini d'équations différentielles ordinaires

- les trajectoires de phase qui en constituent la représentation dans l'espace des phases ne peuvent se couper (sauf en un point singulier où elles convergent).
- Conséquence inéluctable du caractère déterministe de cette description.
- Sinon, la même condition initiale (le point d'intersection supposé) pourrait donner naissance à des évolutions différentes ce qui est en contradiction avec le caractère déterministe des équations différentielles utilisées.

Différents types de spectre de Fourier

Signal périodique

$$x(t) = x(t+T) = x(t+\frac{2\pi}{\omega}).$$

Les composantes de Fourier sont exactement situées aux fréquences :

$$\frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \frac{3}{T}, \frac{4}{T}, ..., \frac{n}{T}.$$

Le spectre d'un signal périodique de période T est formé d'une raie de fréquence égale à $1/T$ et éventuellement, d'un certain nombre de raies harmoniques de cette fréquence de base.

Différents types de spectre de Fourier

Signal périodique

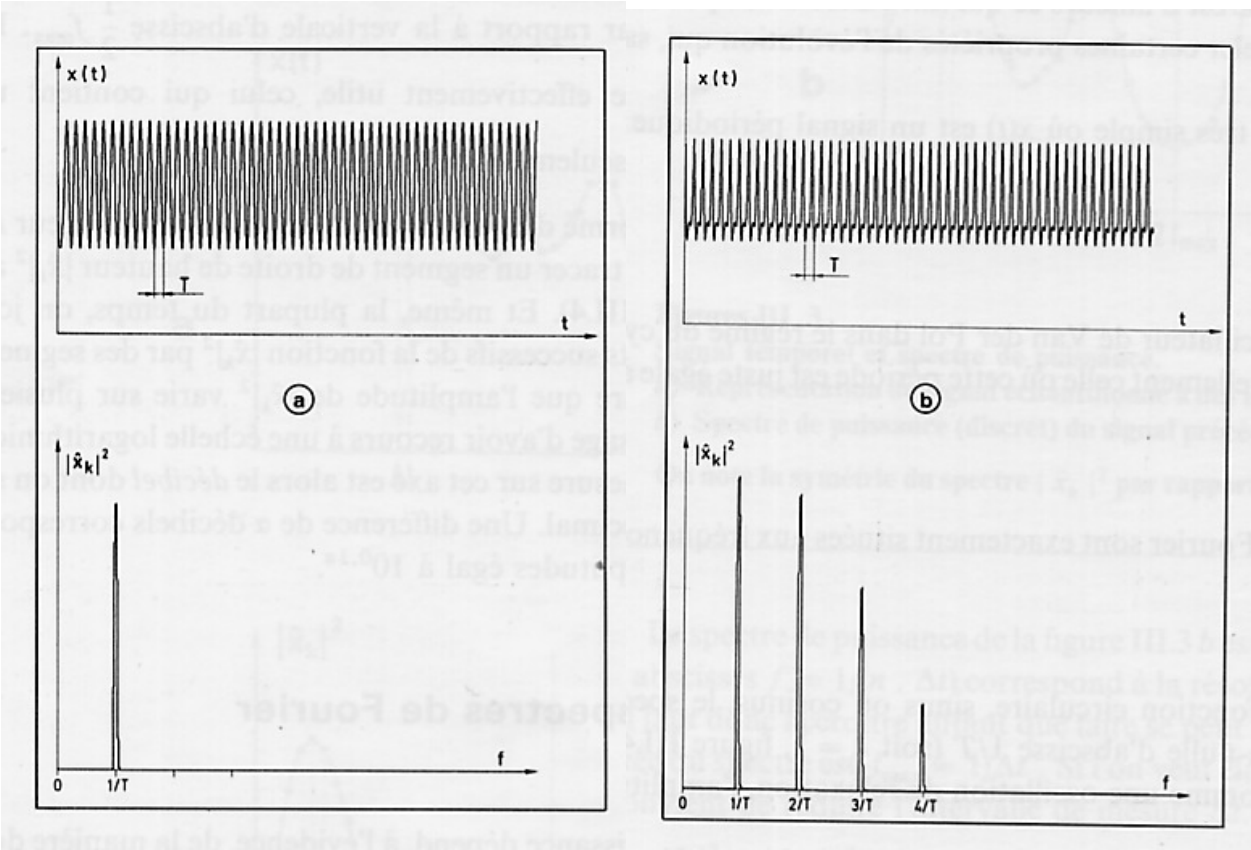


Figure: Fonctions périodiques et leurs spectres de Fourier : a) fonction sinusoïdale pure ; b) fonction périodique contenant des harmoniques.

Différents types de spectre de Fourier

Signal quasi-périodique

Une fonction y de r variables indépendantes $t_1, t_2, ..., t_r$ est dite périodique, de période 2π par rapport à chacun de ces arguments, :

$$y(t_1, t_2, t_3, ..., t_r) = y(t_1, t_2, t_3, ..., t_j + 2\pi, ..., t_r) \text{ avec } j = 1, ..., r.$$

Dans ces conditions, on appellera fonction quasi-périodique du temps, une telle fonction périodique dont les r variables sont toutes directement proportionnelles au temps t :

$$t_j = \omega_j t \text{ avec } j = 1, ..., r.$$

Une telle fonction possède r fréquences de base :

$$f_j = \frac{\omega_j}{2\pi} \text{ avec } j = 1, ..., r$$

et par conséquent r périodes de base : $T_j = \frac{1}{f_j} = \frac{2\pi}{\omega_j}$. Comme on le pressent d'emblée, le spectre de Fourier d'une fonction quasi-périodique du temps a, sauf cas particulier, une allure relativement complexe.

Différents types de spectre de Fourier

Signal quasi-périodique

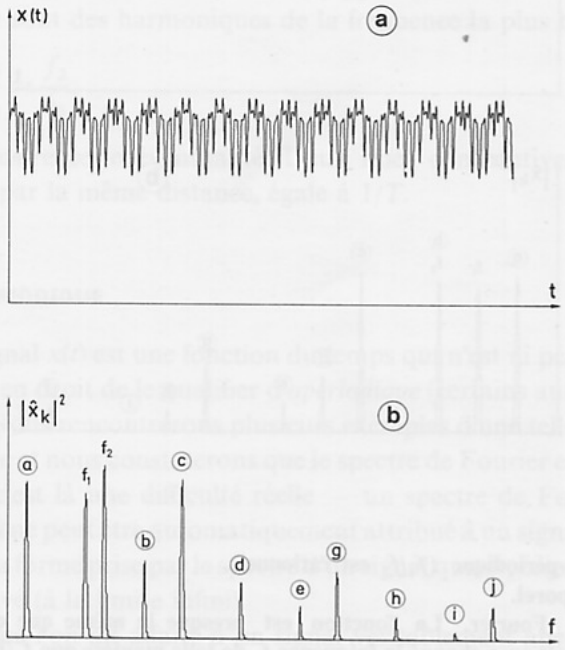


Figure III.7.

Fonction quasi-périodique à deux fréquences f_1 et f_2 (le rapport f_1/f_2 est irrationnel).
***a)* Signal temporel.**
***b)* Spectre de Fourier comportant, outre les deux fréquences de base f_1 et f_2, les repères des principaux pics de fréquence $f_p = m_1 f_1 + m_2 f_2$**

$a \to f_2 - f_1$	$e \to 5f_1 - f_2$	$j \to 5f_1 + f_2$
$b \to 3f_1 - f_2$	$g \to 3f_1 + f_2$	
$c \to f_1 + f_2$	$h \to 5f_1$	
$d \to 3f_1$	$i \to 7f_1 - f_2$.	

Différents types de spectre de Fourier

Signal apériodique

- Signal $x(t)$ ni périodique, ni quasi-périodique, $\rightarrow$ apériodique.
- Spectre de Fourier continu,
- **Mais** Spectre continu ne peut pas être automatiquement attribué à un signal apériodique.
- Signal quasi-périodique avec un grand nombre de fréquence peut paraitre continu.

Différents types de spectre de Fourier

Signal apériodique

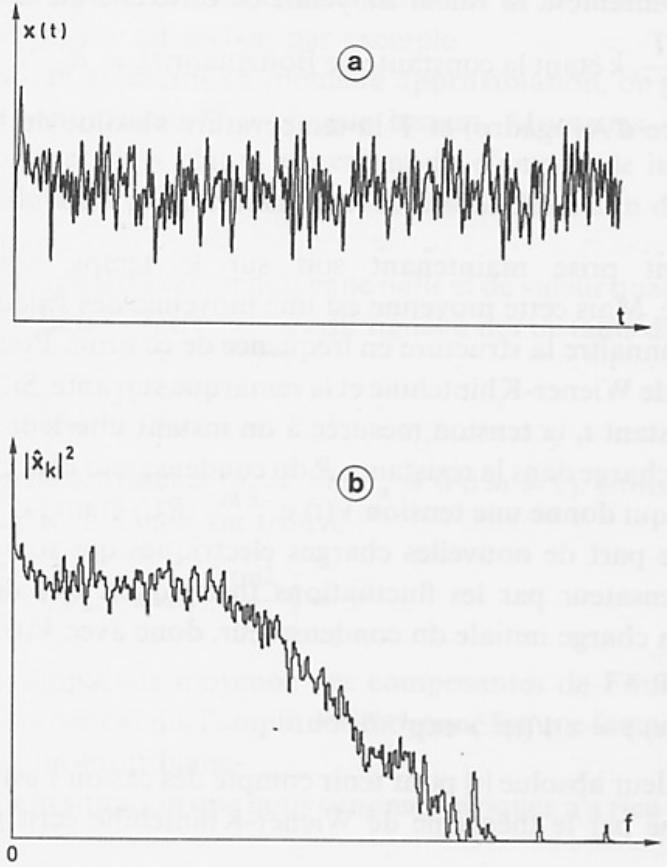


Figure III.9.

Fonction apériodique.
a) **Signal temporel.**
b) **Spectre de Fourier.**
On note le caractère continu de ce spectre par opposition aux spectres de raies des

Différents types de spectre de Fourier

Signal apériodique

- Processus aléatoire $\rightarrow$ spectre continu et large bande
- Méthode d'anlyse utilisant spectre de Fourier ne peut pas faire la distinction entre un processus aléatoire et un régime dynamique déterministe.

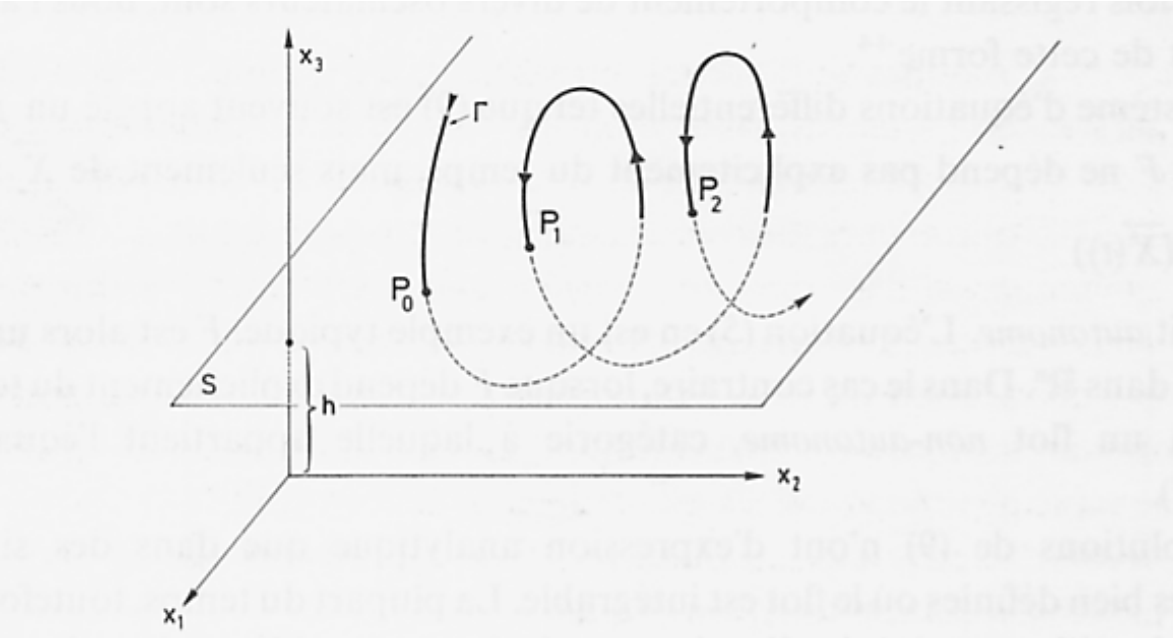
$\rightarrow$ Limites d'application de la transformation de Fourier

$\rightarrow$ Nécessité de recourir à d'autre méthodes, notamment à celle des sections de Poincaré.

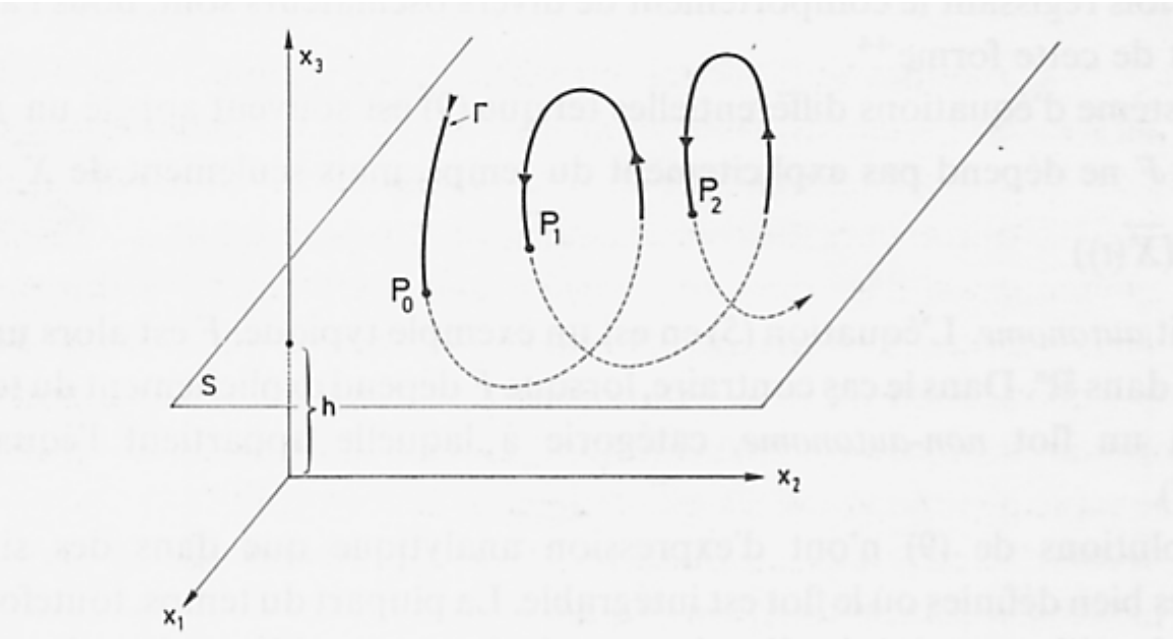
Section de Poincaré

- Simplicité : nous supposerons l'espace des phases de dimension $d = 3$ (raisons didactiques et pratiques).
- Comportement asymptotique, $t \to +\infty$ (suppression des états transitoires).
- Etude des solutions dans $R^3 \to$ complexe
- Observation des points d'intersection de la trajectoire avec un plan (dimension de l'espace des phases diminuée d'une unité),
- Mode de construction indiqué schématiquement sur la figure suivante

Section de Poincaré



Section de Poincaré



- Conditions initiales $\rightarrow$ ensemble de points $\Rightarrow$ Section de Poincaré,
- Carte à 2 dimensions : temps continu $\rightarrow$ temps discret (non constant entre 2 points),
- Mêmes propriétés topologiques que le flot lui donnant naissance,
- Flot disspipatif $\rightarrow$ contraction des aires,
- Caractéristiques struturales de l'attrateur inchangées

Section de Poincaré

Intérêt pratique

La méthode des coupes de Poincaré simplifie l'étude des flots continus pour trois raisons :

1. elle permet de passer d'un flot dans R^3 à une application du plan sur lui-même entraînant la réduction d'une unité du nombre de coordonnées à prendre en compte,
2. la discrétisation du temps conduit à substituer aux équations différentielles des équations algébriques du type $P \to T(P)$,
3. le nombre de données se trouve réduit dans des proportions très élevées, puisque pratiquement tous les points de la trajectoire peuvent être ignorés à l'exception de quelques uns.

Section de Poincaré

Intérêt pratique

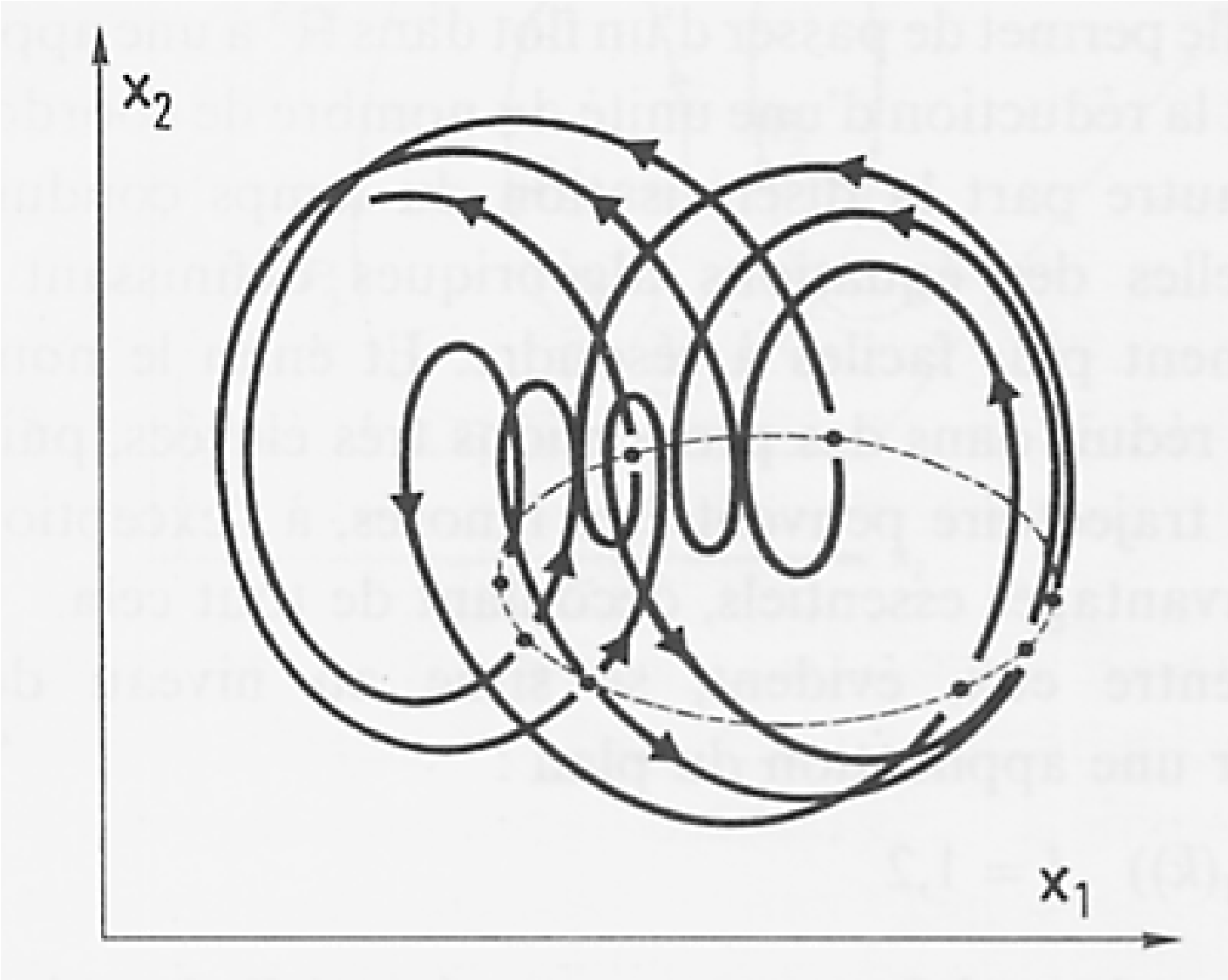
La méthode des coupes de Poincaré simplifie l'étude des flots continus pour trois raisons :

1. elle permet de passer d'un flot dans R^3 à une application du plan sur lui-même entraînant la réduction d'une unité du nombre de coordonnées à prendre en compte,
2. la discrétisation du temps conduit à substituer aux équations différentielles des équations algébriques du type $P \to T(P)$,
3. le nombre de données se trouve réduit dans des proportions très élevées, puisque pratiquement tous les points de la trajectoire peuvent être ignorés à l'exception de quelques uns.

- Espace tridimensionnel les trajectoires sont difficilement lisibles (perspective ou en projection)
- La section de Poincaré autorise un diagnostic rapide et précis.

Section de Poincaré

Exemple : régime quasi-périodique



Section de Poincaré

La section de Poincaré apporte aussi une indication très utile sur la nature des flots tridimensionnels. Les points d'intersection peuvent être situés :

- soit sur une surface $\rightarrow$ **flot apériodique**
- soit le long d'une courbe unique de formes plus ou moins complexe $\rightarrow$ dynamique véritablement quasi-périodique ou dynamique apériodique fortement disspative

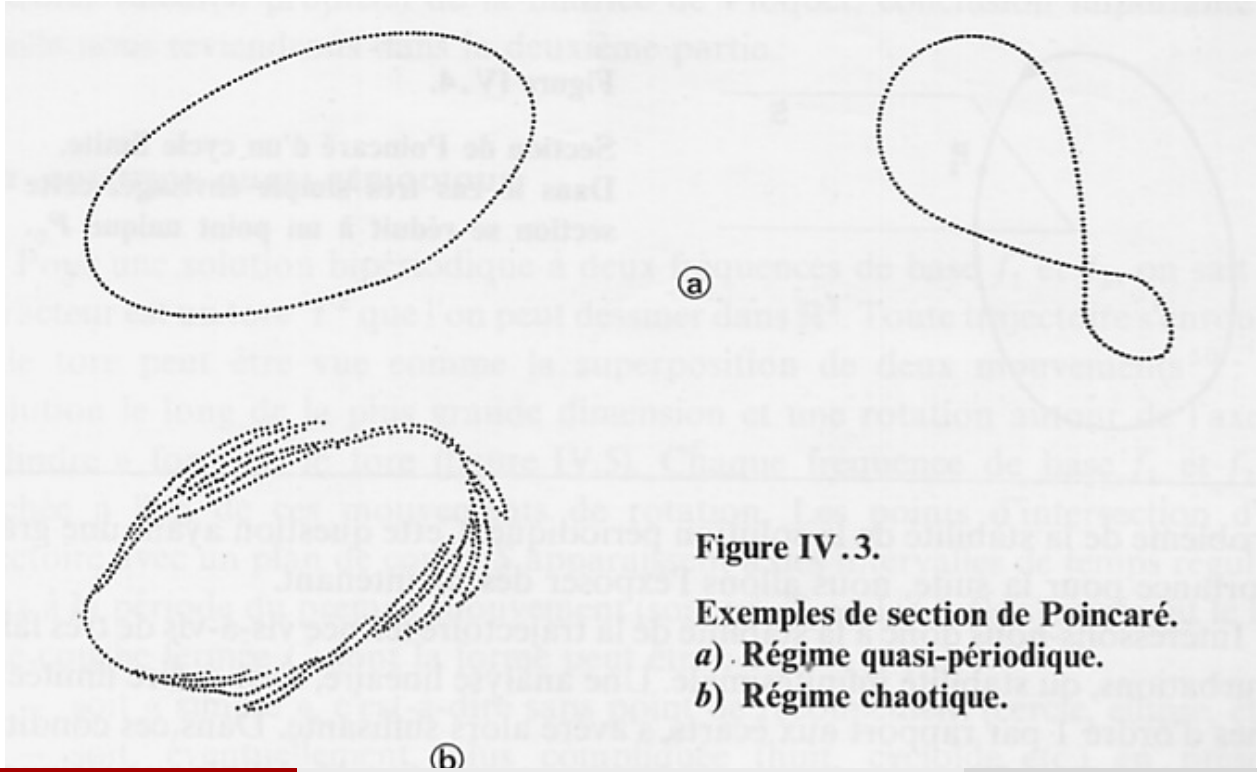


Figure IV.3.

Exemples de section de Poincaré.
***a*) Régime quasi-périodique.**
***b*) Régime chaotique.**

Section de Poincaré

Solution périodique

- Solution est périodique $\rightarrow$ trajectoire des phases tend vers une orbite fermée, **le cycle limite**.
- La section de Poincaré est très simple et se réduit à un seul point P_0 (éventuellement quelques uns quand le cycle limite a une forme assez tourmentée).

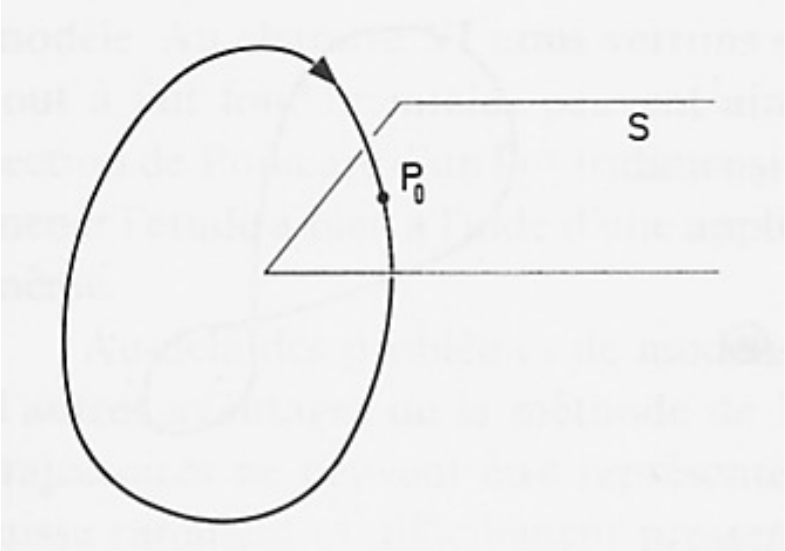
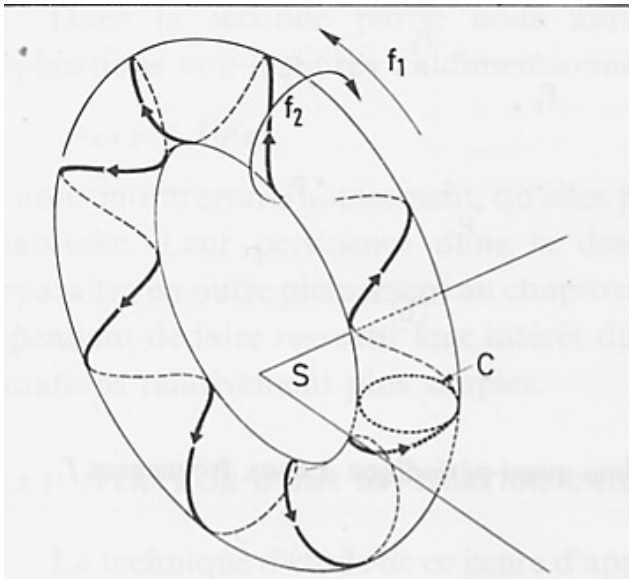


Figure: Section de Poincaré d'un cycle limite.

Section de Poincaré

Solution quasi-périodique

- Solution bi-périodique à deux fréquences de base f_1 et f_2
  $\rightarrow$ **Attracteur** est un **tore** T^2 (dans R^3).
- Trajectoire enroulée autour du tore T^2 : **superposition** de 2 mouvements
  - Révolution de la plus grande dimension
  - Rotation autour de l'axe du "cylindre"
- Courbe fermée : intervalles de temps réguliers $\equiv$ période du premier mouvement



Chaos temporel

Pseudo-définition du chaos

- Pas de définition de "chaos" ou de "chaotique" $\rightarrow$ propriétés typiques
- Spectre de puissance avec une partie continue : bande large,
- Présence éventuelle de quelques raies,
- Fonction d'auto-corrélation temporelle du signal a une portée finie et s'annule dans un laps de temps limité,

$\Rightarrow$ **p**erte de mémoire du signal par rapport à lui même

Chaos temporel

Pseudo-définition du chaos

$\Rightarrow$ **p**erte de mémoire du signal par rapport à lui même

- La connaissance de l'état du système pendant un temps aussi long que l'on veut ne permet pas pour autant, de prévoir ce que sera son évolution ultérieure.
- Aspect déterminant du chaos = Imprédictibilité

Chaos temporel

Préambule historique

- Quel attracteur doit-on associer à un régime dont le spectre de Fourier comporte une bande large ?

Chaos temporel

Préambule historique

- Quel attracteur doit-on associer à un régime dont le spectre de Fourier comporte une bande large ?
- 1944 : Landau $\rightarrow$ cherche à expliquer la manière dont un fluide passe d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent quand on augmente le nombre de Reynolds Re (paramètre de contrôle)

Chaos temporel

Préambule historique

- 1944 : Landau $\rightarrow$ cherche à expliquer la manière dont un fluide passe d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent quand on augmente le nombre de Reynolds Re (paramètre de contrôle)
- 1er seuil d'instabilité (bifurcation) la vitesse du fluide auparavant constante devient périodique (fréquence f_1)

Chaos temporel

Préambule historique

- 1er seuil d'instabilité (bifurcation) la vitesse du fluide auparavant constante devient périodique (fréquence f_1)
- si Re continue de croître, ce régime périodique perd à son tour sa stabilité (bifurcation),

Chaos temporel

Préambule historique

- 1er seuil d'instabilité (bifurcation) la vitesse du fluide auparavant constante devient périodique (fréquence f_1)
- si Re continue de croître, ce régime périodique perd à son tour sa stabilité (bifurcation),
- Un régime quasi-périodique s'installe alors avec l'apparition d'une deuxième fréquence f_2 (incommensurable avec f_1)

Chaos temporel

Préambule historique

- 1er seuil d'instabilité (bifurcation) la vitesse du fluide auparavant constante devient périodique (fréquence f_1)
- si Re continue de croître, ce régime périodique perd à son tour sa stabilité (bifurcation),
- Un régime quasi-périodique s'installe alors avec l'apparition d'une deuxième fréquence f_2 (incommensurable avec f_1)
- Le régime chaotique est obtenue après une succession de r bifurcations pour atteindre un attracteur de type tore T^r de dimension r suffisamment élevée (la distinction entre un spectre de Fourier formé d'une multitude de raies voisines et un spectre continu est dans les faits académique)

La notion d'attracteur étrange

Corollaire

- Dimension de l'espace des phases $>$ dimension de l'attracteur
  $\rightarrow$ Seuls les systèmes à grand nombre de degrés de liberté peuvent être le siège du chaos

La notion d'attracteur étrange

Corollaire

- Dimension de l'espace des phases $>$ dimension de l'attracteur
  $\rightarrow$ Seuls les systèmes à grand nombre de degrés de liberté peuvent être le siège du chaos
- **MAIS** 3 degrés de liberté suffisent pour donner naissance à un régime chaotique

La notion d'attracteur étrange

Corollaire

- Dimension de l'espace des phases $>$ dimension de l'attracteur
  $\rightarrow$ Seuls les systèmes à grand nombre de degrés de liberté peuvent être le siège du chaos
- **MAIS** 3 degrés de liberté suffisent pour donner naissance à un régime chaotique
- Ruelle et Takens $\rightarrow$ **notion d'attracteur étrange**

La notion d'attracteur étrange

Corollaire

- Dimension de l'espace des phases $>$ dimension de l'attracteur
  $\rightarrow$ Seuls les systèmes à grand nombre de degrés de liberté peuvent être le siège du chaos
- **MAIS** 3 degrés de liberté suffisent pour donner naissance à un régime chaotique
- Ruelle et Takens $\rightarrow$ **notion d'attracteur étrange**
- Attracteur de nature topologique radicalement différente de celle du tore

La notion d'attracteur étrange

Corollaire

- Dimension de l'espace des phases $>$ dimension de l'attracteur
  $\rightarrow$ Seuls les systèmes à grand nombre de degrés de liberté peuvent être le siège du chaos
- **MAIS** 3 degrés de liberté suffisent pour donner naissance à un régime chaotique
- Ruelle et Takens $\rightarrow$ **notion d'attracteur étrange**
- Attracteur de nature topologique radicalement différente de celle du tore
- S.C.I. Sensibilité aux conditions initiales : deux trajectoires de l'attracteur, initialement aussi voisines que l'on veut, finissent toujours par s'écarter l'une de l'autre (cet écart augmente même en moyenne exponentiellement au cours du temps)

La notion d'attracteur étrange

Sensibilité aux Conditions Initiales

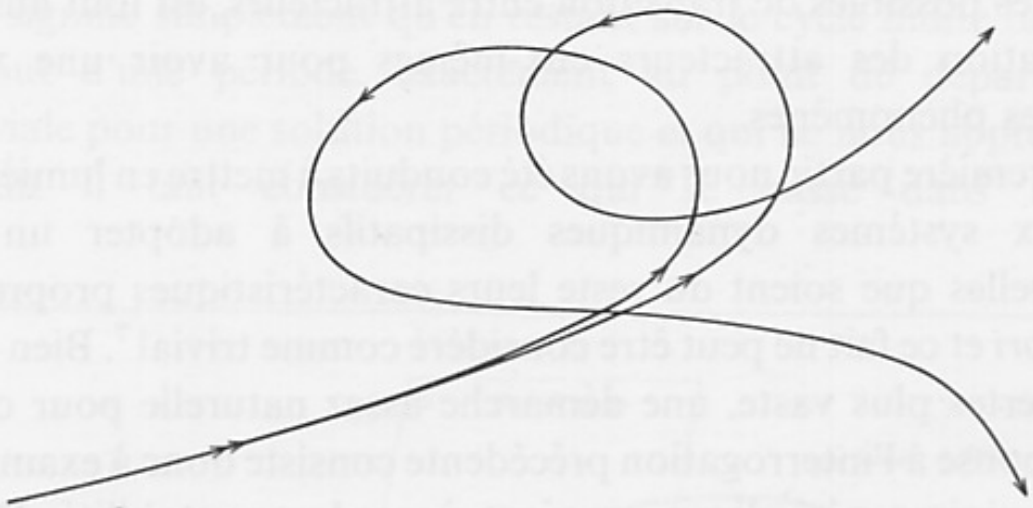


Figure 1.

Sensibilité vis-à-vis des conditions initiales (S.C.I.).
Lorsqu'elles s'inscrivent sur un attracteur étrange, deux trajectoires de phases voisines s'écartent toujours l'une de l'autre, et ceci quelle que soit leur proximité initiale. Aussi la trajectoire effectivement suivie par le système dépend-elle de manière cruciale de son point de départ.

La notion d'attracteur étrange

Sensibilité aux Conditions Initiales

- Antinomie apparente entre l'attraction qui implique un resserrement des trajectoires et la S.C.I. qui, au contraire, nécessite leur divergence.

La notion d'attracteur étrange

Sensibilité aux Conditions Initiales

- Antinomie apparente entre l'attraction qui implique un resserrement des trajectoires et la S.C.I. qui, au contraire, nécessite leur divergence.

$\rightarrow$ Dimension minimale pour l'attracteur étrange

La notion d'attracteur étrange

Sensibilité aux Conditions Initiales

- Antinomie apparente entre l'attraction qui implique un resserrement des trajectoires et la S.C.I. qui, au contraire, nécessite leur divergence.

$\rightarrow$ Dimension minimale pour l'attracteur étrange

$\rightarrow$ Dimension minimale pour l'espace des phases

La notion d'attracteur étrange

Sensibilité aux Conditions Initiales

- Nouveau type d'attracteur : la divergence des trajectoire s'effectue suivant une spirale plane, puis les trajectoires émergent dans l'espace avec retour et réinjection au centre de la spirale et ainsi de suite.

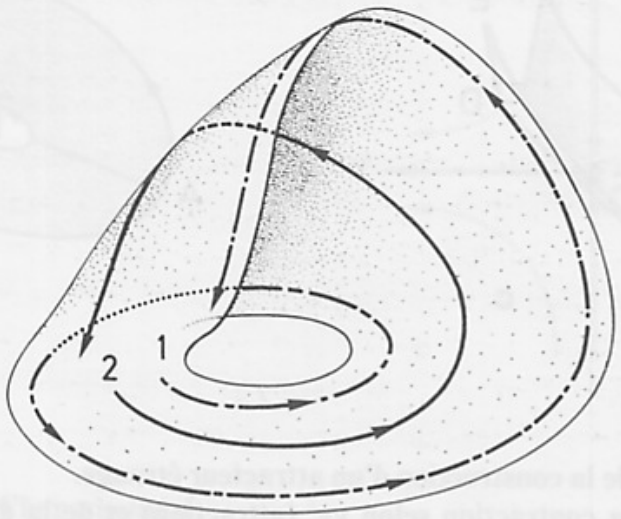


Figure VI.9.

Représentation schématique de la divergence de deux trajectoires dans un espace des phases tridimensionnel.
Les trajectoires voisines 1 et 2 émergent du plan horizontal, se croisent sans intersection dans l'espace, et retournent vers la « spirale ». Ces courbes correspondent à une vue simplifiée de l'attracteur de Rössler.

D'après Abraham et Shaw.

La notion d'attracteur étrange

Sensibilité aux Conditions Initiales

- Pour que la S.C.I. soit possible, il faut que la dimension de l'attracteur soit $d > 2$,

La notion d'attracteur étrange

Sensibilité aux Conditions Initiales

- Pour que la S.C.I. soit possible, il faut que la dimension de l'attracteur soit $d > 2$,
- **Mais** contraction des volumes dans l'espace des phases due à la dissipation $\rightarrow d < 3$ (espace tridimensionnel)

La notion d'attracteur étrange

Sensibilité aux Conditions Initiales

- Pour que la S.C.I. soit possible, il faut que la dimension de l'attracteur soit $d > 2$,
- **Mais** contraction des volumes dans l'espace des phases due à la dissipation $\rightarrow d < 3$ (espace tridimensionnel)

$\rightarrow$ l'attracteur susceptible de représenter un régime chaotique doit être tel que $2 < d < 3$. Pour cela, l'attracteur doit avoir une dimension non-entière, dit **fractale**.

La notion d'attracteur étrange

Résumé

Les caractéristiques essentielles de ces attracteurs étranges sont :

- Les trajectoires de phases sont attirées vers l'attracteur (au moins celles partant dans un certain voisinage),

La notion d'attracteur étrange

Résumé

Les caractéristiques essentielles de ces attracteurs étranges sont :

- Les trajectoires de phases sont attirées vers l'attracteur (au moins celles partant dans un certain voisinage),
- Les paires de trajectoires voisines divergent sur l'attracteur (S.C.I.),

La notion d'attracteur étrange

Résumé

Les caractéristiques essentielles de ces attracteurs étranges sont :

- Les trajectoires de phases sont attirées vers l'attracteur (au moins celles partant dans un certain voisinage),
- Les paires de trajectoires voisines divergent sur l'attracteur (S.C.I.),
- La dimension d de l'attracteur est fractale.

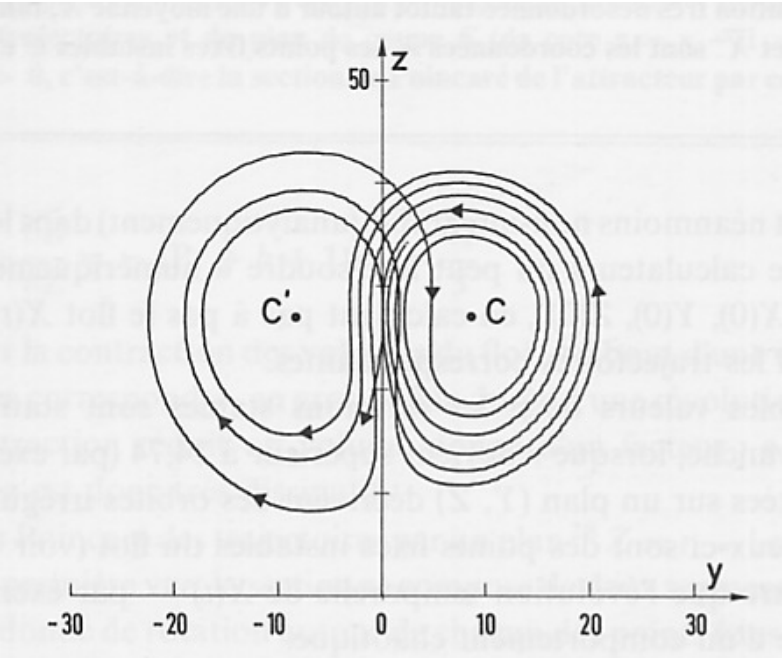
Exemple d'attracteur étrange : l'attracteur de Lorentz

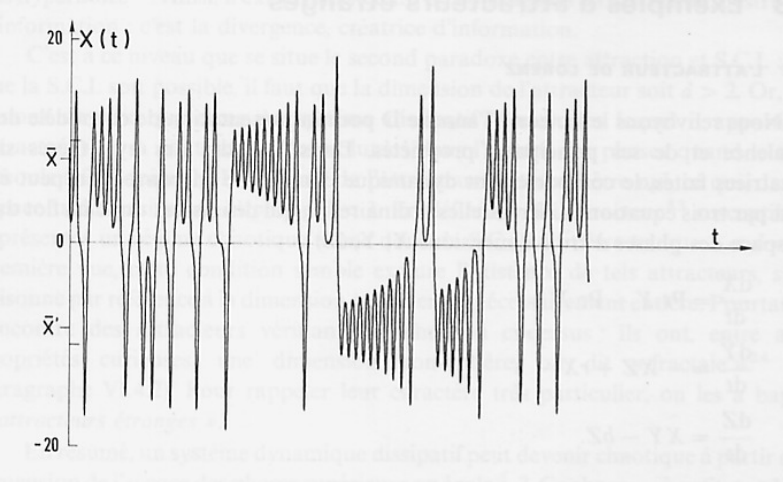
Le comportement dynamique d'un fluide en convection peut être décrit par trois équations différentielles ordinaires qui définissent donc un flot dans un espace des phases à trois dimensions X, Y, Z :

$$\begin{cases} dX/dt = Pr.(Y - X) \\ dY/dt = -XY + rX - Y \\ dZ/dt = XY - bZ, \end{cases}$$

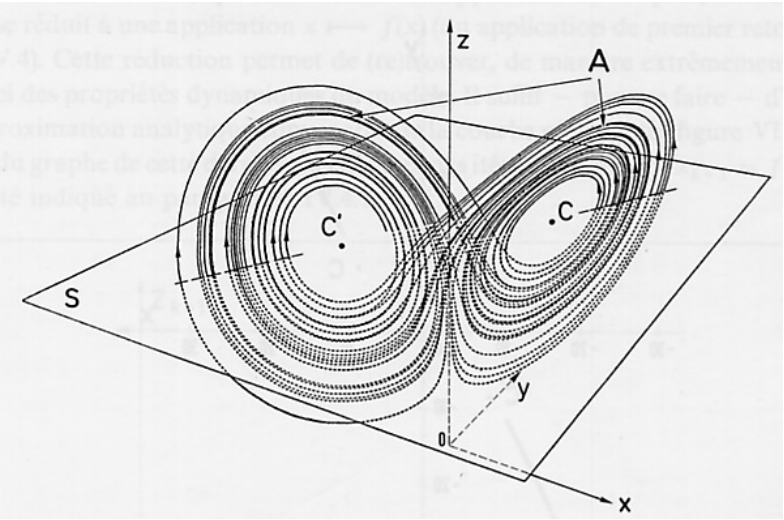
En général, on fixe les valeurs de Pr et de b (très souvent $Pr = 10$ et $b = 8/3$) et on utilise r comme paramètre de contrôle.

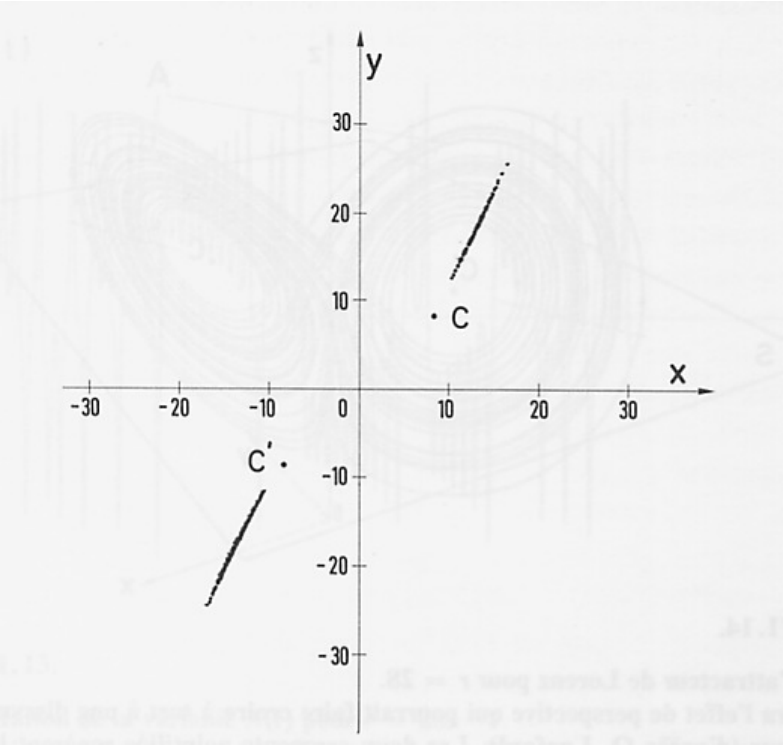
Exemple d'attracteur étrange : l'attracteur de Lorentz





Exemple d'attracteur étrange : l'attracteur de Lorentz





Détermination du comportement chaotique

- Un régime chaotique peut être caractérisé par l'analyse de Fourier (spectre de puissance comportant une partie continue, une bande large),

Détermination du comportement chaotique

- Un régime chaotique peut être caractérisé par l'analyse de Fourier (spectre de puissance comportant une partie continue, une bande large),
- Pas de possibilité de distinguer un chaos impliquant un nombre limité de degrés de liberté ("chaos déterministe") d'un bruit blanc,

Détermination du comportement chaotique

- Un régime chaotique peut être caractérisé par l'analyse de Fourier (spectre de puissance comportant une partie continue, une bande large),
- Pas de possibilité de distinguer un chaos impliquant un nombre limité de degrés de liberté ("chaos déterministe") d'un bruit blanc,
- Etude des trajectoires de phases par le biais des sections de Poincaré apporte un progrès décisif

Détermination du comportement chaotique

- Un régime chaotique peut être caractérisé par l'analyse de Fourier (spectre de puissance comportant une partie continue, une bande large),
- Pas de possibilité de distinguer un chaos impliquant un nombre limité de degrés de liberté ("chaos déterministe") d'un bruit blanc,
- Etude des trajectoires de phases par le biais des sections de Poincaré apporte un progrès décisif
- Diagnostics particulièrement précis **MAIS**
  - Résultats quanlitatifs
  - Limitation en pratique à des espace des phases de dimension 3.

Détermination du comportement chaotique

- Un régime chaotique peut être caractérisé par l'analyse de Fourier (spectre de puissance comportant une partie continue, une bande large),
- Pas de possibilité de distinguer un chaos impliquant un nombre limité de degrés de liberté ("chaos déterministe") d'un bruit blanc,
- Etude des trajectoires de phases par le biais des sections de Poincaré apporte un progrès décisif
- Diagnostics particulièrement précis **MAIS**
  - Résultats quanlitatifs
  - Limitation en pratique à des espace des phases de dimension 3.

$\Rightarrow$ Une caractérisation plus quantitative d'un régime chaotique découle de la détermination du plus grand **exposant de Lyapunov** (lié à la propriété de S.C.I.) et la **dimension fractale** de l'attracteur étrange.

Détermination du comportement chaotique

Exposant de Lyapunov

- Divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide
  $\rightarrow$ Difficulté pour caractériser l'évolution d'un flot chaotique

Détermination du comportement chaotique

Exposant de Lyapunov

- Divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide
  $\rightarrow$ Difficulté pour caractériser l'évolution d'un flot chaotique
- Estimation ou mesure de la vitesse de cette divergence

Détermination du comportement chaotique

Exposant de Lyapunov

- Divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide
  $\rightarrow$ Difficulté pour caractériser l'évolution d'un flot chaotique
- Estimation ou mesure de la vitesse de cette divergence

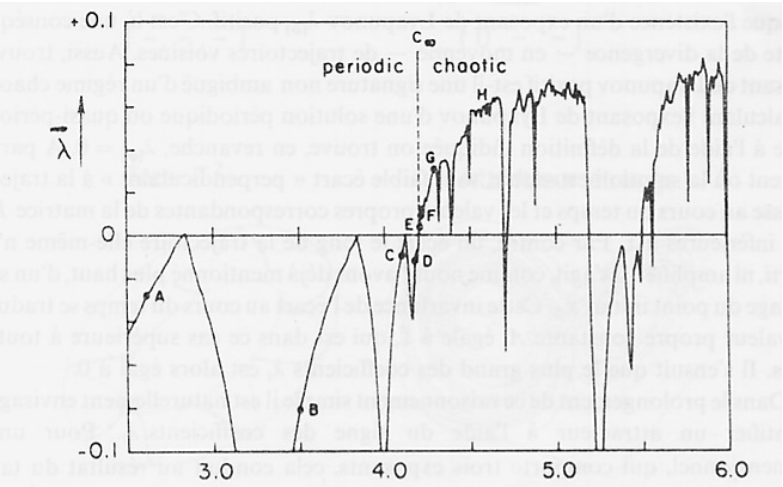
$\rightarrow$ **Exposant de Lyapunov**

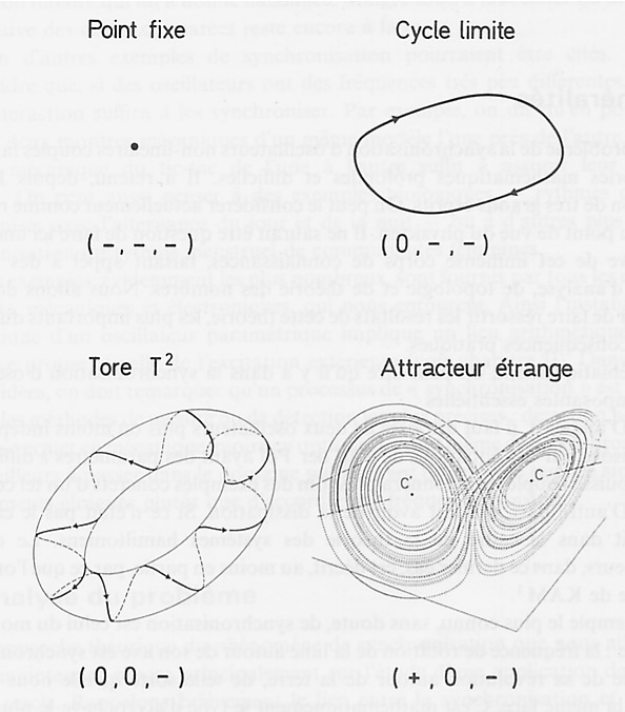
Détermination du comportement chaotique

Exposant de Lyapunov

- Divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide
  $\rightarrow$ Difficulté pour caractériser l'évolution d'un flot chaotique
- Estimation ou mesure de la vitesse de cette divergence

$\rightarrow$ **Exposant de Lyapunov**





Détermination du comportement chaotique

Caractérisation géométrique de la dimension fractale d'un attracteur étrange :

- Calcul d'une fonction appropriée (noté $C(r)$) pour montrer qu'elle est proportionnelle à r^ν où r est le rayon d'une (hyper)sphère.

Détermination du comportement chaotique

Caractérisation géométrique de la dimension fractale d'un attracteur étrange :

- Calcul d'une fonction appropriée (noté $C(r)$) pour montrer qu'elle est proportionnelle à r^ν où r est le rayon d'une (hyper)sphère.
- Détermination de la pente de la courbe $C(r) = f(\log(r))$ pour connaître la dimension fractale de l'attracteur

Détermination du comportement chaotique

Caractérisation géométrique de la dimension fractale d'un attracteur étrange :

- Calcul d'une fonction appropriée (noté $C(r)$) pour montrer qu'elle est proportionnelle à r^{ν} où r est le rayon d'une (hyper)sphère.
- Détermination de la pente de la courbe $C(r) = f(\log(r))$ pour connaître la dimension fractale de l'attracteur

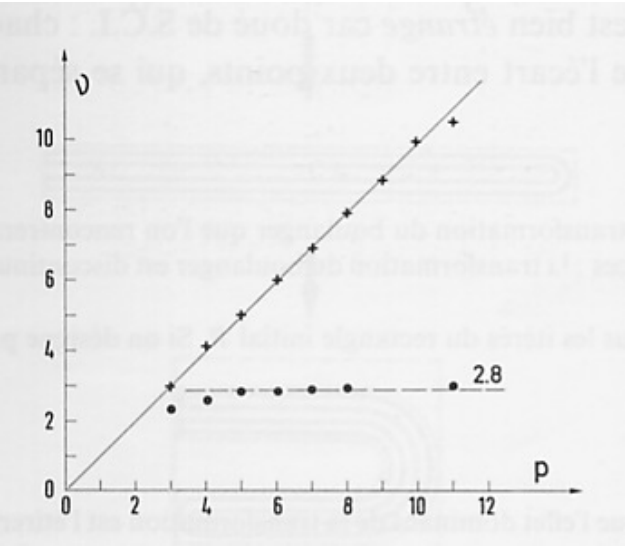


Figure: Variation de l'exposant ν avec la dimension p.

Route vers le chaos

Transition vers le chaos

- Un système dynamique non-linéaire possédant au moins 3 variables peut devenir chaotique à partir d'un état dynamique régulier (périodique ou quasi-périodique)

Route vers le chaos

Transition vers le chaos

- Un système dynamique non-linéaire possédant au moins 3 variables peut devenir chaotique à partir d'un état dynamique régulier (périodique ou quasi-périodique)
- Augmentation progressive d'un paramètre de contrôle $\rightarrow$ Bifurcation de l'état régulier à l'état chaotique

Route vers le chaos

Transition vers le chaos

- Un système dynamique non-linéaire possédant au moins 3 variables peut devenir chaotique à partir d'un état dynamique régulier (périodique ou quasi-périodique)
- Augmentation progressive d'un paramètre de contrôle $\rightarrow$ Bifurcation de l'état régulier à l'état chaotique
- Attracteur cycle limite (régime périodique) $\rightarrow$ 3 scénarios principaux.

Route vers le chaos

3 scénarios principaux

- la scénario par doublement de période pour lequel la période de base est multipliée par 2 à chaque bifurcation, jusqu'à approcher une période de longueur infinie (appelée aussi cascade sous-harmonique),

Route vers le chaos

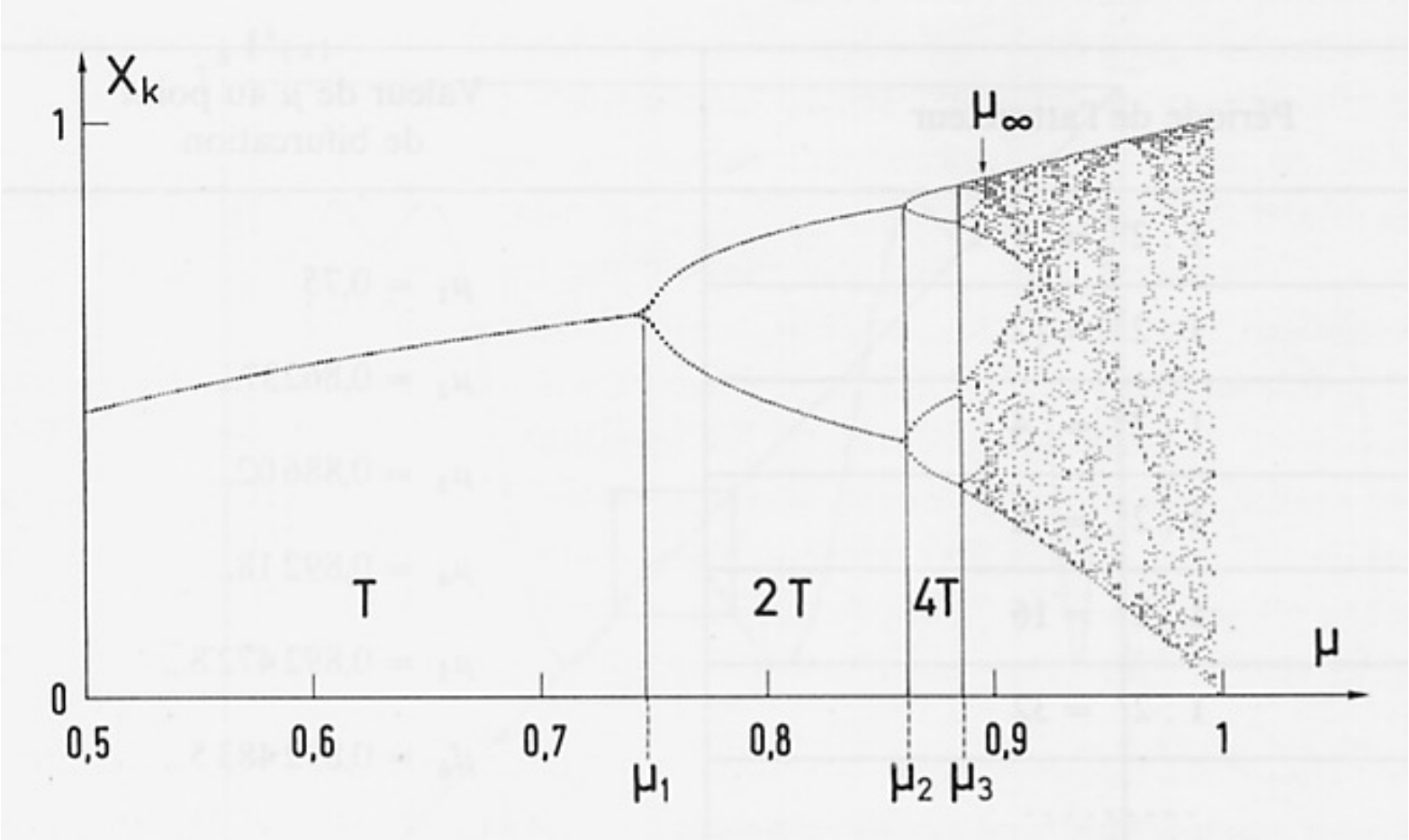
3 scénarios principaux

- la scénario par doublement de période pour lequel la période de base est multipliée par 2 à chaque bifurcation, jusqu'à approcher une période de longueur infinie (appelée aussi cascade sous-harmonique),
- le scénario par la quasi-périodicité où l'interaction non-linéaire de 2 ou 3 oscillateurs conduit à des comportement chaotiques (cascade de bifurcation de Hopf),

Route vers le chaos

3 scénarios principaux

- la scénario par doublement de période pour lequel la période de base est multipliée par 2 à chaque bifurcation, jusqu'à approcher une période de longueur infinie (appelée aussi cascade sous-harmonique),
- le scénario par la quasi-périodicité où l'interaction non-linéaire de 2 ou 3 oscillateurs conduit à des comportement chaotiques (cascade de bifurcation de Hopf),
- le scénario par intermittences où les états périodiques se déstabilisent jusqu'à explosion dans une bouffée turbulente.

Route vers le chaos

Transition vers le chaos