Partie I - Vibrations non-linéaires

O. Richoux

LAUM, UMR CNRS 6613

16 mars 2015

Avant propos

- L'étude des sytèmes non-linéaires fait partie de la théorie générale des **systèmes dynamiques**.

Avant propos

- L'étude des sytèmes non-linéaires fait partie de la théorie générale des **systèmes dynamiques**.
  - $\Rightarrow$ Interdisciplinarité

Avant propos

- L'étude des sytèmes non-linéaires fait partie de la théorie générale des **systèmes dynamiques**.
  - $\Rightarrow$ Interdisciplinarité
  - $\Rightarrow$ phénomènes évolutifs

Avant propos

- L'étude des sytèmes non-linéaires fait partie de la théorie générale des **systèmes dynamiques**.
  - $\Rightarrow$ Interdisciplinarité
  - $\Rightarrow$ phénomènes évolutifs
  - $\Rightarrow$ Mathématiciens, physiciens et ingénieurs

Avant propos

- L'étude des sytèmes non-linéaires fait partie de la théorie générale des **systèmes dynamiques**.
  - $\Rightarrow$ Interdisciplinarité
  - $\Rightarrow$ phénomènes évolutifs
  - $\Rightarrow$ Mathématiciens, physiciens et ingénieurs
- 3 types d'outils mathématiques sont utilisés :

Avant propos

- L'étude des sytèmes non-linéaires fait partie de la théorie générale des **systèmes dynamiques**.
  - $\Rightarrow$ Interdisciplinarité
  - $\Rightarrow$ phénomènes évolutifs
  - $\Rightarrow$ Mathématiciens, physiciens et ingénieurs
- 3 types d'outils mathématiques sont utilisés :
  - $\Rightarrow$ les méthodes analytiques basées sur la représentation par des développements en série des solutions des modèles non-linéaires (ou résolution par méthodes itératives),

Avant propos

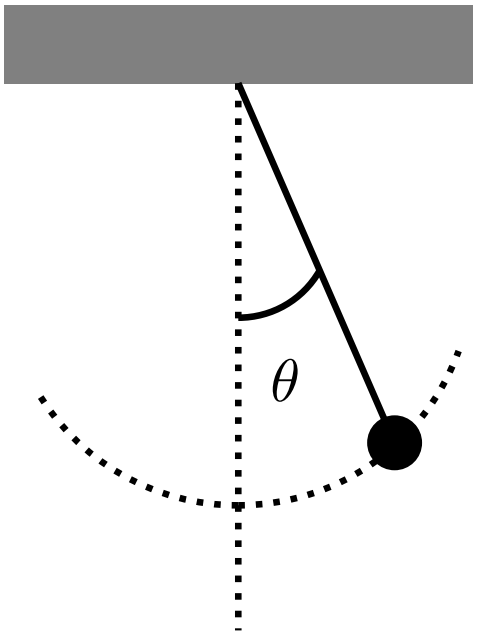
- L'étude des sytèmes non-linéaires fait partie de la théorie générale des **systèmes dynamiques**.
  - $\Rightarrow$ Interdisciplinarité
  - $\Rightarrow$ phénomènes évolutifs
  - $\Rightarrow$ Mathématiciens, physiciens et ingénieurs
- 3 types d'outils mathématiques sont utilisés :
  - $\Rightarrow$ les méthodes analytiques basées sur la représentation par des développements en série des solutions des modèles non-linéaires (ou résolution par méthodes itératives),
  - $\Rightarrow$ les méthodes quantitatives (solutions définies par leur singularité). Ces méthodes concernent les propriétés de l'espace de phase et l'évolution de ses singularités (prob. de bifurcation).

Avant propos

- L'étude des sytèmes non-linéaires fait partie de la théorie générale des **systèmes dynamiques**.
  - ⇒ Interdisciplinarité
  - ⇒ phénomènes évolutifs
  - ⇒ Mathématiciens, physiciens et ingénieurs
- 3 types d'outils mathématiques sont utilisés :
  - ⇒ les méthodes analytiques basées sur la représentation par des développements en série des solutions des modèles non-linéaires (ou résolution par méthodes itératives),
  - ⇒ les méthodes quantitatives (solutions définies par leur singularité). Ces méthodes concernent les propriétés de l'espace de phase et l'évolution de ses singularités (prob. de bifurcation).
  - ⇒ les méthodes numériques dont l'utilisation n'est devenue commode qu'avec le développement de l'usage des ordinateurs.

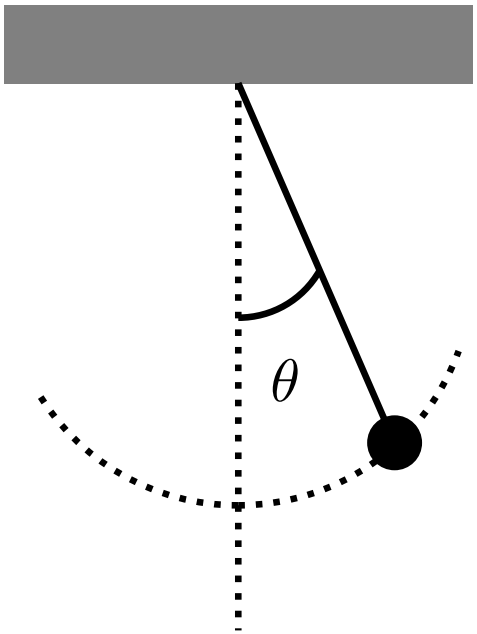
Exemples

Oscillations libres d'un pendule



Exemples

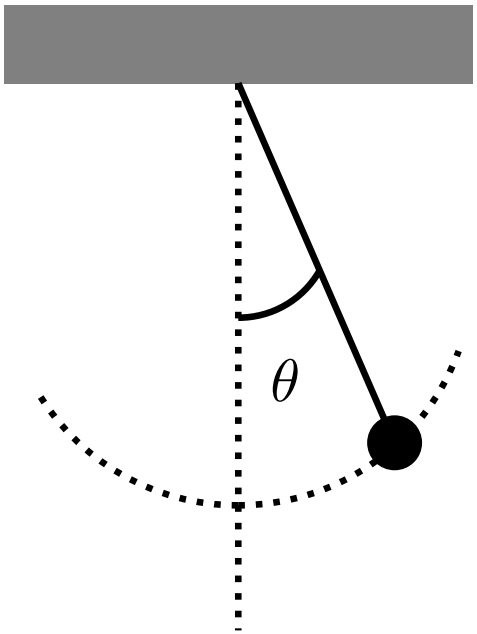
Oscillations libres d'un pendule



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

Exemples

Oscillations libres d'un pendule

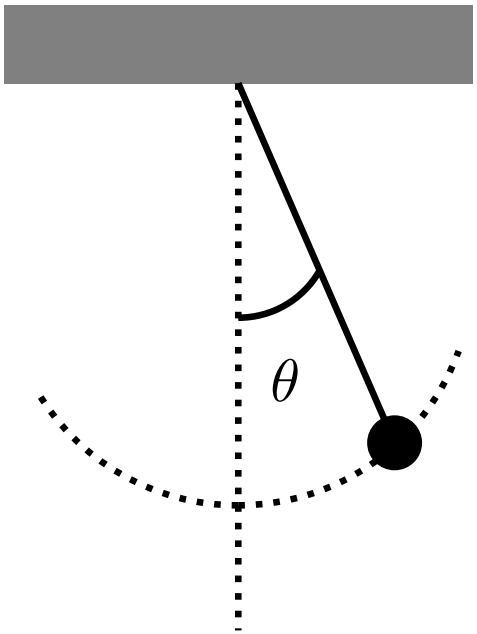


$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

Cette équation est une équation différentielle non-linéaire à cause de la présence de la fonction sinus. Pour des petits angles, on peut utiliser la série

Exemples

Oscillations libres d'un pendule



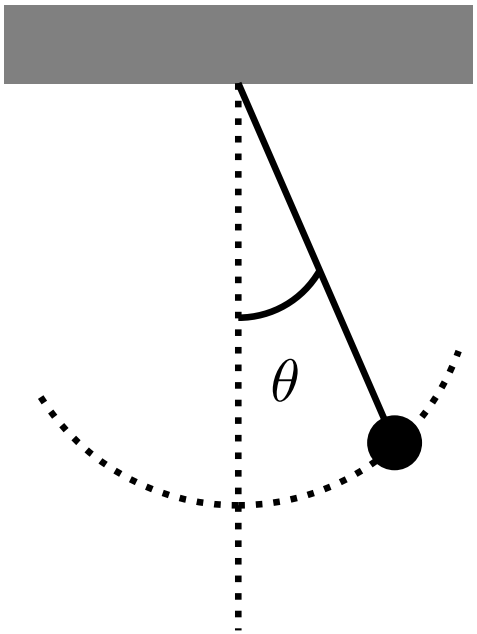
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

Cette équation est une équation différentielle non-linéaire à cause de la présence de la fonction sinus. Pour des petits angles, on peut utiliser la série

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \ldots$$

Exemples

Oscillations libres d'un pendule



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

Cette équation est une équation différentielle non-linéaire à cause de la présence de la fonction sinus. Pour des petits angles, on peut utiliser la série

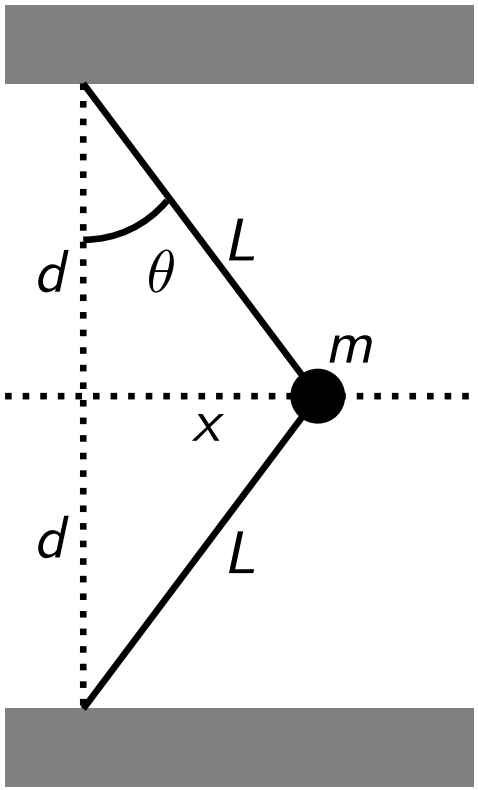
$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \ldots$$

L'équation devient donc

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta - \frac{g}{6\ell}\theta^3 = 0.$$

Exemples

Oscillations d'une masse attachée à des cordes tendues



Equation non-linéaire du type :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + (\frac{2k(d-L)}{d})x + (\frac{kL}{d^3})x^3 = 0.$$

Avant propos

Contexte

Nous traitons dans ce cours de systèmes décrits par des équations différentielles non-linéaires ordinaires :

- oscillations non-linéaires ou
- systèmes dynamiques.

Avant propos

Contexte

Nous traitons dans ce cours de systèmes décrits par des équations différentielles non-linéaires ordinaires :

- oscillations non-linéaires ou
- systèmes dynamiques.

- Système physique généralement décrit par des équations différentielles linéaires.

Avant propos

Contexte

Nous traitons dans ce cours de systèmes décrits par des équations différentielles non-linéaires ordinaires :

- oscillations non-linéaires ou
- systèmes dynamiques.

- Système physique généralement décrit par des équations différentielles linéaires.
- Résolution d'équations différentielles non-linéaires généralement impossible.

Avant propos

Contexte

Nous traitons dans ce cours de systèmes décrits par des équations différentielles non-linéaires ordinaires :

- oscillations non-linéaires ou
- systèmes dynamiques.

- Système physique généralement décrit par des équations différentielles linéaires.
- Résolution d'équations différentielles non-linéaires généralement impossible.
  - $\Rightarrow$ linéarisation autour de points singuliers,
  - $\Rightarrow$ Description satisfaisante dans beaucoup de cas rencontrés.

Avant propos

Contexte

Nous traitons dans ce cours de systèmes décrits par des équations différentielles non-linéaires ordinaires :

- oscillations non-linéaires ou
- systèmes dynamiques.

- Système physique généralement décrit par des équations différentielles linéaires.
- Résolution d'équations différentielles non-linéaires généralement impossible.
- Certain cas où la représentation linéarisée n'est pas suffisament précise (osc. fortes amplitudes).

Avant propos

Contexte

Nous traitons dans ce cours de systèmes décrits par des équations différentielles non-linéaires ordinaires :

- oscillations non-linéaires ou
- systèmes dynamiques.

- Système physique généralement décrit par des équations différentielles linéaires.
- Résolution d'équations différentielles non-linéaires généralement impossible.
- Certain cas où la représentation linéarisée n'est pas suffisament précise (osc. fortes amplitudes).
- Sous certaines conditions : comportements qualitativement inexplicables à partir d'une description linéaire (oscillations forcées sous-harmonique, synchronisation, régime permanent d'oscillations périodiques d'amplitude indépendante des conditions initiales).

Plan du cours

1^{er} partie : Oscillateur à 1 degré de liberté (oscillateur de Duffing et de Van der Pol).

Méthodes analytiques approchées : représentation par des développements en série des solutions en régime permanent

- méthode des petites perturbations,
- échelles multiples,
- équilibrage harmonique.

Plan du cours

1^{er} partie : Oscillateur à 1 degré de liberté (oscillateur de Duffing et de Van der Pol).

Méthodes analytiques approchées : représentation par des développements en série des solutions en régime permanent

- méthode des petites perturbations,
- échelles multiples,
- équilibrage harmonique.

2^{ieme} partie : Aperçu de l'analyse des systèmes dynamiques.

Introduction des notions

- d'attracteur,
- de stabilité,
- de bifurcation dans l'espace des phases,
- de chaos déterministe.

Définition

Les systèmes non-linéaires sont définis à partir des systèmes linéaires, systèmes décrits par des équations linéaires.

Définition

Les systèmes non-linéaires sont définis à partir des systèmes linéaires, systèmes décrits par des équations linéaires.

- la réponse à une entrée sinusoïdale est également sinusoïdale,

Définition

Les systèmes non-linéaires sont définis à partir des systèmes linéaires, systèmes décrits par des équations linéaires.

- la réponse à une entrée sinusoïdale est également sinusoïdale,
- le rapport de leurs amplitudes et de leur déphasage ne dépendent que de la fréquence pas de l'amplitude du signal d'entrée.

Définition

Les systèmes non-linéaires sont définis à partir des systèmes linéaires, systèmes décrits par des équations linéaires.

- la réponse à une entrée sinusoïdale est également sinusoïdale,
- le rapport de leurs amplitudes et de leur déphasage ne dépendent que de la fréquence pas de l'amplitude du signal d'entrée.
- Les systèmes non-linéaires, par opposition aux systèmes linéaires sont des systèmes qui ne sont pas régit par des équations linéaires.

Définition

Les systèmes non-linéaires sont définis à partir des systèmes linéaires, systèmes décrits par des équations linéaires.

- la réponse à une entrée sinusoïdale est également sinusoïdale,
- le rapport de leurs amplitudes et de leur déphasage ne dépendent que de la fréquence pas de l'amplitude du signal d'entrée.
- Les systèmes non-linéaires, par opposition aux systèmes linéaires sont des systèmes qui ne sont pas régit par des équations linéaires.
- Le principe de superposition ne s'applique pas.

La distortion harmonique

La génération d'harmoniques supérieures à partir d'une entrée purement harmonique.

Si $e(t) = e\sin(\omega t)$, alors $s(t)$ est périodique mais à priori non sinusoïdale

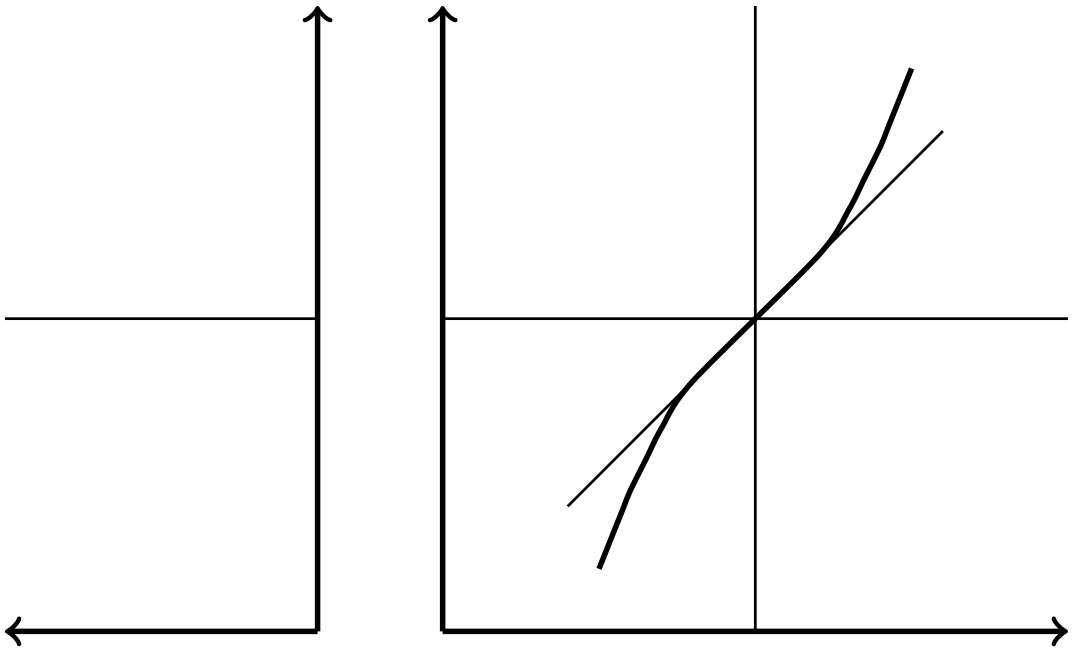
$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(n\omega t) + b_n \cos(n\omega t)$$

où a_n et b_n sont des fonctions de ω mais aussi de l'amplitude de l'entrée e. Si en série il existe un filtre passe bas adapté, il se peut que la sortie soit sinusoïdale ; on définit alors une "fonction de transfert équivalente" $H_{eq}(j\omega, e)$ qui dépend directement de l'amplitude de l'entrée.

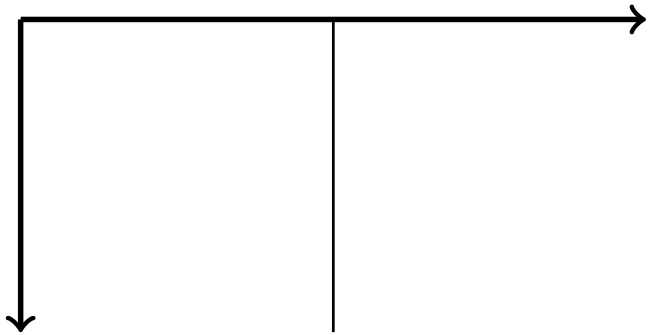
La distortion harmonique

$$s(t) = NL[e(t)]$$
$$= k * e(t) + k' * e^3(t)$$

La distortion harmonique

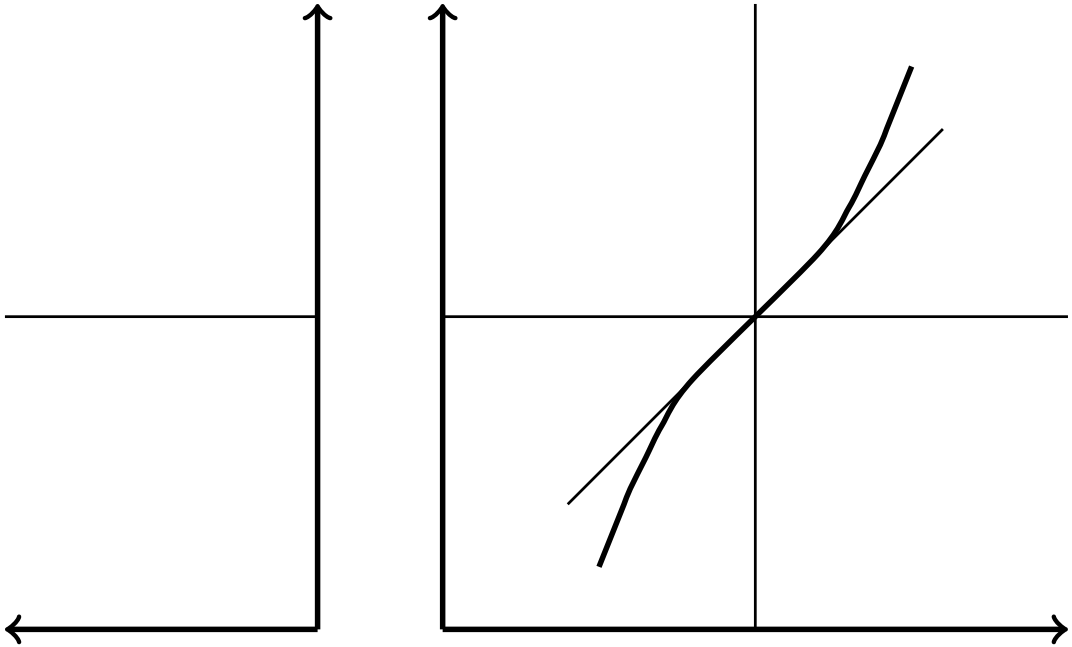


$$s(t) = NL[e(t)]$$
$$= k * e(t) + k' * e^3(t)$$

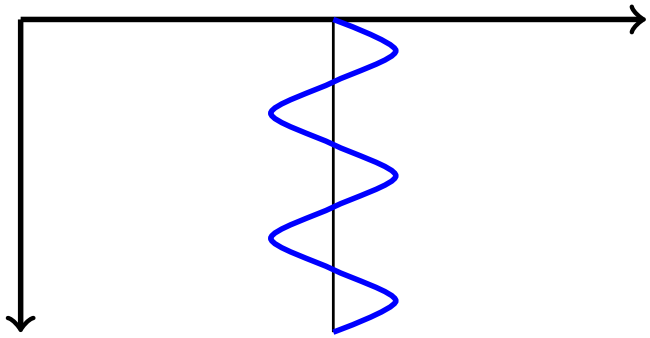


La distortion harmonique

Amplitude faible

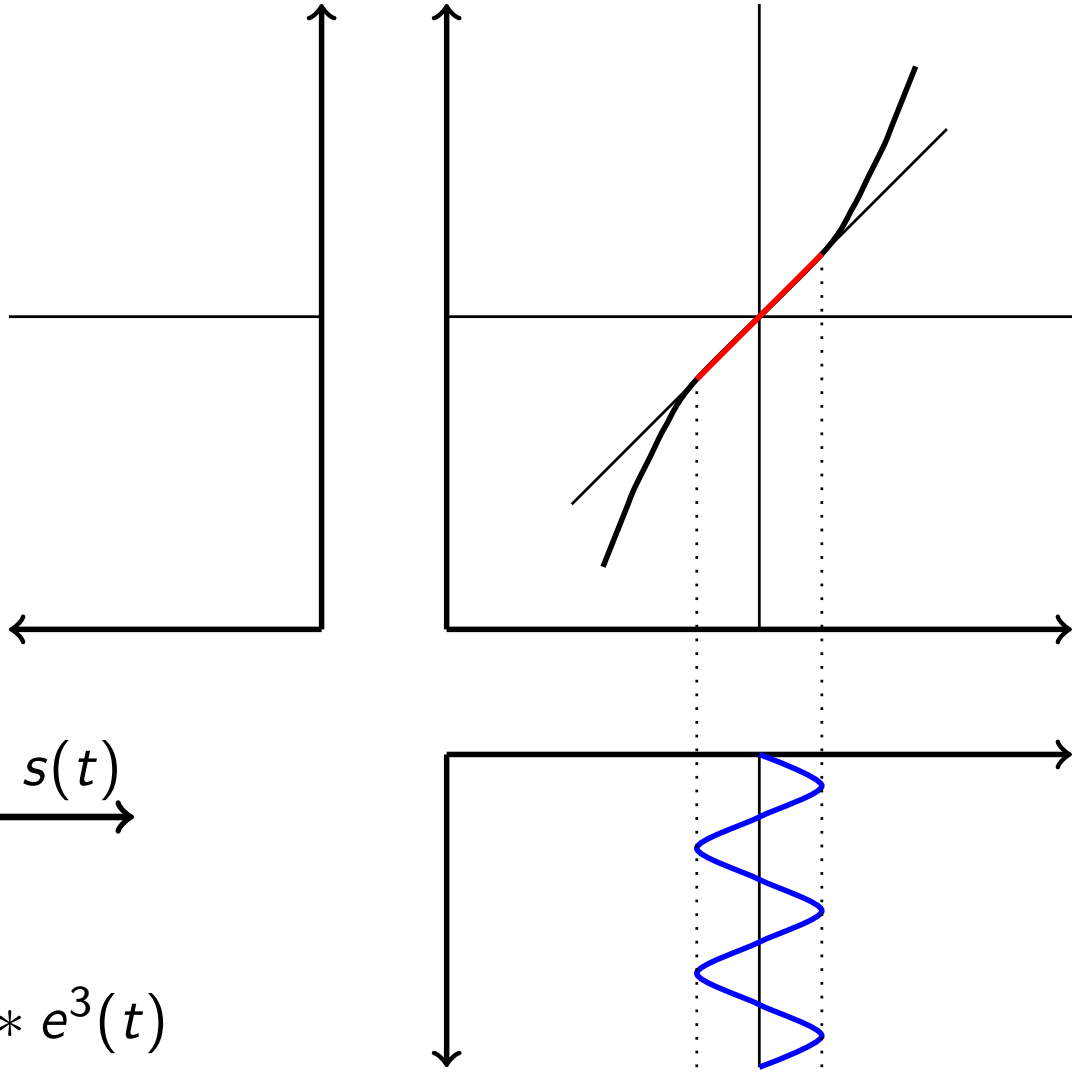


$$s(t) = NL[e(t)]$$
$$= k * e(t) + k' * e^3(t)$$



La distortion harmonique

Amplitude faible



$$s(t) = NL[e(t)]$$
$$= k * e(t) + k' * e^3(t)$$

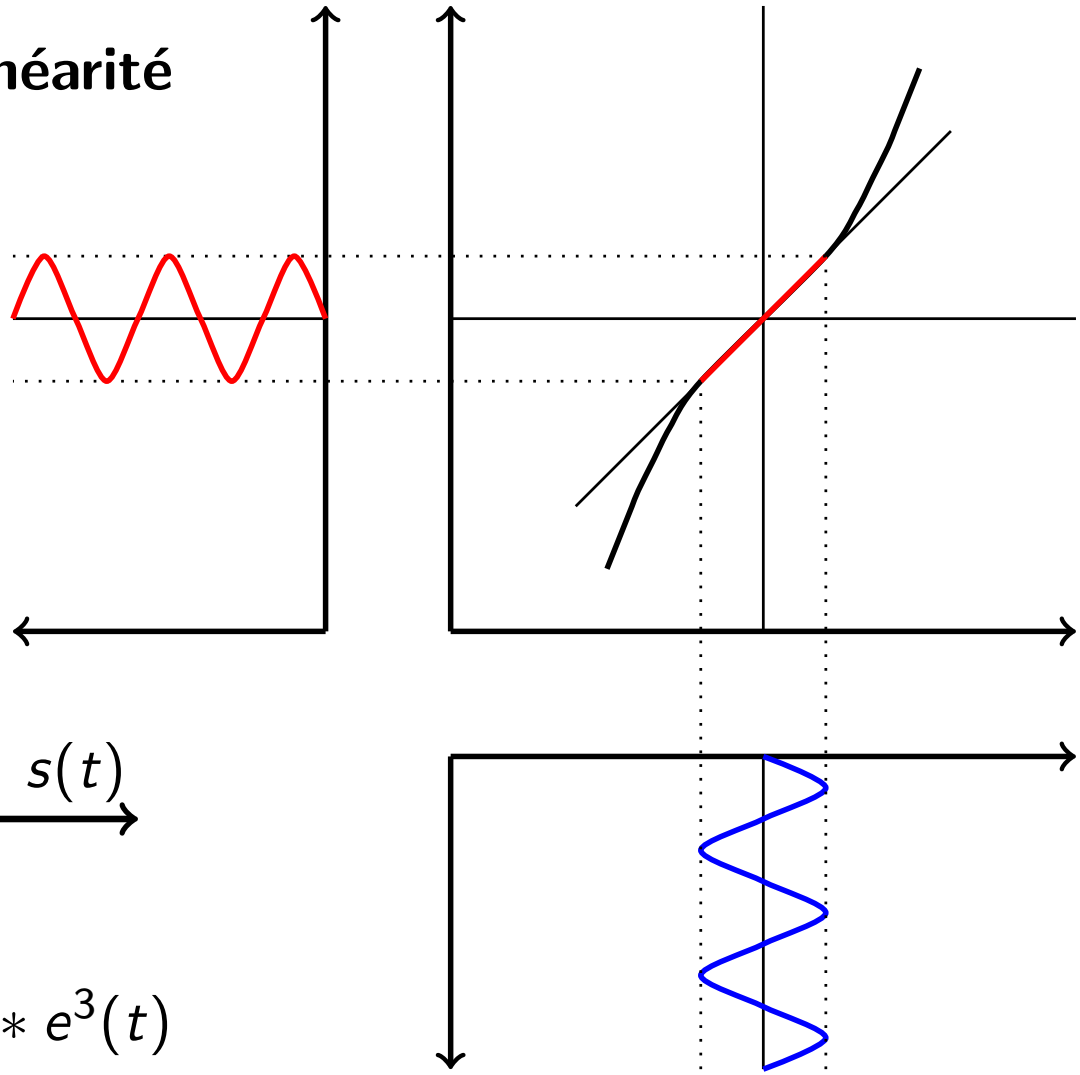
La distortion harmonique

Domaine de linéarité

Amplitude faible

↓

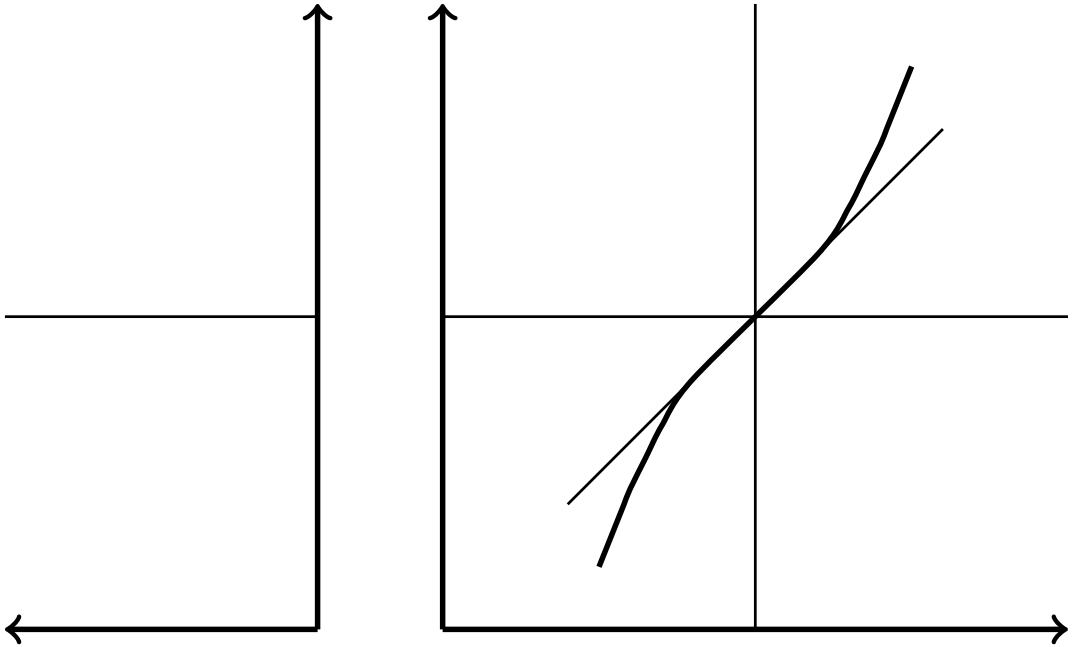
Réponse sinusoïdale



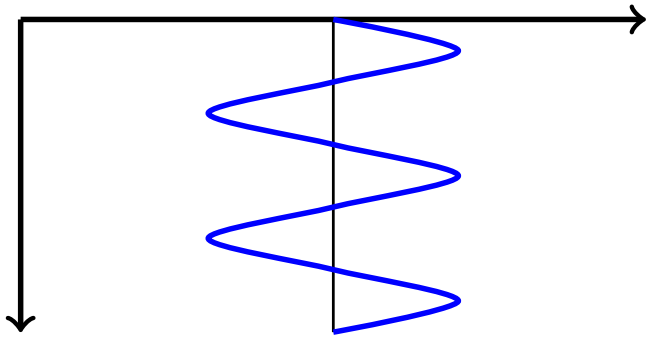
$$s(t) = NL[e(t)]$$
$$= k * e(t) + k' * e^3(t)$$

La distortion harmonique

Forte amplitude

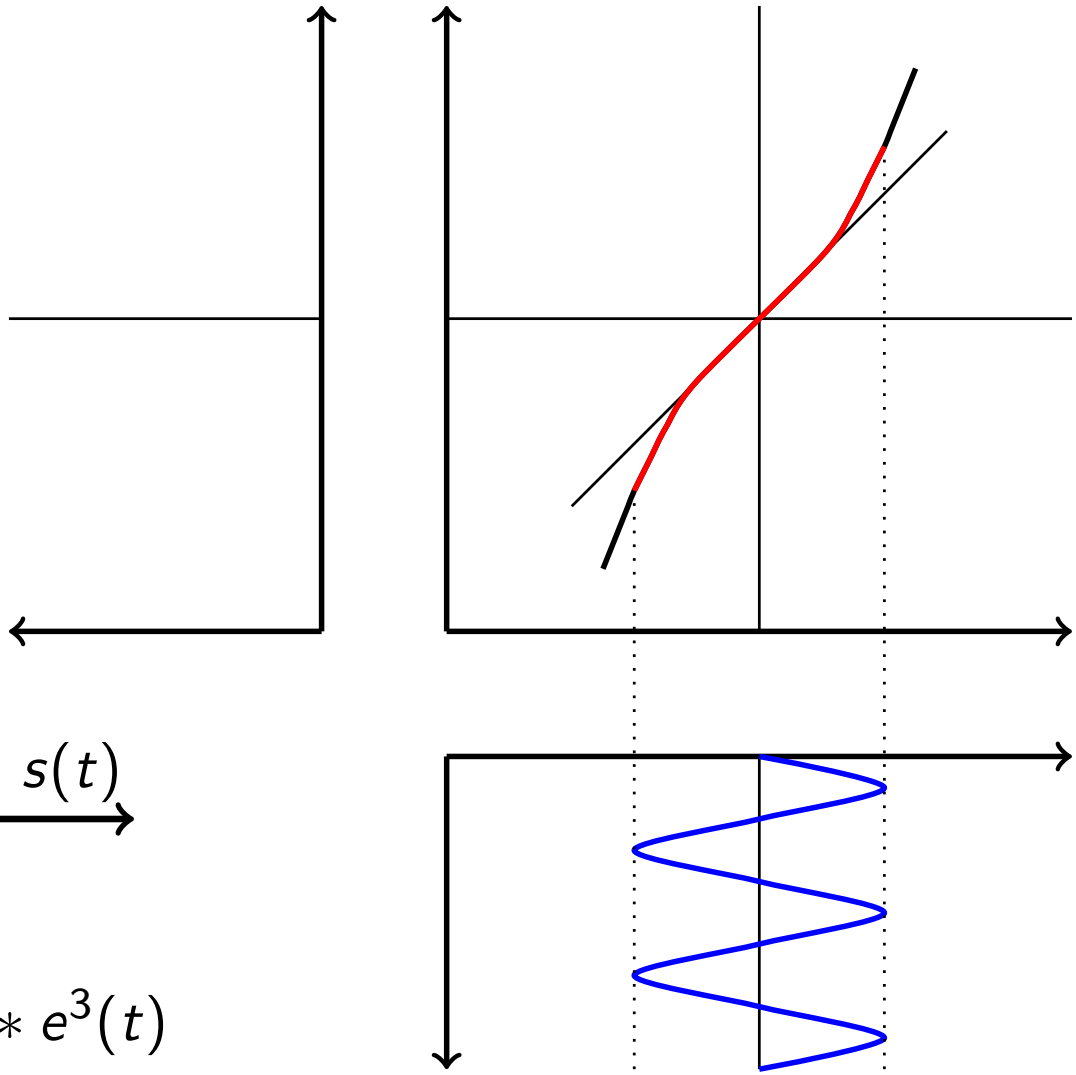


$$s(t) = NL[e(t)]$$
$$= k * e(t) + k' * e^3(t)$$



La distortion harmonique

Forte amplitude



$$s(t) = NL[e(t)]$$
$$= k * e(t) + k' * e^3(t)$$

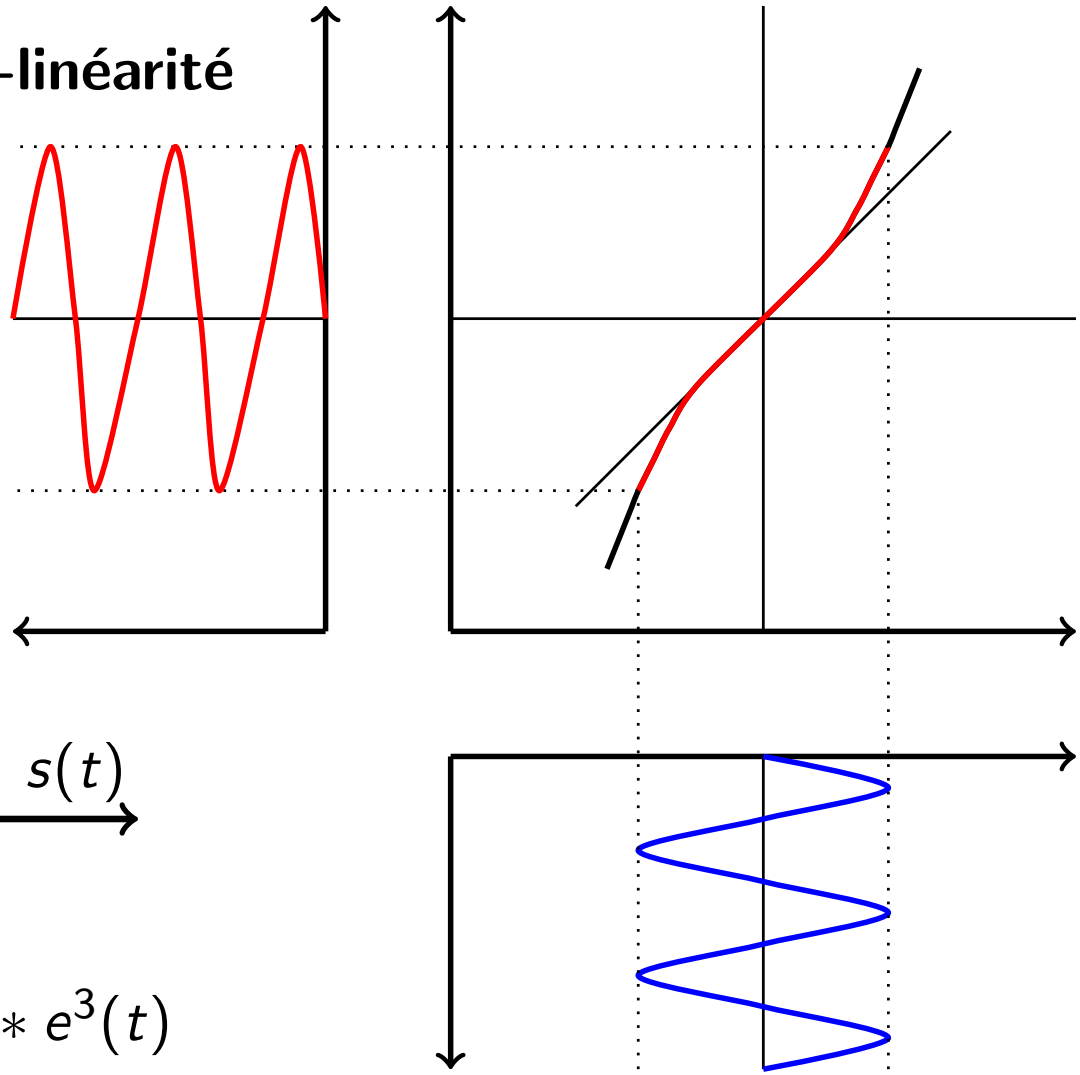
La distortion harmonique

Domaine de non-linéarité

Forte amplitude

↓

Réponse "distordue"



$$s(t) = NL[e(t)]$$
$$= k * e(t) + k' * e^3(t)$$

Les auto-oscillations ou oscillations auto-entretenues

Les auto-oscillations ou oscillations auto-entretenues

Oscillateur de Van der Pol en oscillations libres :

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0. \qquad (1)$$

Les auto-oscillations ou oscillations auto-entretenues

Oscillateur de Van der Pol en oscillations libres :

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0. \qquad (1)$$

Solution sous la forme $x(t) = a\cos(\omega t)$ (a et ω indéterminés et les harmoniques supérieures sont négligées).

Les auto-oscillations ou oscillations auto-entretenues

Oscillateur de Van der Pol en oscillations libres :

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0. \quad (1)$$

Solution sous la forme $x(t) = a\cos(\omega t)$ (a et ω indéterminés et les harmoniques supérieures sont négligées).

(2)

Les auto-oscillations ou oscillations auto-entretenues

Oscillateur de Van der Pol en oscillations libres :

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0. \quad (1)$$

Solution sous la forme $x(t) = a\cos(\omega t)$ (a et ω indéterminés et les harmoniques supérieures sont négligées).

$$a(\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t) + \mu\omega_0(\beta a^2 \cos^2(\omega t) - 1)(-a\omega)\sin(\omega t) = 0 \quad (2)$$

Les auto-oscillations ou oscillations auto-entretenues

Oscillateur de Van der Pol en oscillations libres :

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0. \tag{1}$$

Solution sous la forme $x(t) = a\cos(\omega t)$ (a et ω indéterminés et les harmoniques supérieures sont négligées).

$$\begin{aligned} a(\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t) + \mu\omega_0(\beta a^2\cos^2(\omega t) - 1)(-a\omega)\sin(\omega t) &= 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t) - \mu\omega_0\omega(\tfrac{1}{4}\beta a^2 - 1)\sin(\omega t) - \mu\omega_0\omega\frac{\beta a^2}{2}\sin(3\omega t) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Les auto-oscillations ou oscillations auto-entretenues

Oscillateur de Van der Pol en oscillations libres :

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0. \qquad (1)$$

Solution sous la forme $x(t) = a\cos(\omega t)$ (a et ω indéterminés et les harmoniques supérieures sont négligées).
Par hypothèse on néglige les termes en $\sin(3\omega t)$ et l'on obtient

$$\forall t \begin{cases} \omega_0^2 - \omega^2 = 0, & \omega = \omega_0 \\ \frac{1}{4}\beta a^2 - 1 = 0, & a = 2/\sqrt{\beta} \end{cases}$$

Les auto-oscillations ou oscillations auto-entretenues

Oscillateur de Van der Pol en oscillations libres :

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0. \qquad (1)$$

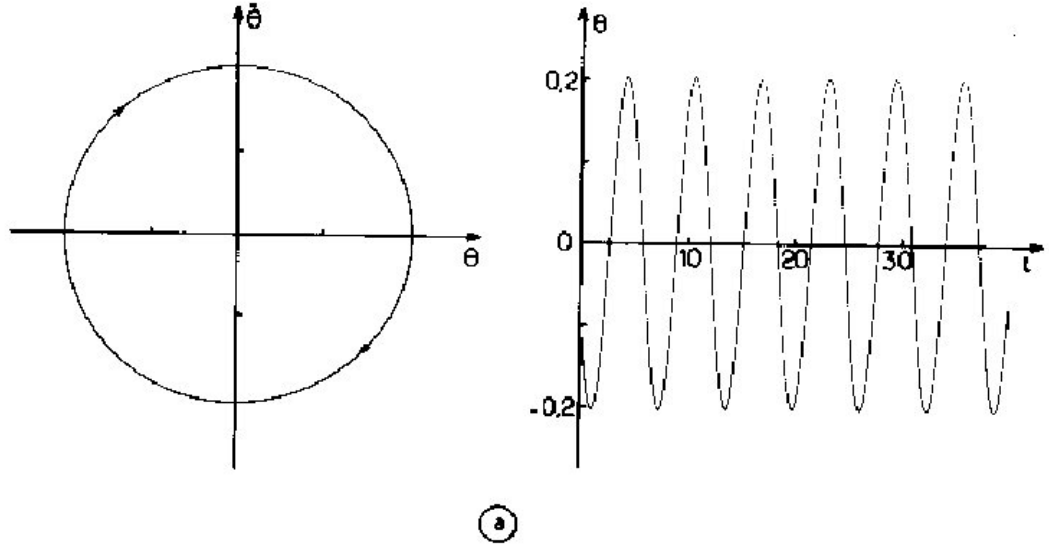
Solution sous la forme $x(t) = a\cos(\omega t)$ (a et ω indéterminés et les harmoniques supérieures sont négligées).
Par hypothèse on néglige les termes en $\sin(3\omega t)$ et l'on obtient

$$\forall t \begin{cases} \omega_0^2 - \omega^2 = 0, & \omega = \omega_0 \\ \frac{1}{4}\beta a^2 - 1 = 0, & a = 2/\sqrt{\beta} \end{cases}$$

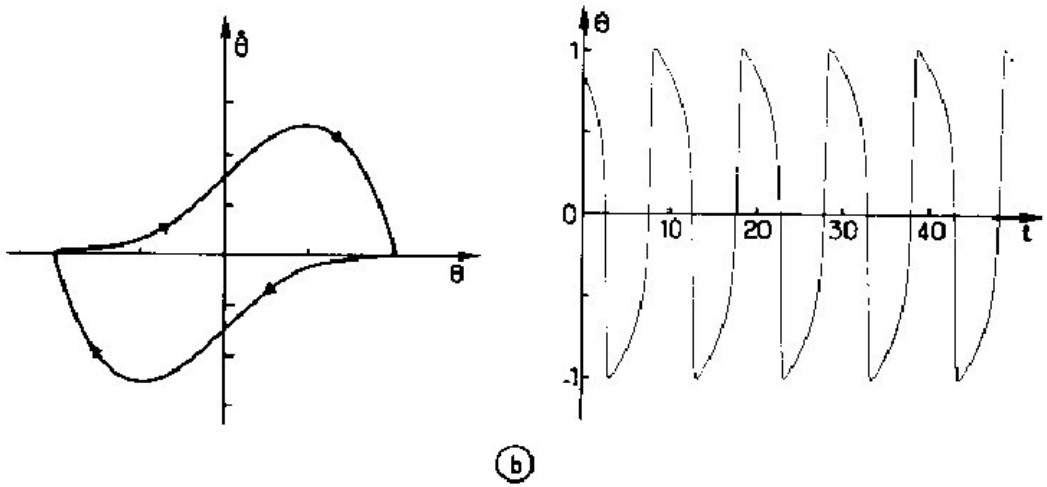
Système non-linéaire en oscillations libres

$\Rightarrow$ amplitude constante ind. des C.I.

$\Rightarrow$ fréquence d'oscillation du système non amorti



(a)



(b)

Oscillateur de Duffing

Oscillateur de Duffing

Les effets non-linéaires peuvent apparaître par de nombreuses voies. L'exemple le plus classique est la prise en compte d'une raideur non-linéaire dans l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique amorti, la force de rappel n'est plus proportionnelle au déplacement.

Oscillateur de Duffing

Les effets non-linéaires peuvent apparaître par de nombreuses voies. L'exemple le plus classique est la prise en compte d'une raideur non-linéaire dans l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique amorti, la force de rappel n'est plus proportionnelle au déplacement.

- Pour le cas de non-linéarité symétrique, l'équation de mouvement prend la forme suivante :

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = 0 \qquad \text{en oscillations libres}$$
$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P\sin(\omega t) \qquad \text{en oscillations forcées}$$

Oscillateur de Duffing

Les effets non-linéaires peuvent apparaître par de nombreuses voies. L'exemple le plus classique est la prise en compte d'une raideur non-linéaire dans l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique amorti, la force de rappel n'est plus proportionnelle au déplacement.

- Pour le cas de non-linéarité symétrique, l'équation de mouvement prend la forme suivante :

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = 0 \qquad \text{en oscillations libres}$$
$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P\sin(\omega t) \qquad \text{en oscillations forcées}$$

- Recherche des solutions périodiques $\Rightarrow$ méthodologie différente selon que l'on soit ou près de la résonance.

Sommaire

1 Avant propos

2 Introduction

3 Oscillateur de Duffing
- Oscillations forcées loin de la résonance
- Oscillations forcées près de la résonance
- Oscillations sous harmoniques

4 Oscillateur de Van der Pol

Méthode des perturbations : principe

Faire apparaître un paramètre, appelé petit paramètre μ, et de séparer l'équation différentielle en une "équation génératrice" et un "terme de perturbation" (cas sans perte) :

Méthode des perturbations : principe

Faire apparaître un paramètre, appelé petit paramètre μ, et de séparer l'équation différentielle en une "équation génératrice" et un "terme de perturbation" (cas sans perte) :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x \qquad = P \sin(\omega t) \quad \text{équation génératrice,}$$

Méthode des perturbations : principe

Faire apparaître un paramètre, appelé petit paramètre μ, et de séparer l'équation différentielle en une "équation génératrice" et un "terme de perturbation" (cas sans perte) :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x & = P\sin(\omega t) \quad \text{équation génératrice,} \\ +\mu x^3 & \quad \text{terme de perturbation} \end{aligned}$$

Méthode des perturbations : principe

Faire apparaître un paramètre, appelé petit paramètre μ, et de séparer l'équation différentielle en une "équation génératrice" et un "terme de perturbation" (cas sans perte) :

$$\begin{array}{lll} \ddot{x} + \omega_0^2 x & = P\sin(\omega t) & \text{équation génératrice,} \\ +\mu x^3 & & \text{terme de perturbation} \end{array}$$

- $x_0(t)$ une solution périodique (régime permanent)

$$x_0(t) = \frac{P}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t) \Rightarrow \text{Solution génératrice}$$

Méthode des perturbations : principe

Faire apparaître un paramètre, appelé petit paramètre μ, et de séparer l'équation différentielle en une "équation génératrice" et un "terme de perturbation" (cas sans perte) :

$$\begin{array}{lll} \ddot{x} + \omega_0^2 x & = P\sin(\omega t) & \text{équation génératrice,} \\ +\mu x^3 & & \text{terme de perturbation} \end{array}$$

- $x_0(t)$ une solution périodique (régime permanent)

$$x_0(t) = \frac{P}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t) \Rightarrow \text{Solution génératrice}$$

- Rechercher la solution périodique de l'équation initiale sous forme d'un développement en série de Taylor :

$$x(t,\mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \mu^3 x_3(t) + \mu^4 x_4(t) + \mu^5 x_5(t) + \ldots$$

Méthode des perturbations : principe

Faire apparaître un paramètre, appelé petit paramètre μ, et de séparer l'équation différentielle en une "équation génératrice" et un "terme de perturbation" (cas sans perte) :

$$\begin{array}{lll} \ddot{x} + \omega_0^2 x & = P\sin(\omega t) & \text{équation génératrice,} \\ +\mu x^3 & & \text{terme de perturbation} \end{array}$$

- $x_0(t)$ une solution périodique (régime permanent)

$$x_0(t) = \frac{P}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t) \Rightarrow \text{Solution génératrice}$$

- Rechercher la solution périodique de l'équation initiale sous forme d'un développement en série de Taylor :

$$x(t,\mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \mu^3 x_3(t) + \mu^4 x_4(t) + \mu^5 x_5(t) + \ldots$$

- Reporter $x(t,\mu)$ dans l'équation initiale et identifier les termes de même degré en μ,

Méthode des perturbations : principe

Faire apparaître un paramètre, appelé petit paramètre μ, et de séparer l'équation différentielle en une "équation génératrice" et un "terme de perturbation" (cas sans perte) :

$$\begin{array}{lll} \ddot{x} + \omega_0^2 x & = P\sin(\omega t) & \text{équation génératrice,} \\ +\mu x^3 & & \text{terme de perturbation} \end{array}$$

- $x_0(t)$ une solution périodique (régime permanent)

$$x_0(t) = \frac{P}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t) \Rightarrow \text{Solution génératrice}$$

- Rechercher la solution périodique de l'équation initiale sous forme d'un développement en série de Taylor :

$$x(t,\mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \mu^3 x_3(t) + \mu^4 x_4(t) + \mu^5 x_5(t) + \ldots$$

- Reporter $x(t,\mu)$ dans l'équation initiale et identifier les termes de même degré en μ,
- Résolution d'équations successives en $x_1(t)$, $x_2(t)$, ...

Application : équation de Duffing sans perte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - P\sin(\omega t) = -\mu x^3$$

Application : équation de Duffing sans perte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - P\sin(\omega t) = -\mu x^3$$

Calcul au premier ordre en μ : $x(t,\mu) = x_0(t) + \mu x_1(t)$

Application : équation de Duffing sans perte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - P\sin(\omega t) = -\mu x^3$$

Calcul au premier ordre en μ : $x(t,\mu) = x_0(t) + \mu x_1(t)$

Regime permanent ou solution génératrice $x_0(t) = \frac{P}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t)$

Application : équation de Duffing sans perte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - P\sin(\omega t) = -\mu x^3$$

Calcul au premier ordre en μ : $x(t,\mu) = x_0(t) + \mu x_1(t)$

Regime permanent ou solution génératrice $x_0(t) = \frac{P}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t)$

L'identification des termes de premier degré en μ donne :

Application : équation de Duffing sans perte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - P\sin(\omega t) = -\mu x^3$$

Calcul au premier ordre en μ : $x(t,\mu) = x_0(t) + \mu x_1(t)$

Regime permanent ou solution génératrice $x_0(t) = \frac{P}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t)$

L'identification des termes de premier degré en μ donne :

$$\ddot{x_1} + \omega_0^2 x_1 = -\frac{P^3}{(\omega_0^2 - \omega^2)^3}\sin^3(\omega t) = -\frac{P^3}{(\omega_0^2 - \omega^2)^3}\frac{1}{4}(3\sin(\omega t) - \sin(3\omega t))$$

Application : équation de Duffing sans perte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - P\sin(\omega t) = -\mu x^3$$

Calcul au premier ordre en μ : $x(t,\mu) = x_0(t) + \mu x_1(t)$

Regime permanent ou solution génératrice $x_0(t) = \frac{P}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t)$

L'identification des termes de premier degré en μ donne :

$$x_1(t) = -\frac{P^3}{(\omega_0^2-\omega^2)^3}\left[\frac{3}{4(\omega_0^2-\omega^2)}\sin(\omega t) - \frac{1}{4(\omega_0^2-\omega^2)}\sin(3\omega t)\right].$$

Application : équation de Duffing sans perte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - P\sin(\omega t) = -\mu x^3$$

Calcul au premier ordre en μ : $x(t,\mu) = x_0(t) + \mu x_1(t)$

Regime permanent ou solution génératrice $x_0(t) = \frac{P}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t)$

$$x(t) = \left(\frac{P}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\left[1 - \mu\frac{3P^2}{4(\omega_0^2 - \omega^2)^3}\right]\sin(\omega t) + \mu\frac{P^3}{4(\omega_0^2 - \omega^2)^3(\omega_0^2 - 9\omega^2)}\sin(3\omega t).$$

Application : équation de Duffing sans perte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - P\sin(\omega t) = -\mu x^3$$

Calcul au premier ordre en μ : $x(t,\mu) = x_0(t) + \mu x_1(t)$

Regime permanent ou solution génératrice $x_0(t) = \frac{P}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t)$

$$x(t) = \left(\frac{P}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\left[1 - \mu\frac{3P^2}{4(\omega_0^2 - \omega^2)^3}\right]\sin(\omega t) + \mu\frac{P^3}{4(\omega_0^2 - \omega^2)^3(\omega_0^2 - 9\omega^2)}\sin(3\omega t).$$

Fonction de transfert équivalente

Application : équation de Duffing sans perte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - P\sin(\omega t) = -\mu x^3$$

Calcul au premier ordre en μ : $x(t,\mu) = x_0(t) + \mu x_1(t)$

Regime permanent ou solution génératrice $x_0(t) = \frac{P}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t)$

$$x(t) = \left(\frac{P}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\left[1 - \mu\frac{3P^2}{4(\omega_0^2 - \omega^2)^3}\right]\sin(\omega t) + \mu\frac{P^3}{4(\omega_0^2 - \omega^2)^3(\omega_0^2 - 9\omega^2)}\sin(3\omega t).$$

Fonction de transfert équivalente

Distortion

Application : équation de Duffing sans perte

Ce résultat fait apparaître les deux phénomènes typiquement non-linéaires

Application : équation de Duffing sans perte

Ce résultat fait apparaître les deux phénomènes typiquement non-linéaires

- la distortion non-linéaire (apparition de l'harmonique 3) et

Application : équation de Duffing sans perte

Ce résultat fait apparaître les deux phénomènes typiquement non-linéaires

- la distortion non-linéaire (apparition de l'harmonique 3) et
- la dépendance en amplitude de la grandeur d'entrée (P) dans la fonction de transfert équivalente.

Application : équation de Duffing sans perte

Ce résultat fait apparaître les deux phénomènes typiquement non-linéaires

- la distortion non-linéaire (apparition de l'harmonique 3) et
- la dépendance en amplitude de la grandeur d'entrée (P) dans la fonction de transfert équivalente.

Remarque :

- Si $\omega_0 \simeq \omega$ alors $(\omega_0^2 - \omega^2)^{-1}$ devient très grand.

Application : équation de Duffing sans perte

Ce résultat fait apparaître les deux phénomènes typiquement non-linéaires

- la distortion non-linéaire (apparition de l'harmonique 3) et
- la dépendance en amplitude de la grandeur d'entrée (P) dans la fonction de transfert équivalente.

Remarque :

- Si $\omega_0 \simeq \omega$ alors $(\omega_0^2 - \omega^2)^{-1}$ devient très grand.
- Théoriquement compensé par μ ! ! !

Application : équation de Duffing sans perte

Ce résultat fait apparaître les deux phénomènes typiquement non-linéaires

- la distortion non-linéaire (apparition de l'harmonique 3) et
- la dépendance en amplitude de la grandeur d'entrée (P) dans la fonction de transfert équivalente.

Remarque :

- Si $\omega_0 \simeq \omega$ alors $(\omega_0^2 - \omega^2)^{-1}$ devient très grand.
- Théoriquement compensé par μ ! ! !
- Malheureusement, ce sont des problèmes concrets et donc μ est entièrement défini.

Application : équation de Duffing sans perte

Ce résultat fait apparaître les deux phénomènes typiquement non-linéaires

- la distortion non-linéaire (apparition de l'harmonique 3) et
- la dépendance en amplitude de la grandeur d'entrée (P) dans la fonction de transfert équivalente.

Remarque :

- Si $\omega_0 \simeq \omega$ alors $(\omega_0^2 - \omega^2)^{-1}$ devient très grand.
- Théoriquement compensé par μ ! ! !
- Malheureusement, ce sont des problèmes concrets et donc μ est entièrement défini.

$\Rightarrow$ La série $x(t, \mu)$ diverge ! !

Application : équation de Duffing sans perte

Ce résultat fait apparaître les deux phénomènes typiquement non-linéaires

- la distortion non-linéaire (apparition de l'harmonique 3) et
- la dépendance en amplitude de la grandeur d'entrée (P) dans la fonction de transfert équivalente.

Remarque :

- Si $\omega_0 \simeq \omega$ alors $(\omega_0^2 - \omega^2)^{-1}$ devient très grand.
- Théoriquement compensé par μ ! ! !
- Malheureusement, ce sont des problèmes concrets et donc μ est entièrement défini.

$\Rightarrow$ La série $x(t, \mu)$ diverge ! !

$\Rightarrow$ Etude particulière lorsque la fréquence des oscillations est proche de celle de la résonance ($\omega \simeq \omega_0$ ou $\omega \simeq \omega_0/3$).

Sommaire

1 Avant propos

2 Introduction

3 Oscillateur de Duffing
- Oscillations forcées loin de la résonance
- Oscillations forcées près de la résonance
- Oscillations sous harmoniques

4 Oscillateur de Van der Pol

Méthode de Poincaré-Lindstedt

- On suppose $|\omega_0^2 - \omega^2|$ petit $\Rightarrow \omega^2 - \omega_0^2 = \mu a$ (a finie)
- On suppose que l'amplitude de la source est petite : $P = \mu P'$

Méthode de Poincaré-Lindstedt

- On suppose $|\omega_0^2 - \omega^2|$ petit $\Rightarrow \omega^2 - \omega_0^2 = \mu a$ (a finie)
- On suppose que l'amplitude de la source est petite : $P = \mu P'$

Equation de Duffing

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Méthode de Poincaré-Lindstedt

Equation de Duffing

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu(P' \sin(\omega t) + ax - x^3)$$

Méthode de Poincaré-Lindstedt

Equation de Duffing

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu(P' \sin(\omega t) + ax - x^3)$$

Equation génératrice

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Méthode de Poincaré-Lindstedt

Equation de Duffing

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu(P' \sin(\omega t) + ax - x^3)$$

Solution génératrice

$$x_0(t) = M_0 \cos(\omega t) + N_0 \sin(\omega t)$$

Méthode de Poincaré-Lindstedt

Equation de Duffing

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu(P' \sin(\omega t) + ax - x^3)$$

Solution génératrice

$$x_0(t) = M_0 \cos(\omega t) + N_0 \sin(\omega t)$$

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t)$$

Méthode de Poincaré-Lindstedt

Equation de Duffing

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu(P' \sin(\omega t) + ax - x^3)$$

Solution génératrice

$$x_0(t) = M_0 \cos(\omega t) + N_0 \sin(\omega t)$$

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t)$$

$$\ddot{x_1} + \omega^2 x_1 = P' \sin(\omega t) + a(M_0 \cos(\omega t) + N_0 \sin(\omega t)) - (M_0 \cos(\omega t) + N_0 \sin(\omega t))^3$$

Méthode de Poincaré-Lindstedt

Equation de Duffing

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu(P' \sin(\omega t) + ax - x^3)$$

Solution génératrice

$$x_0(t) = M_0 \cos(\omega t) + N_0 \sin(\omega t)$$

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x_1} + \omega^2 x_1 = \quad & [aM_0 + (3/4)M_0^2(M_0^2 + N_0^2)]\cos(\omega t) \\ & + [P' + aN_0 + (3/4)N_0(M_0^2 + N_0^2)]\sin(\omega t) \\ & + [\ldots]\cos(3\omega t) + [\ldots]\sin(3\omega t). \end{aligned}$$

- Solution périodique pour $x_1(t) \Rightarrow$ annulation des termes séculaires

$$\begin{cases} aM_0 + (3/4)M_0^2(M_0^2 + N_0^2) = 0 \\ P' + aN_0 + (3/4)N_0(M_0^2 + N_0^2) = 0 \end{cases}$$

Méthode de Poincaré-Lindstedt

Equation de Duffing

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu(P' \sin(\omega t) + ax - x^3)$$

Solution génératrice

$$x_0(t) = M_0 \cos(\omega t) + N_0 \sin(\omega t)$$

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x_1} + \omega^2 x_1 = \quad & [aM_0 + (3/4)M_0^2(M_0^2 + N_0^2)]\cos(\omega t) \\ & + [P' + aN_0 + (3/4)N_0(M_0^2 + N_0^2)]\sin(\omega t) \\ & + [\ldots]\cos(3\omega t) + [\ldots]\sin(3\omega t). \end{aligned}$$

- Solution périodique pour $x_1(t) \Rightarrow$ annulation des termes séculaires

$$\begin{cases} aM_0 + (3/4)M_0^2(M_0^2 + N_0^2) = 0 \\ P' + aN_0 + (3/4)N_0(M_0^2 + N_0^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_0 = 0 \\ P' + aN_0 + (3/4)N_0^3 = 0 \end{cases}$$

Méthode de Poincaré-Lindstedt

Equation de Duffing

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu(P' \sin(\omega t) + ax - x^3)$$

Solution génératrice

$$x_0(t) = M_0 \cos(\omega t) + N_0 \sin(\omega t)$$

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x_1} + \omega^2 x_1 = \quad & [aM_0 + (3/4)M_0^2(M_0^2 + N_0^2)]\cos(\omega t) \\ & + [P' + aN_0 + (3/4)N_0(M_0^2 + N_0^2)]\sin(\omega t) \\ & + [\ldots]\cos(3\omega t) + [\ldots]\sin(3\omega t). \end{aligned}$$

- Solution périodique pour $x_1(t) \Rightarrow$ annulation des termes séculaires

$$\begin{cases} aM_0 + (3/4)M_0^2(M_0^2 + N_0^2) = 0 \\ P' + aN_0 + (3/4)N_0(M_0^2 + N_0^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_0 = 0 \\ P' + aN_0 + (3/4)N_0^3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Equation implicite d'une courbe de résonance

Phénomène d'hystérésis

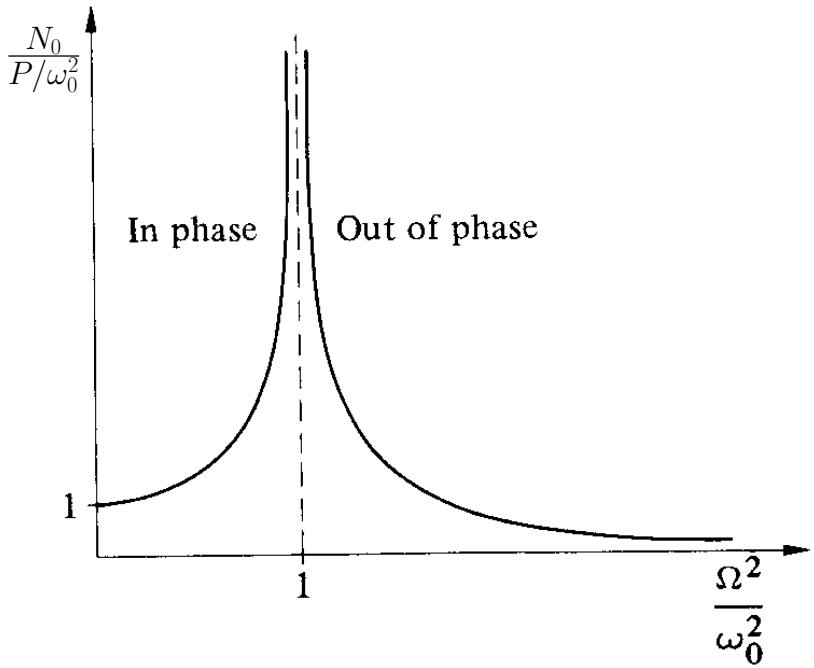


Figure: Courbes de "réponse équivalente" pour le cas linéaire.

"Oscillateur harmonique" $\Rightarrow$ courbe de réponse indépendante de P

Phénomène d'hystérésis

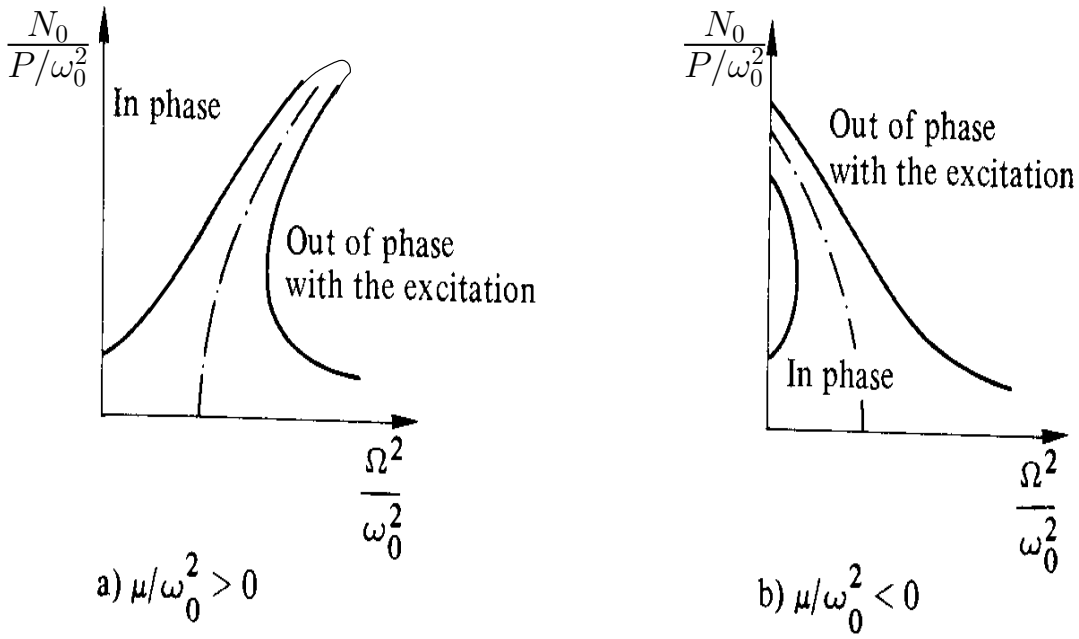
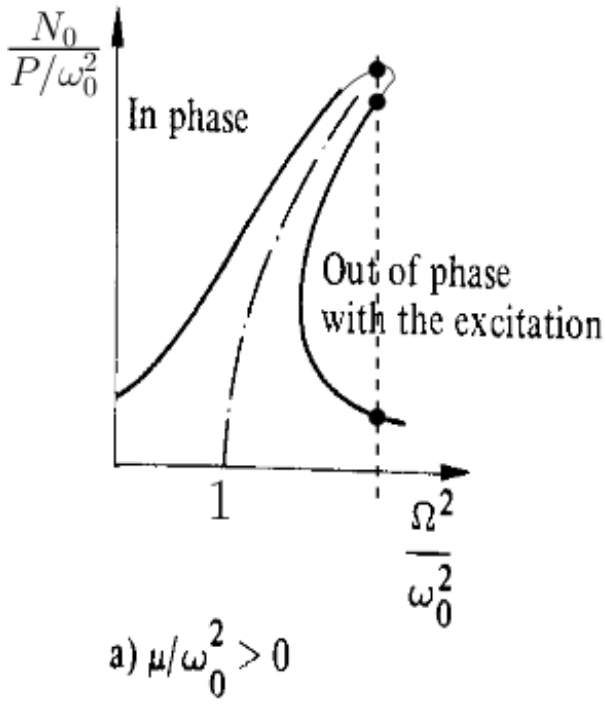


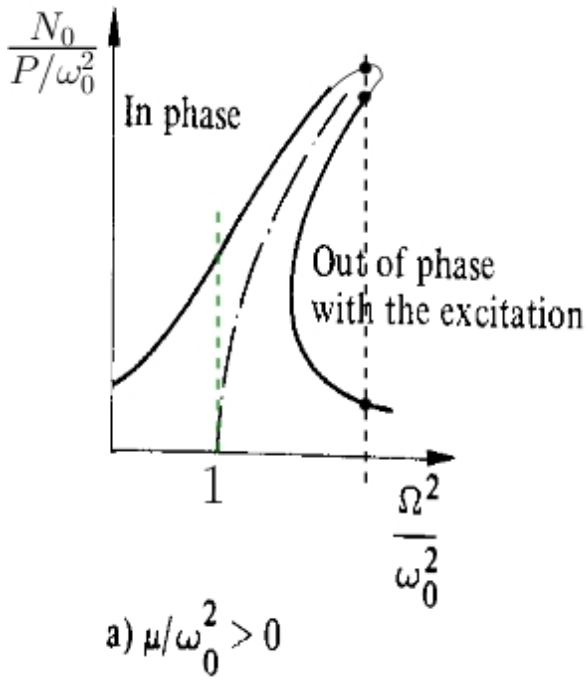
Fig. 1.15. Resonance curves for the non-linear oscillator.

Phénomène d'hystérésis



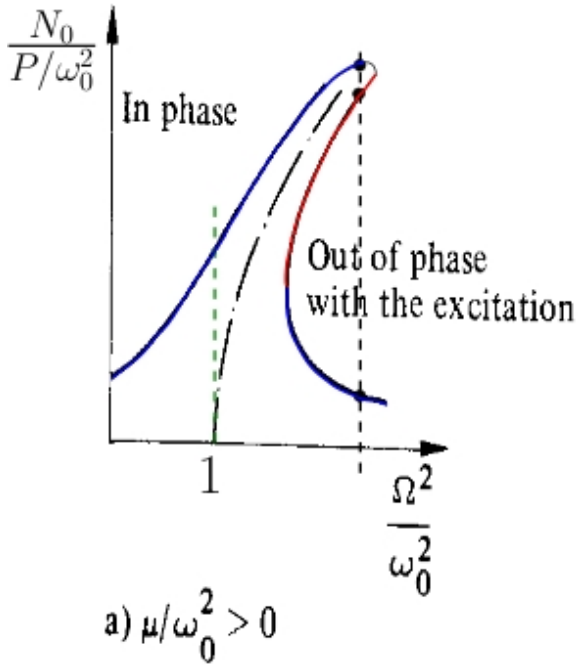
- 1 à 3 solutions pour une valeur donnée de ω

Phénomène d'hystérésis



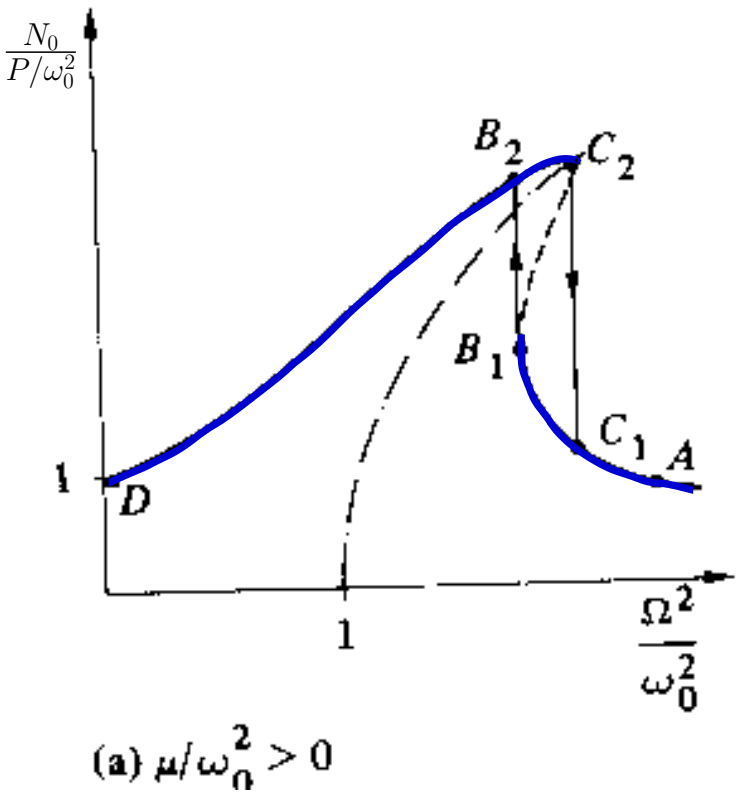
- 1 à 3 solutions pour une valeur donnée de ω
- Solution $\forall\ \mu$ malgré l'absence de perte

Phénomène d'hystérésis



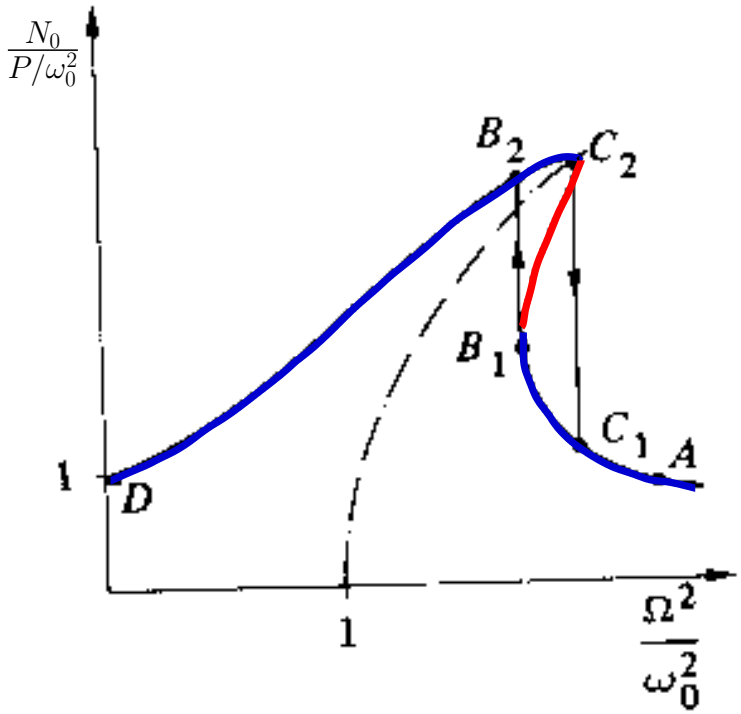
- 1 à 3 solutions pour une valeur donnée de ω
- Solution $\forall$ μ malgré l'absence de perte
- Zones de stabilité et d'instabilité

Phénomène de saut et d'hystérésis



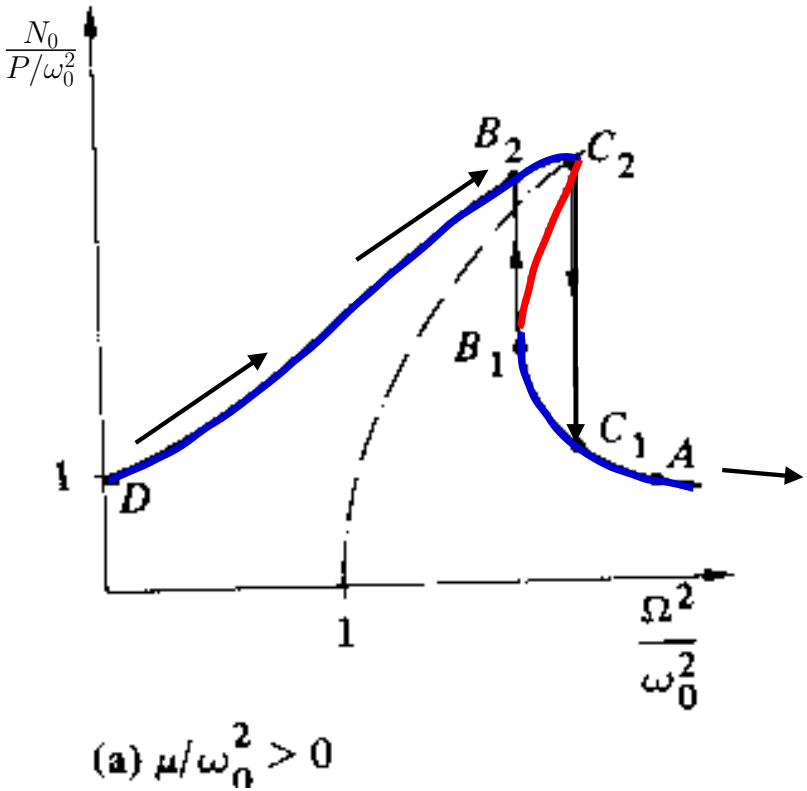
(a) $\mu/\omega_0^2 > 0$

Phénomène de saut et d'hystérésis



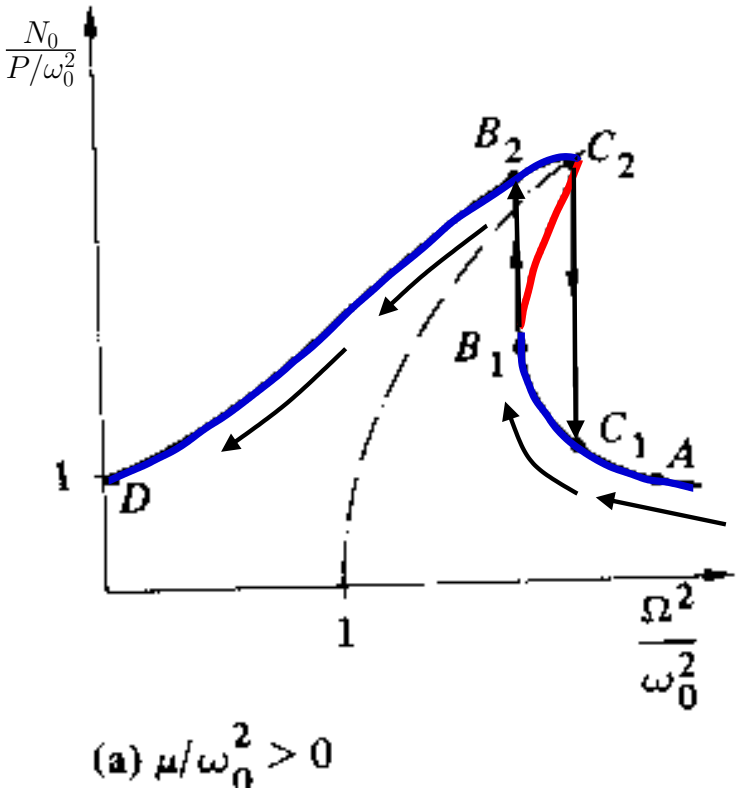
(a) $\mu/\omega_0^2 > 0$

Phénomène de saut et d'hystérésis



(a) $\mu/\omega_0^2 > 0$

Phénomène de saut et d'hystérésis



(a) $\mu/\omega_0^2 > 0$

Synthèse

- Distortion harmonique : apparition d'harmoniques supérieures pour un régime forcé,

Synthèse

- Distortion harmonique : apparition d'harmoniques supérieures pour un régime forcé,
- Dépendance de la réponse en fréquence du système non-linéaire à l'amplitude de l'entrée,

Synthèse

- Distortion harmonique : apparition d'harmoniques supérieures pour un régime forcé,
- Dépendance de la réponse en fréquence du système non-linéaire à l'amplitude de l'entrée,
- Phénomène de saut : discontinuité de la réponse en fréquence autour de la résonance,

Synthèse

- Distortion harmonique : apparition d'harmoniques supérieures pour un régime forcé,
- Dépendance de la réponse en fréquence du système non-linéaire à l'amplitude de l'entrée,
- Phénomène de saut : discontinuité de la réponse en fréquence autour de la résonance,
- Phénomène d'hystérésis : réponse en fréquence dépendante du sens d'évolution de la fréquence.

Equilibrage harmonique (ou balance harmonique)

Principe : solutions périodiques développées en série de Fourier

1. On pose

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(n\omega t) + C_n \sin(n\omega t) = \sum_{n=1}^{N} D_n \sin(n\omega t + \phi_n)$$

.

Equilibrage harmonique (ou balance harmonique)

Principe : solutions périodiques développées en série de Fourier

1. On pose

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(n\omega t) + C_n \sin(n\omega t) = \sum_{n=1}^{N} D_n \sin(n\omega t + \phi_n)$$

.

2. Insérer $x(t)$ dans l'équation différentielle.

Equilibrage harmonique (ou balance harmonique)

Principe : solutions périodiques développées en série de Fourier

1. On pose

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(n\omega t) + C_n \sin(n\omega t) = \sum_{n=1}^{N} D_n \sin(n\omega t + \phi_n)$$

.

2. Insérer $x(t)$ dans l'équation différentielle.
3. Identifier terme à terme les coefficients des $\cos(n\omega t)$ et $\sin(n\omega t)$.

Equilibrage harmonique (ou balance harmonique)

Application à l'oscillateur de Duffing sans perte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Equilibrage harmonique (ou balance harmonique)

Application à l'oscillateur de Duffing sans perte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 1$

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t) + C_1 \sin(\omega t)$$

Equilibrage harmonique (ou balance harmonique)

Application à l'oscillateur de Duffing sans perte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 1$

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t) + C_1 \sin(\omega t)$$

Identification des $\cos(\omega t) \Rightarrow$ $$A_1(\omega_0^2 - \omega^2) + \mu \frac{3}{4} A_1 (A_1^2 + C_1^2) = 0$$

Equilibrage harmonique (ou balance harmonique)

Application à l'oscillateur de Duffing sans perte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 1$

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t) + C_1 \sin(\omega t)$$

Identification des $\cos(\omega t)$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow A_1 = 0$

$$A_1(\omega_0^2 - \omega^2) + \mu \frac{3}{4} A_1 (A_1^2 + C_1^2) = 0$$

Equilibrage harmonique (ou balance harmonique)

Application à l'oscillateur de Duffing sans perte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 1$

$$x(t) = C_1 \sin(\omega t)$$

Identification des $\cos(\omega t)$ $\Rightarrow$ $A_1(\omega_0^2 - \omega^2) + \mu \frac{3}{4} A_1 (A_1^2 + C_1^2) = 0$

$\Rightarrow A_1 = 0$

Equilibrage harmonique (ou balance harmonique)

Application à l'oscillateur de Duffing sans perte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 1$

$$x(t) = C_1 \sin(\omega t)$$

Identification des $\cos(\omega t) \Rightarrow$ $A_1(\omega_0^2 - \omega^2) + \mu \frac{3}{4} A_1 (A_1^2 + C_1^2) = 0$

$\Rightarrow A_1 = 0$

Identification des $\sin(\omega t) \Rightarrow$ $C_1(\omega_0^2 - \omega^2) + \mu \frac{3}{4} C_1 (A_1^2 + C_1^2) = P$

Equilibrage harmonique (ou balance harmonique)

Application à l'oscillateur de Duffing sans perte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 1$

$$x(t) = C_1 \sin(\omega t)$$

Identification des $\cos(\omega t) \Rightarrow$ $\Rightarrow A_1 = 0$

$$A_1(\omega_0^2 - \omega^2) + \mu \frac{3}{4} A_1 (A_1^2 + C_1^2) = 0$$

Identification des $\sin(\omega t) \Rightarrow$

$$C_1(\omega_0^2 - \omega^2) + \mu \frac{3}{4} C_1 (A_1^2 + C_1^2) = P$$

$$C_1(\omega_0^2 - \omega^2) + \mu \frac{3}{4} C_1^3 = P$$

Equilibrage harmonique (ou balance harmonique)

Application à l'oscillateur de Duffing sans perte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 1$

$$x(t) = C_1 \sin(\omega t)$$

Identification des $\cos(\omega t) \Rightarrow$ $A_1(\omega_0^2 - \omega^2) + \mu \frac{3}{4} A_1 (A_1^2 + C_1^2) = 0$

$\Rightarrow A_1 = 0$

Identification des $\sin(\omega t) \Rightarrow$ $C_1(\omega_0^2 - \omega^2) + \mu \frac{3}{4} C_1 (A_1^2 + C_1^2) = P$

$$C_1(\omega_0^2 - \omega^2) + \mu \frac{3}{4} C_1^3 = P$$

Equation implicite en C_1 (mêmes résultats que Poincaré-Lindstedt)

Equilibrage harmonique (ou balance harmonique)

Application à l'oscillateur de Duffing sans perte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 3$

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t) + C_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(2\omega t) + C_2 \sin(2\omega t) + A_3 \cos(3\omega t) + C_3 \sin(3\omega t)$$

Equilibrage harmonique (ou balance harmonique)

Application à l'oscillateur de Duffing sans perte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 3$

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t) + C_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(2\omega t) + C_2 \sin(2\omega t) + A_3 \cos(3\omega t) + C_3 \sin(3\omega t)$$

Identification des $\cos(\omega t)$, $\cos(2\omega t)$, $cos(3\omega t)$ et $\sin(2\omega t)$

$$A_1 = A_2 = A_3 = C_2 = 0$$

Equilibrage harmonique (ou balance harmonique)

Application à l'oscillateur de Duffing sans perte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 3$

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t) + C_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(2\omega t) + C_2 \sin(2\omega t) + A_3 \cos(3\omega t) + C_3 \sin(3\omega t)$$

Identification des $\cos(\omega t)$, $\cos(2\omega t)$, $cos(3\omega t)$ et $\sin(2\omega t)$

$$A_1 = A_2 = A_3 = C_2 = 0$$

Identification des $\sin(\omega t)$ et $\sin(3\omega t)$

$$\begin{cases} C_1(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{3}{4}\mu(C_1^3 - C_1^2 C_3 + 2C_1 C_3^2) &= P \\ C_3(\omega_0^2 - 9\omega^2) + \frac{1}{4}\mu(-C_1^3 + 6C_1^2 C_3 + 3C_3^3) &= 0 \end{cases}$$

Equilibrage harmonique (ou balance harmonique)

Application à l'oscillateur de Duffing sans perte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 3$

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t) + C_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(2\omega t) + C_2 \sin(2\omega t) + A_3 \cos(3\omega t) + C_3 \sin(3\omega t)$$

Identification des $\cos(\omega t)$, $\cos(2\omega t)$, $cos(3\omega t)$ et $\sin(2\omega t)$

$$A_1 = A_2 = A_3 = C_2 = 0$$

Identification des $\sin(\omega t)$ et $\sin(3\omega t)$

$$\begin{cases} C_1(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{3}{4}\mu(C_1^3 - C_1^2 C_3 + 2C_1 C_3^2) &= P \\ C_3(\omega_0^2 - 9\omega^2) + \frac{1}{4}\mu(-C_1^3 + 6C_1^2 C_3 + 3C_3^3) &= 0 \end{cases}$$

Système de 2 équations implicites en C_1 et C_3

Equilibrage harmonique (ou balance harmonique)

Application à l'oscillateur de Duffing avec pertes

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P\sin(\omega t)$$

Equilibrage harmonique (ou balance harmonique)

Application à l'oscillateur de Duffing avec pertes

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P\sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 1$

$$x(t) = D_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

Equilibrage harmonique (ou balance harmonique)

Application à l'oscillateur de Duffing avec pertes

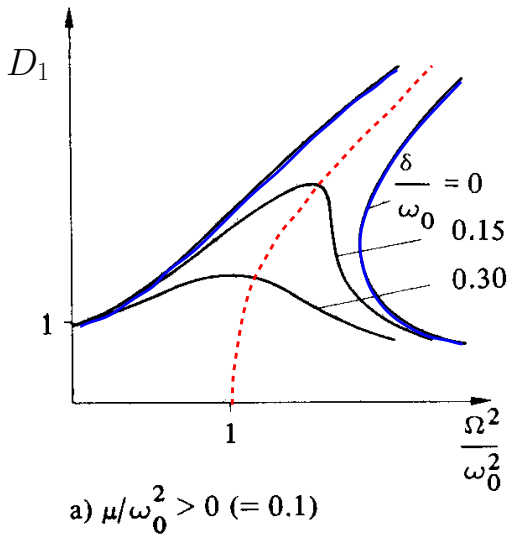
$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P\sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 1$

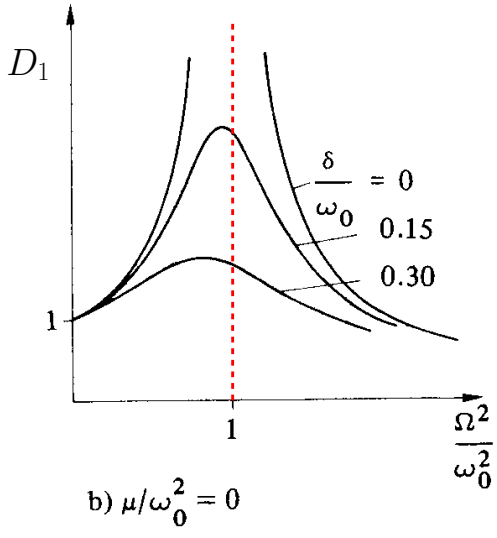
$$x(t) = D_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

$$\begin{cases} [(\omega_0^2 - \omega^2)D_1 + \frac{3}{4}\mu D_1^3]^2 + [2\delta D_1 \omega]^2 = P^2 \\ \tan(\phi) = \frac{[-2\delta D_1 \omega]}{[(\omega_0^2 - \omega^2)D_1 + \frac{3}{4}\mu D_1^3]} \end{cases}$$

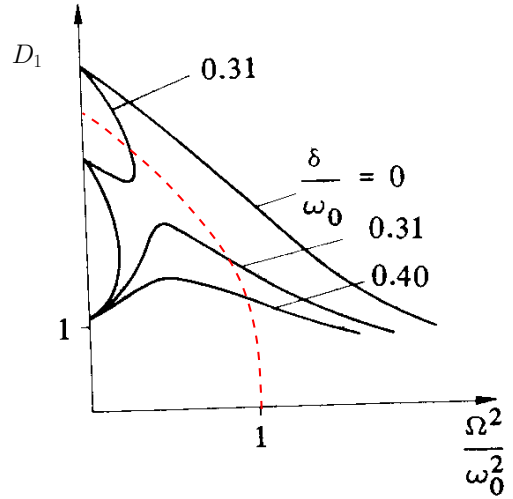
Influence de l'amortissement δ pour une amplitude P fixée



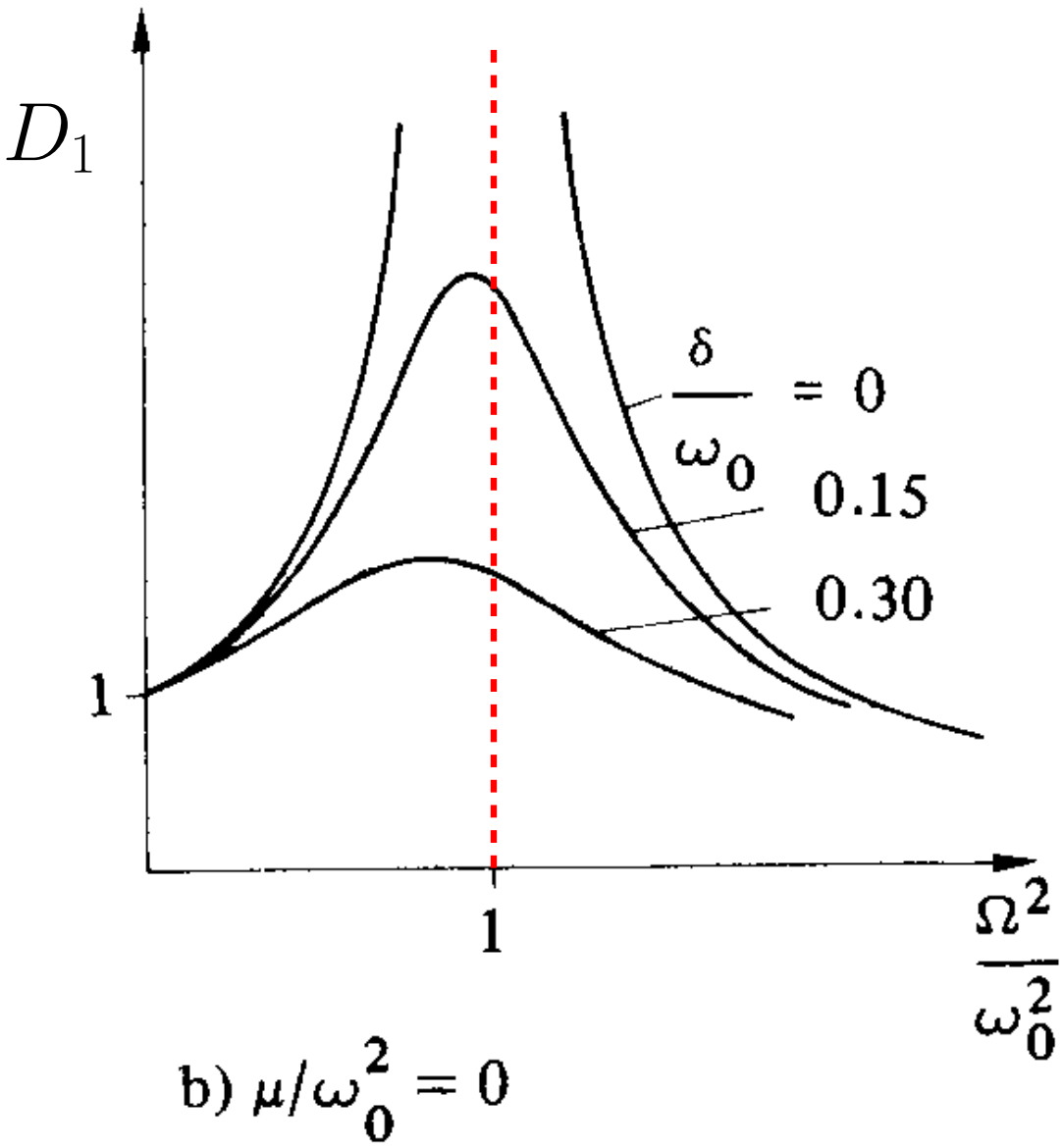
a) $\mu/\omega_0^2 > 0\ (= 0.1)$



b) $\mu/\omega_0^2 = 0$

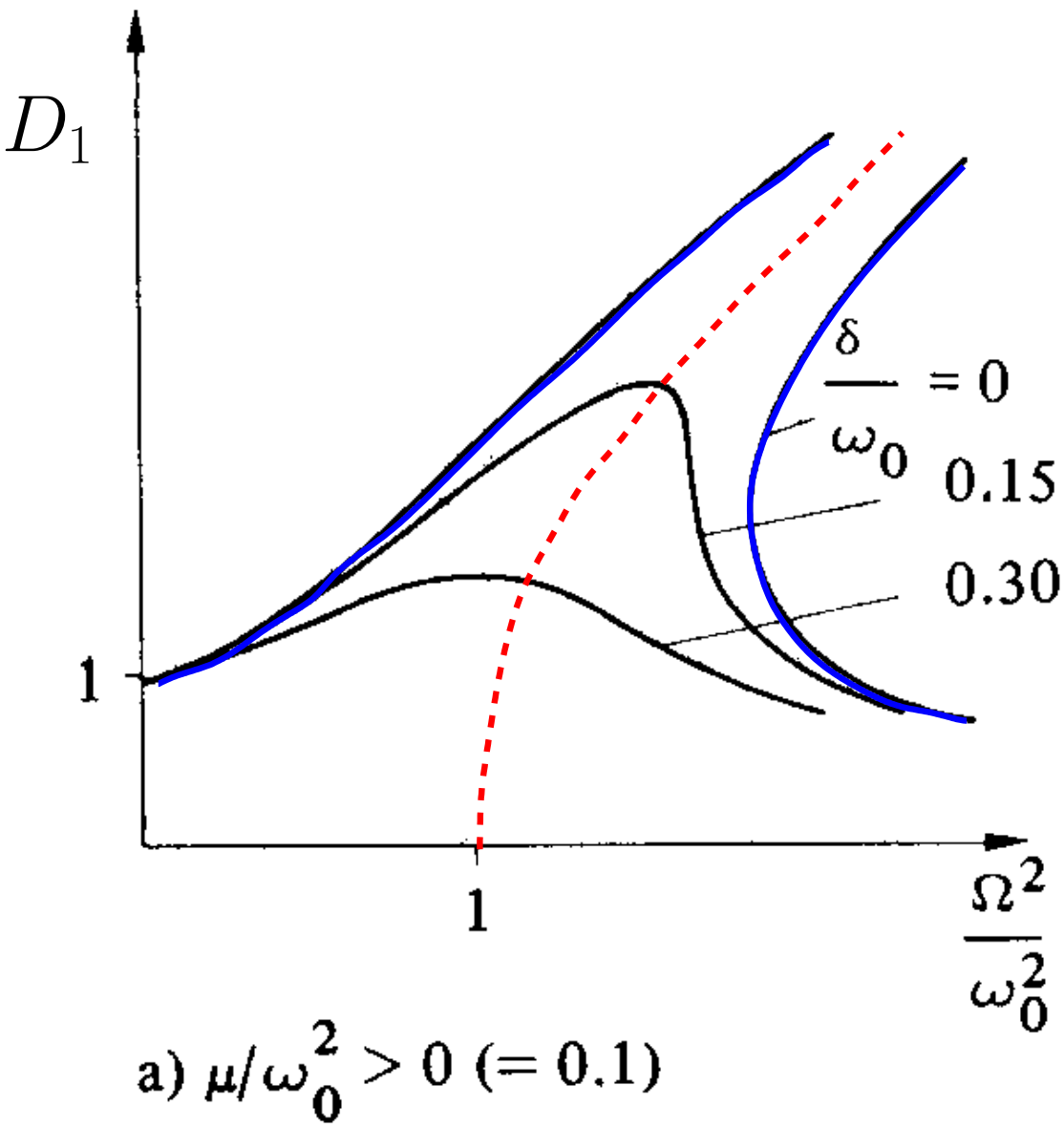


c) $\mu/\omega_0^2 < 0\ (= -0.1)$

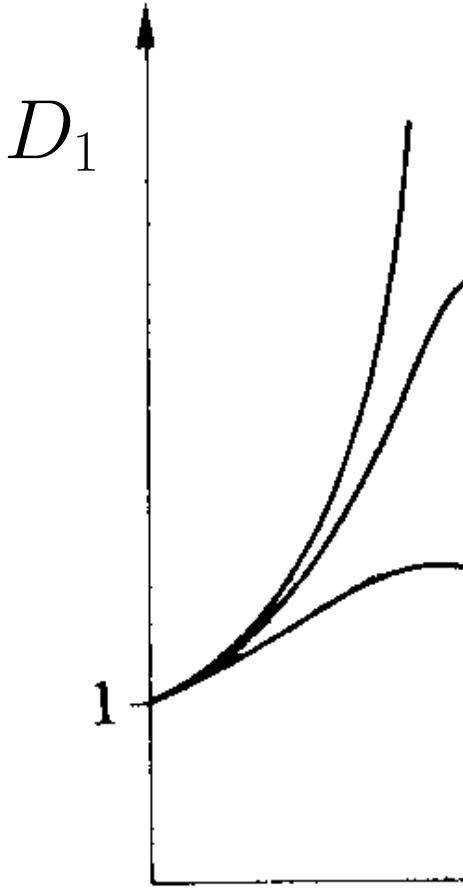


b) $\mu/\omega_0^2 = 0$

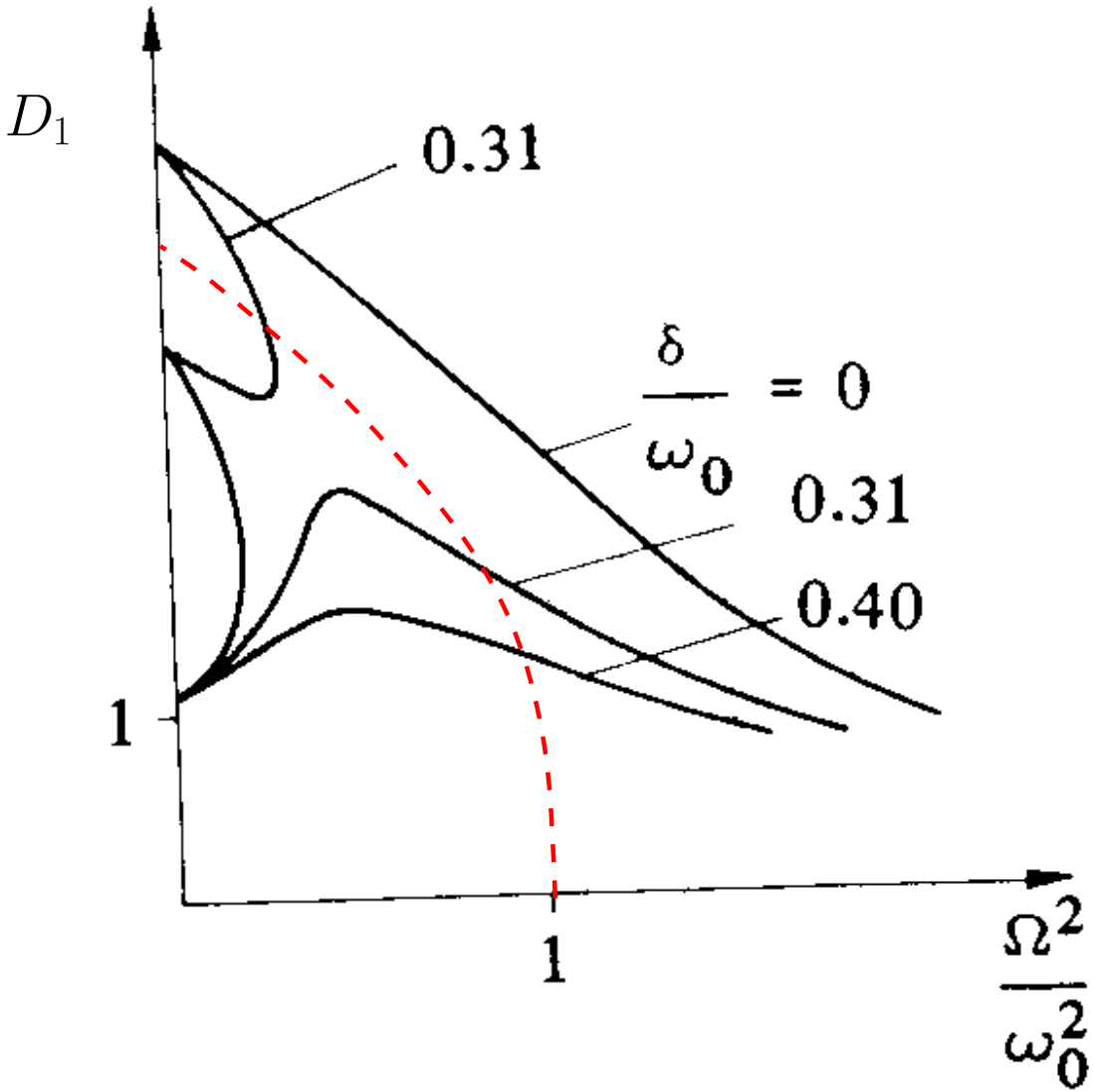
c)



a) $\mu/\omega_0^2 > 0\ (= 0.1)$

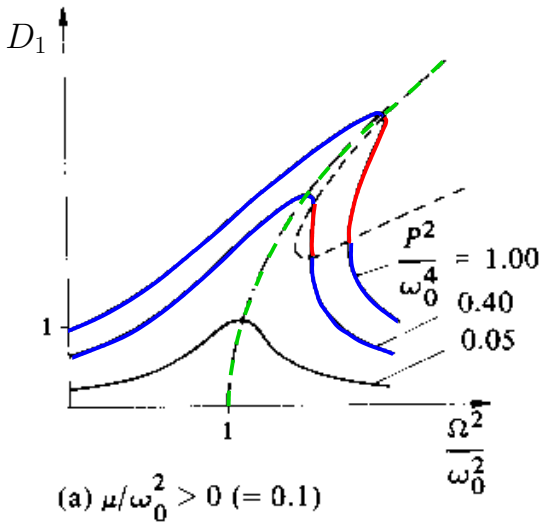


b) $\mu/\omega_0^2 =$

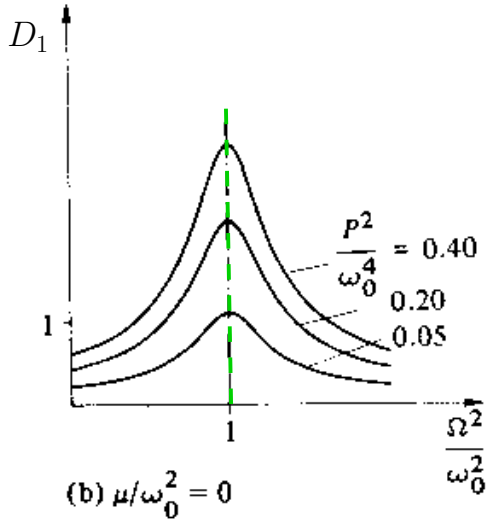


c) $\mu/\omega_0^2 < 0 \ (= -0.1)$

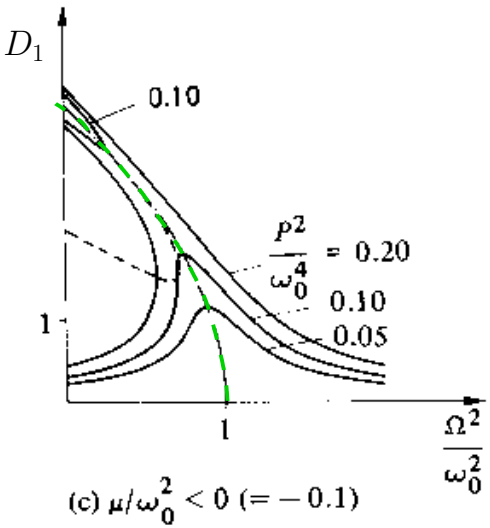
Influence de l'amplitude P de la source pour un amortissement δ fixé



(a) $\mu/\omega_0^2 > 0\ (= 0.1)$

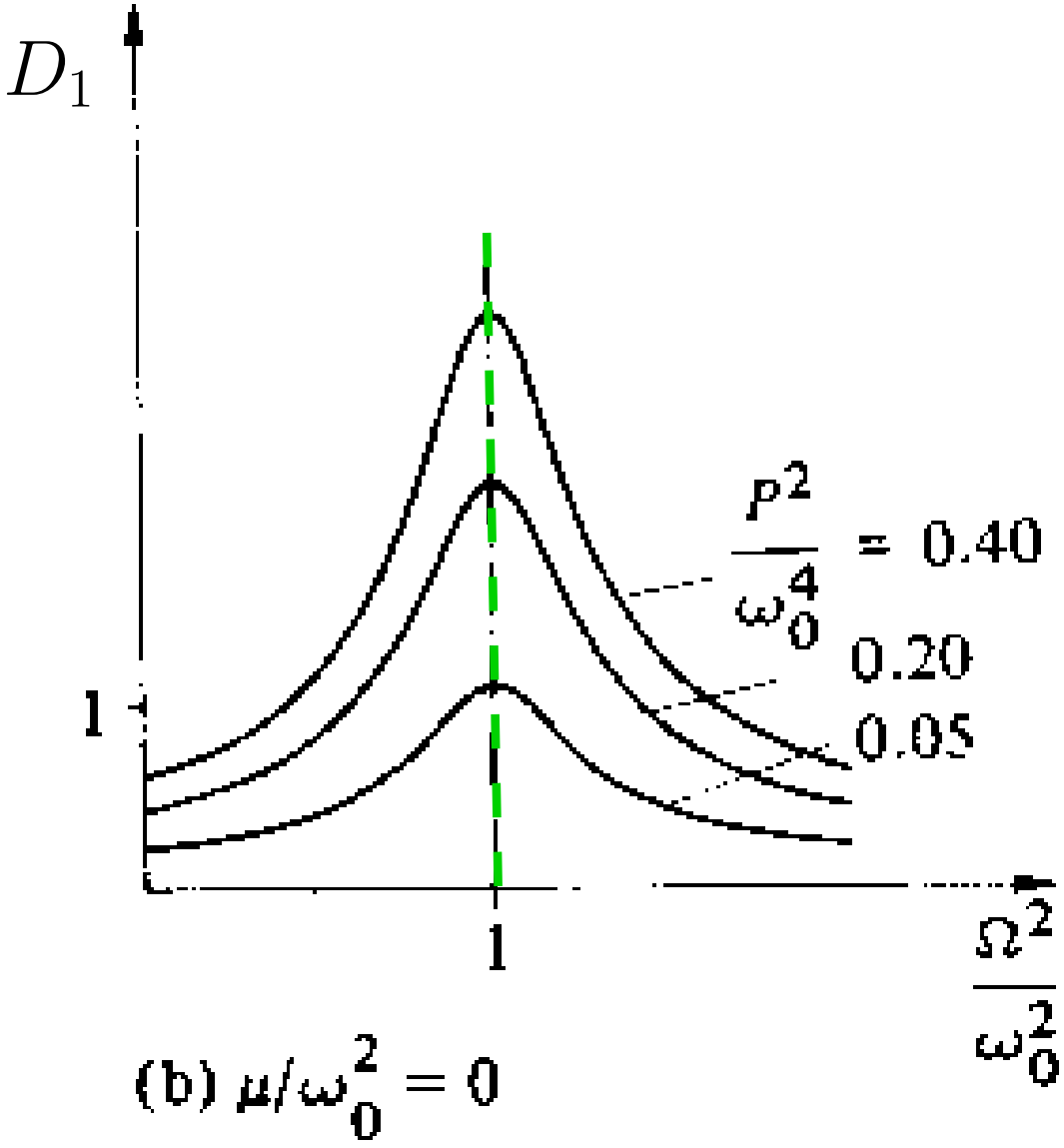


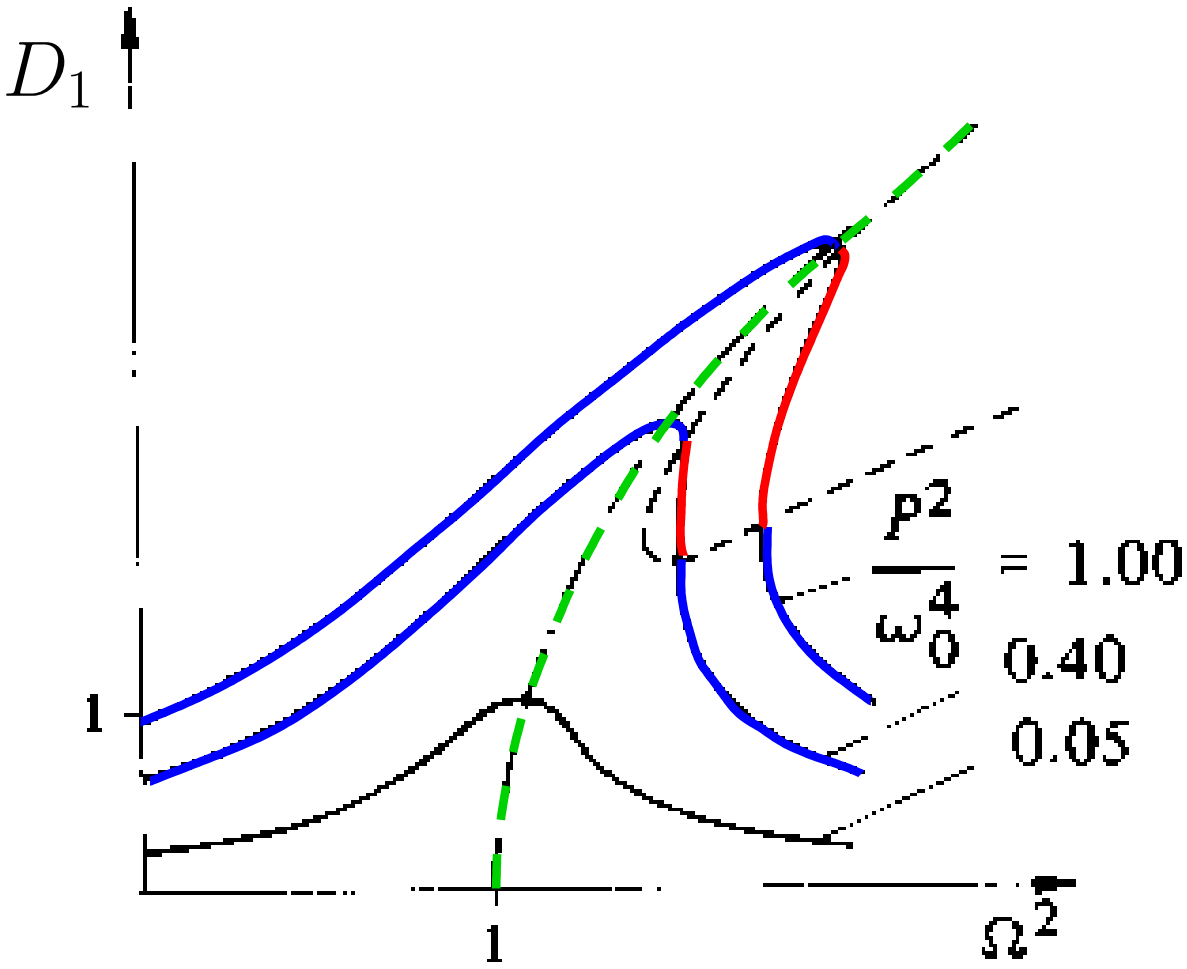
(b) $\mu/\omega_0^2 = 0$



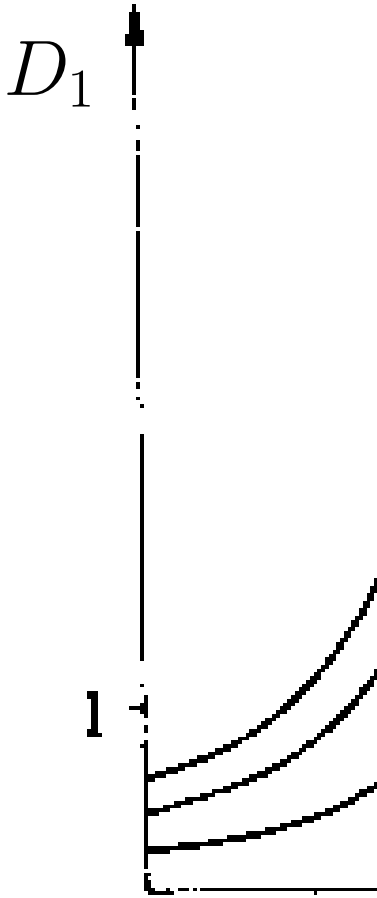
(c) $\mu/\omega_0^2 < 0\ (= -0.1)$

Fig. 1.17. The resonance curves corresponding to (119) with $\delta/\omega_0 = 0.1$.

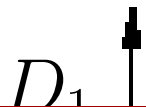

D_1
$\frac{p^2}{\omega_0^4} = 0.40$
0.20
0.05
1
1
$\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}$
(b) $\mu/\omega_0^2 = 0$

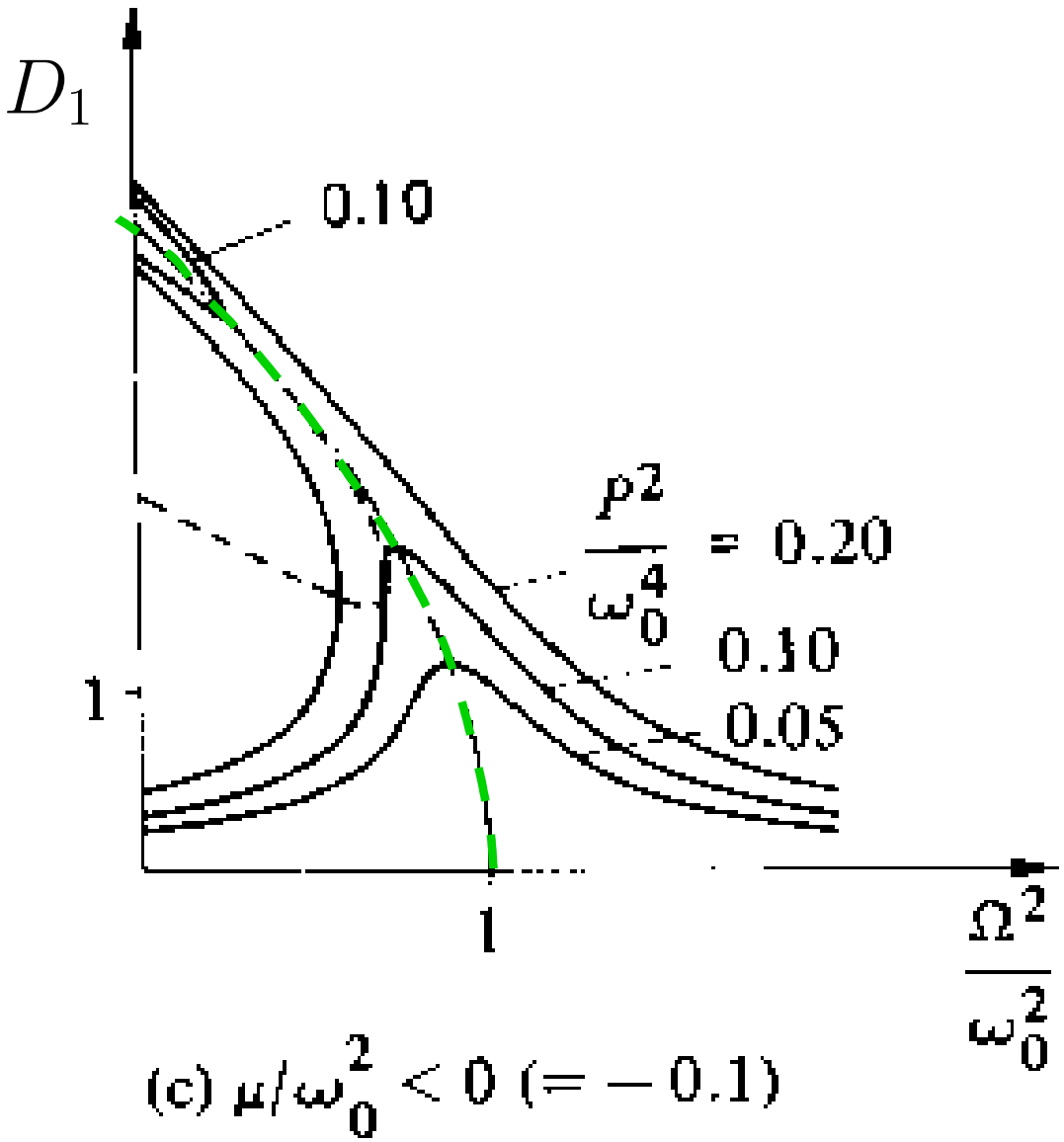


(a) $\mu/\omega_0^2 > 0$ (= 0.1)



(b) μ/ω_0^2





(c) $\mu/\omega_0^2 < 0$ $(= -0.1)$

Fig. 1.17. T
correspon
δ_1

Sommaire

1 Avant propos

2 Introduction

3 Oscillateur de Duffing
- Oscillations forcées loin de la résonance
- Oscillations forcées près de la résonance
- Oscillations sous harmoniques

4 Oscillateur de Van der Pol

Oscillations sous harmoniques

Dans les systèmes non-linéaires soumis à une excitation périodique, des oscillations forcées de grande amplitude peuvent naître non seulement quand la période des oscillations libres est voisine de la période T de l'excitation, mais aussi quand elle est proche de nT (n entier). La période des oscillations forcées est alors nT, et il y a résonance (ou synchronisation) sous-harmonique d'ordre n, phénomène non rencontré dans le cas linéaire. On peut donc poser des solutions du type :

$$x(t) = x_0 \sin(\tfrac{\omega}{n} t + \phi).$$

Oscillations sous harmoniques

Application à l'oscillateur de Duffing sans pertes

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Oscillations sous harmoniques

Application à l'oscillateur de Duffing sans pertes

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 3$

$$x(t) = C_{1/3} \sin(\tfrac{\omega}{3} t) + C_1 \sin(\omega t)$$

Oscillations sous harmoniques

Application à l'oscillateur de Duffing sans pertes

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 3$

$$x(t) = C_{1/3} \sin(\tfrac{\omega}{3} t) + C_1 \sin(\omega t)$$

$$\begin{cases} C_{1/3}(\omega_0^2 - (\frac{\omega}{3})^2) + \frac{3}{4}\mu(C_{1/3}^3 - C_{1/3}^2 C_1 + 2C_{1/3}C_1^2) = 0 \\ C_1(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{1}{4}\mu(-C_{1/3}^3 + 6C_{1/3}^2 C_1 + 3C_1^3) = P. \end{cases}$$

Oscillations sous harmoniques

Application à l'oscillateur de Duffing sans pertes

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 3$

$$x(t) = C_{1/3} \sin(\tfrac{\omega}{3} t) + C_1 \sin(\omega t)$$

$$\begin{cases} C_{1/3}(\omega_0^2 - (\frac{\omega}{3})^2) + \frac{3}{4}\mu(C_{1/3}^3 - C_{1/3}^2 C_1 + 2C_{1/3}C_1^2) = 0 \\ C_1(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{1}{4}\mu(-C_{1/3}^3 + 6C_{1/3}^2 C_1 + 3C_1^3) = P. \end{cases}$$

Si $C_{1/3} \neq 0$

$$\begin{cases} \omega^2 = 9\omega_0^2 + \frac{27}{4}(C_{1/3}^2 - C_{1/3}C_1 + 2C_1^2)\mu \\ -8\omega_0^2 C_1 = P - \frac{1}{4}(-C_{1/3}^3 - 21C_{1/3}^2 C_1 + 27C_{1/3}C_1^2 - 51C_1^3)\mu. \end{cases}$$

Oscillations sous harmoniques

Application à l'oscillateur de Duffing sans pertes

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 3$

$$x(t) = C_{1/3} \sin(\tfrac{\omega}{3} t) + C_1 \sin(\omega t)$$

$$\begin{cases} C_{1/3}(\omega_0^2 - (\frac{\omega}{3})^2) + \frac{3}{4}\mu(C_{1/3}^3 - C_{1/3}^2 C_1 + 2C_{1/3}C_1^2) = 0 \\ C_1(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{1}{4}\mu(-C_{1/3}^3 + 6C_{1/3}^2 C_1 + 3C_1^3) = P. \end{cases}$$

Si $C_{1/3} \neq 0$

$$\begin{cases} \omega^2 = 9\omega_0^2 + \frac{27}{4}(C_{1/3}^2 - C_{1/3}C_1 + 2C_1^2)\mu \\ -8\omega_0^2 C_1 = P - \frac{1}{4}(-C_{1/3}^3 - 21C_{1/3}^2 C_1 + 27C_{1/3}C_1^2 - 51C_1^3)\mu. \end{cases}$$

Ces équations sont résolues de façon itérative pour des petites valeurs de μ

Oscillations sous harmoniques

Application à l'oscillateur de Duffing sans pertes

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 3$

$$x(t) = C_{1/3} \sin(\tfrac{\omega}{3} t) + C_1 \sin(\omega t)$$

Pour $\mu = 0$ avec $C_{1/3}$ donné arbitrairement (ordre 0 en μ) :

$$\begin{cases} \omega_0^2 - (\frac{\omega}{3})^2 = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2) C_1 = P \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \omega = 3\omega_0 \\ C_1 = \frac{P}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\frac{P}{8\omega_0^2} \end{cases}$$

Si $C_{1/3} \neq 0$

$$\begin{cases} \omega^2 = 9\omega_0^2 + \frac{27}{4}(C_{1/3}^2 - C_{1/3} C_1 + 2C_1^2)\mu \\ -8\omega_0^2 C_1 = P - \frac{1}{4}(-C_{1/3}^3 - 21 C_{1/3}^2 C_1 + 27 C_{1/3} C_1^2 - 51 C_1^3)\mu \end{cases}$$

Ces équations sont résolues de façon itérative pour des petites valeurs de μ

Oscillations sous harmoniques

Application à l'oscillateur de Duffing sans pertes

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 3$

$$x(t) = C_{1/3} \sin(\tfrac{\omega}{3} t) + C_1 \sin(\omega t)$$

Pour $\mu = 0$ avec $C_{1/3}$ donné arbitrairement (ordre 0 en μ) :

$$\begin{cases} \omega_0^2 - (\frac{\omega}{3})^2 = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2) C_1 = P \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \boxed{\omega = 3\omega_0} \rightarrow \text{Sol. sous-harmonique} \\ C_1 = \frac{P}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\frac{P}{8\omega_0^2} \end{cases}$$

Si $C_{1/3} \neq 0$

$$\begin{cases} \omega^2 = 9\omega_0^2 + \frac{27}{4}(C_{1/3}^2 - C_{1/3} C_1 + 2C_1^2)\mu \\ -8\omega_0^2 C_1 = P - \frac{1}{4}(-C_{1/3}^3 - 21 C_{1/3}^2 C_1 + 27 C_{1/3} C_1^2 - 51 C_1^3)\mu \end{cases}$$

Ces équations sont résolues de façon itérative pour des petites valeurs de μ

Oscillations sous harmoniques

Application à l'oscillateur de Duffing sans pertes

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 3$

$$x(t) = C_{1/3} \sin(\tfrac{\omega}{3} t) + C_1 \sin(\omega t)$$

Pour $\mu = 0$ avec $C_{1/3}$ donné arbitrairement (ordre 0 en μ) :

$$\begin{cases} \omega_0^2 - (\frac{\omega}{3})^2 = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2) C_1 = P \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \omega = 3\omega_0 \\ C_1 = \frac{P}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\frac{P}{8\omega_0^2} \end{cases}$$

Si $C_{1/3} \neq 0$

$$\begin{cases} \omega^2 = 9\omega_0^2 + \frac{27}{4}(C_{1/3}^2 - C_{1/3} C_1 + 2C_1^2)\mu \\ -8\omega_0^2 C_1 = P - \frac{1}{4}(-C_{1/3}^3 - 21 C_{1/3}^2 C_1 + 27 C_{1/3} C_1^2 - 51 C_1^3)\mu \end{cases}$$

Ces équations sont résolues de façon itérative pour des petites valeurs de μ

Oscillations sous harmoniques

Application à l'oscillateur de Duffing sans pertes

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 3$

$$x(t) = C_{1/3} \sin(\tfrac{\omega}{3} t) + C_1 \sin(\omega t)$$

Pour $\mu = 0$ avec $C_{1/3}$ donné arbitrairement (ordre 0 en μ) :

$$\begin{cases} \omega_0^2 - (\frac{\omega}{3})^2 = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2) C_1 = P \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \omega = 3\omega_0 \\ C_1 = \frac{P}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\frac{P}{8\omega_0^2} \end{cases}$$

$$\omega^2 = 9\omega_0^2 + \frac{27}{4}(C_{1/3}^2 + C_{1/3}\frac{P}{8\omega_0^2} + \frac{P^2}{32\omega_0^4})\mu$$

Oscillations sous harmoniques

Application à l'oscillateur de Duffing sans pertes

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 3$

$$x(t) = C_{1/3} \sin(\tfrac{\omega}{3} t) + C_1 \sin(\omega t)$$

Pour $\mu = 0$ avec $C_{1/3}$ donné arbitrairement (ordre 0 en μ) :

$$\begin{cases} \omega_0^2 - (\frac{\omega}{3})^2 = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2) C_1 = P \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \omega = 3\omega_0 \\ C_1 = \frac{P}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\frac{P}{8\omega_0^2} \end{cases}$$

$$\omega^2 = 9\omega_0^2 + \frac{27}{4}(C_{1/3}^2 + C_{1/3}\frac{P}{8\omega_0^2} + \frac{P^2}{32\omega_0^4})\mu$$

Equation implicite en ω et $C_{1/3}$ qui permet d'obtenir $C_{1/3} = f(\omega, P)$.

Oscillations sous harmoniques

Application à l'oscillateur de Duffing sans pertes

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 3$

$$x(t) = C_{1/3} \sin(\tfrac{\omega}{3} t) + C_1 \sin(\omega t)$$

Pour $\mu = 0$ avec $C_{1/3}$ donné arbitrairement (ordre 0 en μ) :

$$\begin{cases} \omega_0^2 - (\frac{\omega}{3})^2 = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2) C_1 = P \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \omega = 3\omega_0 \\ C_1 = \frac{P}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\frac{P}{8\omega_0^2} \end{cases}$$

$$\omega^2 = 9\omega_0^2 + \frac{27}{4}(C_{1/3}^2 + C_{1/3}\frac{P}{8\omega_0^2} + \frac{P^2}{32\omega_0^4})\mu$$

Equation implicite en ω et $C_{1/3}$ qui permet d'obtenir $C_{1/3} = f(\omega, P)$.

$\Rightarrow$ Equation dépendante du signe de μ

$\Rightarrow$ Hyperbole dans le plan $(\omega, C_{1/3})$

Oscillations sous harmoniques

Application à l'oscillateur de Duffing sans pertes

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = P \sin(\omega t)$$

Solution pour $N = 3$

$$x(t) = C_{1/3} \sin(\tfrac{\omega}{3} t) + C_1 \sin(\omega t)$$

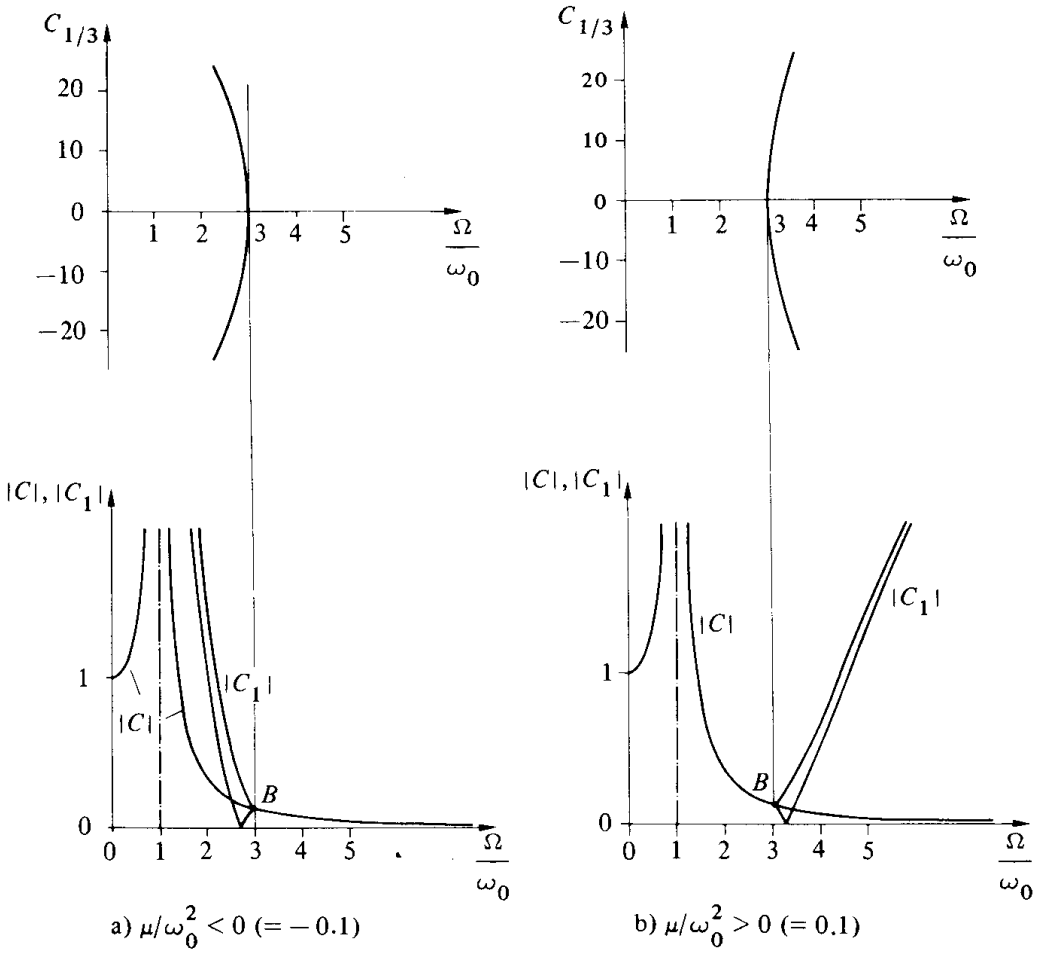
Pour $\mu = 0$ avec $C_{1/3}$ donné arbitrairement (ordre 0 en μ) :

$$\begin{cases} \omega_0^2 - (\frac{\omega}{3})^2 = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2) C_1 = P \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \omega = 3\omega_0 \\ C_1 = \frac{P}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\frac{P}{8\omega_0^2} \end{cases}$$

$$C_1 = -\frac{P}{8\omega_0^2} + \frac{1}{32}\frac{\mu}{\omega_0^2}\left(-C_{1/3}^3 + 21 C_{1/3}^2 \frac{P}{8\omega_0^2} + 27 C_{1/3} \frac{P^2}{8^2\omega_0^4} + 51 \frac{P^3}{8^3\omega_0^6}\right).$$

Equation implicite en ω C_1 et $C_{1/3}$ qui permet d'obtenir $C_1 = f(\omega, P)$.

Application à l'oscillateur de Duffing sans pertes



Sommaire

1 Avant propos

2 Introduction

3 Oscillateur de Duffing

4 Oscillateur de Van der Pol
- Oscillations libres
- Oscillations forcées

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Terme perturbateur isolé

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu\omega_0(1 - \beta x^2)\dot{x}$$

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Terme perturbateur isolé

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu\omega_0(1 - \beta x^2)\dot{x}$$

Période T est donnée par

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0}(1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + \mu^3 h_3 + \mu^4 h_4 + ...)$$

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Terme perturbateur isolé

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu\omega_0(1 - \beta x^2)\dot{x}$$

Période T est donnée par

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0}(1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + \mu^3 h_3 + \mu^4 h_4 + ...)$$

Nouvelle variable τ

$$\tau = \omega t = \frac{\omega_0 t}{1+\mu h_1+\mu^2 h_2+..}$$

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Equation différentielle :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)^2 x = \mu(1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)(1 - \beta x^2)\frac{dx}{d\tau}$$

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Equation différentielle :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)^2 x = \mu(1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)(1 - \beta x^2)\frac{dx}{d\tau}$$

Equation génératrice :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0$$

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Equation différentielle :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)^2 x = \mu(1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)(1 - \beta x^2)\frac{dx}{d\tau}$$

Equation génératrice :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0 \mapsto x_0(\tau) = M_0 \cos\tau$$

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Equation différentielle :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)^2 x = \mu(1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)(1 - \beta x^2)\frac{dx}{d\tau}$$

Equation génératrice :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0 \mapsto x_0(\tau) = M_0 \cos\tau \mapsto x(\tau, \mu) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + ...$$

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Equation différentielle :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)^2 x = \mu(1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)(1 - \beta x^2)\frac{dx}{d\tau}$$

Equation génératrice :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0 \mapsto x_0(\tau) = M_0 \cos\tau \mapsto x(\tau, \mu) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + ...$$

Conditions limites :

$$\frac{dx}{d\tau}|_{\tau=0} = 0 \text{ et } \forall i \frac{dx_i}{d\tau}|_{\tau=0} = 0$$

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Equation différentielle :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)^2 x = \mu(1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)(1 - \beta x^2)\frac{dx}{d\tau}$$

Equation génératrice :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0 \mapsto x_0(\tau) = M_0 \cos\tau \mapsto x(\tau, \mu) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + ...$$

Calcul au premier ordre en μ

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 + 2h_1 x_0 = (1 - \beta x_0^2)\frac{dx_0}{d\tau}$$

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Equation différentielle :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)^2 x = \mu(1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)(1 - \beta x^2)\frac{dx}{d\tau}$$

Equation génératrice :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0 \mapsto x_0(\tau) = M_0 \cos\tau \mapsto x(\tau, \mu) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + ...$$

Calcul au premier ordre en μ

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 + 2h_1 x_0 = (1 - \beta x_0^2)\frac{dx_0}{d\tau}$$

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = (-h_1 M_0)\cos(\tau) + M_0(\tfrac{1}{4}\beta M_0^2 - 1)\sin(\tau) + \tfrac{1}{4}\beta M_0^3 \sin(3\tau)$$

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Equation différentielle :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)^2 x = \mu(1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)(1 - \beta x^2)\frac{dx}{d\tau}$$

Equation génératrice :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0 \mapsto x_0(\tau) = M_0 \cos\tau \mapsto x(\tau, \mu) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + ...$$

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = (-h_1 M_0)\cos(\tau) + M_0(\tfrac{1}{4}\beta M_0^2 - 1)\sin(\tau) + \tfrac{1}{4}\beta M_0^3 \sin(3\tau)$$

Annulation des termes séculaires

$$\begin{cases} h_1 M_0 = 0 \\ M_0(\frac{1}{4}\beta M_0^2 - 1) = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} h_1 = 0 \\ M_0 = 2/\sqrt{\beta} \end{cases}$$

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Equation différentielle :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)^2 x = \mu(1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)(1 - \beta x^2)\frac{dx}{d\tau}$$

Equation génératrice :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0 \mapsto x_0(\tau) = M_0 \cos\tau \mapsto x(\tau, \mu) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \ldots$$

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = (-h_1 M_0)\cos(\tau) + M_0(\tfrac{1}{4}\beta M_0^2 - 1)\sin(\tau) + \tfrac{1}{4}\beta M_0^3 \sin(3\tau)$$

Annulation des termes séculaires

$\tau = \omega_0 t$

$$\begin{cases} h_1 M_0 = 0 \\ M_0(\frac{1}{4}\beta M_0^2 - 1) = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} h_1 = 0 \\ M_0 = 2/\sqrt{\beta} \end{cases}$$

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Equation différentielle :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)^2 x = \mu(1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)(1 - \beta x^2)\frac{dx}{d\tau}$$

Equation génératrice :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0 \mapsto x_0(\tau) = M_0 \cos\tau \mapsto x(\tau, \mu) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \ldots$$

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = (-h_1 M_0)\cos(\tau) + M_0(\tfrac{1}{4}\beta M_0^2 - 1)\sin(\tau) + \tfrac{1}{4}\beta M_0^3 \sin(3\tau)$$

Annulation des termes séculaires

$$\begin{cases} h_1 M_0 = 0 \\ M_0(\frac{1}{4}\beta M_0^2 - 1) = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} h_1 = 0 \\ M_0 = 2/\sqrt{\beta} \end{cases}$$

$\tau = \omega_0 t$

$$\hookrightarrow x_0(t) = \frac{2}{\sqrt{\beta}}\cos(\omega_0 t)$$

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Equation différentielle :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)^2 x = \mu(1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)(1 - \beta x^2)\frac{dx}{d\tau}$$

Equation génératrice :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0 \mapsto x_0(\tau) = M_0 \cos\tau \mapsto x(\tau, \mu) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + ...$$

Equation différentielle :

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = \frac{1}{4}\beta M_0^3 \sin(3\tau)$$

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Equation différentielle :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)^2 x = \mu(1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)(1 - \beta x^2)\frac{dx}{d\tau}$$

Equation génératrice :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0 \mapsto x_0(\tau) = M_0 \cos\tau \mapsto x(\tau, \mu) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + ...$$

Equation différentielle :

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = \frac{1}{4}\beta M_0^3 \sin(3\tau)$$

Solution :

$$x_1(\tau) = M_1 \cos(\tau) + N_1 \sin(\tau) + \lambda \sin(3\tau)$$

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Equation différentielle :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)^2 x = \mu(1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)(1 - \beta x^2)\frac{dx}{d\tau}$$

Equation génératrice :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0 \mapsto x_0(\tau) = M_0 \cos\tau \mapsto x(\tau, \mu) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + ...$$

Equation différentielle :

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = \frac{1}{4}\beta M_0^3 \sin(3\tau)$$

Solution :

$$x_1(\tau) = M_1 \cos(\tau) + N_1 \sin(\tau) + \lambda \sin(3\tau)$$

Calcul au second ordre en $\mu \Rightarrow M_1 = 0$ et $h_2 = 1/16$

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Equation différentielle :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)^2 x = \mu(1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + ..)(1 - \beta x^2)\frac{dx}{d\tau}$$

Equation génératrice :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0 \mapsto x_0(\tau) = M_0 \cos\tau \mapsto x(\tau, \mu) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \ldots$$

Equation différentielle :

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = \frac{1}{4}\beta M_0^3 \sin(3\tau)$$

Solution :

$$x_1(\tau) = M_1 \cos(\tau) + N_1 \sin(\tau) + \lambda \sin(3\tau)$$

Calcul au second ordre en $\mu \Rightarrow M_1 = 0$ et $h_2 = 1/16$

Conditions initiales $\Rightarrow \lambda = \frac{-1}{4\sqrt{\beta}}$ et $N_1 = \frac{3}{4\sqrt{\beta}}$

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Solution de l'équation de Van der Pol :

$$x(t,\mu) = \frac{2}{\sqrt{\beta}}\cos(\omega t) + \mu\frac{3}{4\sqrt{\beta}}\sin(\omega t) - \mu\frac{1}{4\sqrt{\beta}}\sin(3\omega t)$$

avec

$$\omega = \frac{\omega_0}{(1+(1/16)\mu^2)}$$

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Solution de l'équation de Van der Pol :

$$x(t,\mu) = \frac{2}{\sqrt{\beta}}\cos(\omega t) + \mu\frac{3}{4\sqrt{\beta}}\sin(\omega t) - \mu\frac{1}{4\sqrt{\beta}}\sin(3\omega t)$$

avec

$$\omega = \frac{\omega_0}{(1+(1/16)\mu^2)}$$

- Indépendance de l'amplitude aux conditions initiales

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Solution de l'équation de Van der Pol :

$$x(t,\mu) = \frac{2}{\sqrt{\beta}}\cos(\omega t) + \mu\frac{3}{4\sqrt{\beta}}\sin(\omega t) - \mu\frac{1}{4\sqrt{\beta}}\sin(3\omega t)$$

avec

$$\omega = \frac{\omega_0}{(1+(1/16)\mu^2)}$$

- Indépendance de l'amplitude aux conditions initiales
- Distortion harmonique

Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } 0 < \mu \ll 1 \text{ et } \beta > 0$$

Solution de l'équation de Van der Pol :

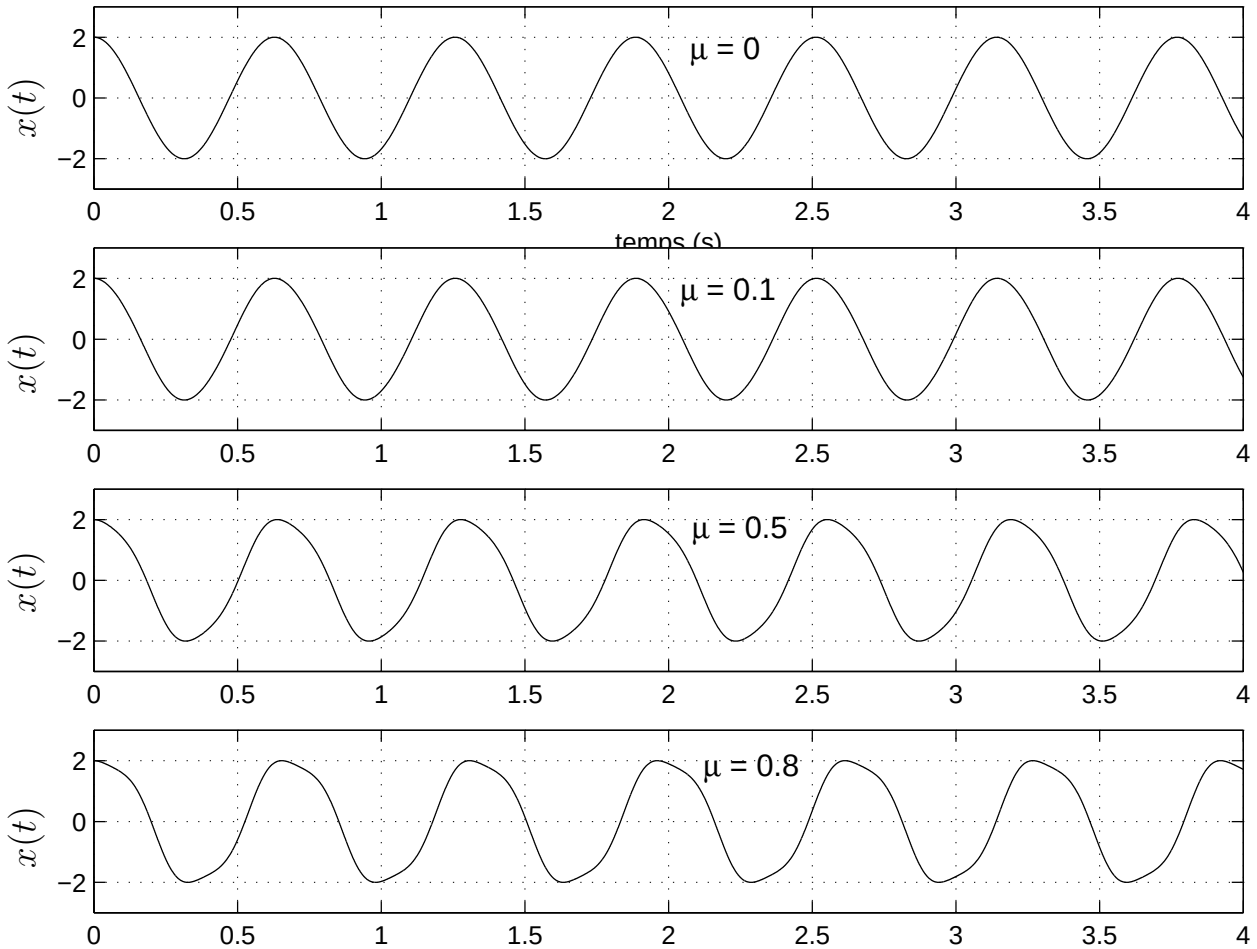
$$x(t,\mu) = \frac{2}{\sqrt{\beta}}\cos(\omega t) + \mu\frac{3}{4\sqrt{\beta}}\sin(\omega t) - \mu\frac{1}{4\sqrt{\beta}}\sin(3\omega t)$$

avec

$$\omega = \frac{\omega_0}{(1+(1/16)\mu^2)}$$

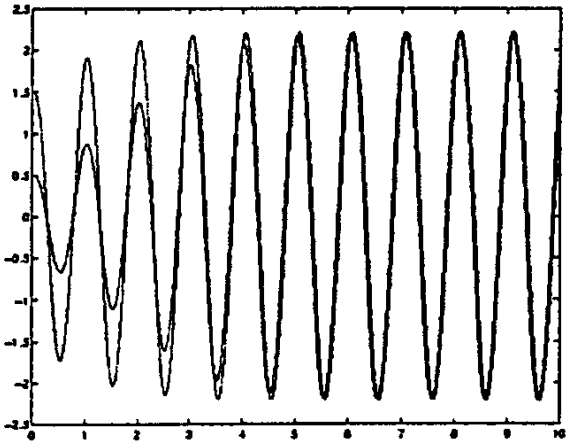
- Indépendance de l'amplitude aux conditions initiales
- Distortion harmonique
- Evolution de la fréquence de jeu en fonction de la non-linéarité

Influence du facteur μ

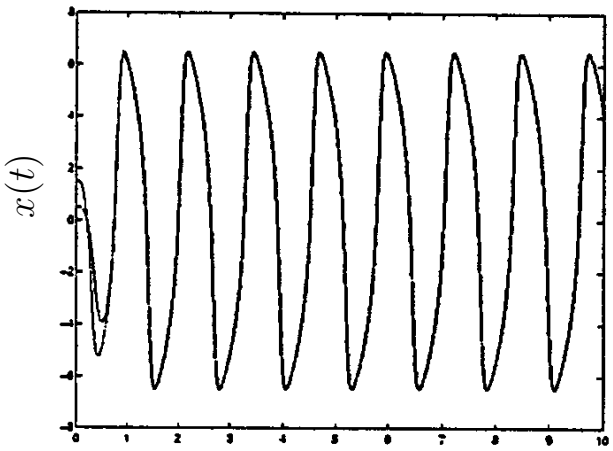


Influence des conditions initiales

Cas r=2



Cas r=10



L'oscillateur de Van der Pol est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \omega_0(x^2 - r)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Pour chaque valeur de r, deux simulations numériques correspondant à des conditions initiales différentes ont été effectuées. Il apparaît que les oscillations périodiques obtenues en régime permanent sont indépendantes des conditions initiales.

Sommaire

1 Avant propos

2 Introduction

3 Oscillateur de Duffing

4 Oscillateur de Van der Pol
- Oscillations libres
- Oscillations forcées

On étudie l'oscillateur de Van der Pol en oscillations forcées (régime sinusoïdale de pulsation ω) par la méthode de l'équilibrage harmonique (cas $N = 1$).

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

On étudie l'oscillateur de Van der Pol en oscillations forcées (régime sinusoïdale de pulsation ω) par la méthode de l'équilibrage harmonique (cas $N = 1$).

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

Solution cherchée :

$$x(t) = A_1\cos(\omega t) + C_1\sin(\omega t).$$

On étudie l'oscillateur de Van der Pol en oscillations forcées (régime sinusoïdale de pulsation ω) par la méthode de l'équilibrage harmonique (cas $N = 1$).

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

Solution cherchée :

$$x(t) = A_1\cos(\omega t) + C_1\sin(\omega t).$$

Injection dans l'équation différentielle et identification des termes

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)A_1 - \mu\omega_0\omega C_1(1 - \frac{\beta}{4}(A_1^2 + C_1^2)) = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)C_1 + \mu\omega_0\omega A_1(1 - \frac{\beta}{4}(A_1^2 + C_1^2)) = p \end{cases}$$

On étudie l'oscillateur de Van der Pol en oscillations forcées (régime sinusoïdale de pulsation ω) par la méthode de l'équilibrage harmonique (cas $N = 1$).

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

Solution cherchée :

$$x(t) = A_1\cos(\omega t) + C_1\sin(\omega t).$$

Injection dans l'équation différentielle et identification des termes

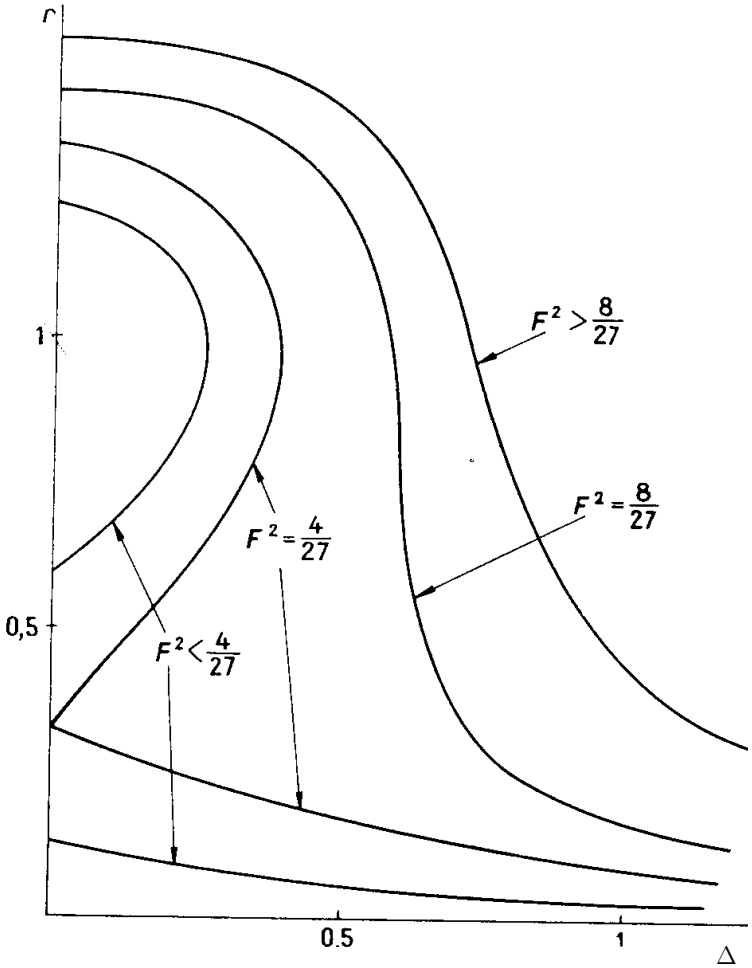
$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)A_1 - \mu\omega_0\omega C_1(1 - \frac{\beta}{4}(A_1^2 + C_1^2)) = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)C_1 + \mu\omega_0\omega A_1(1 - \frac{\beta}{4}(A_1^2 + C_1^2)) = p \end{cases}$$

Courbe de réponse en amplitude : on pose $A = \sqrt{A_1^2 + C_1^2}$

$$p^2 = A^2\{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + [\mu\omega_0\omega(1 - \frac{\beta}{4}A^2)]\}.$$

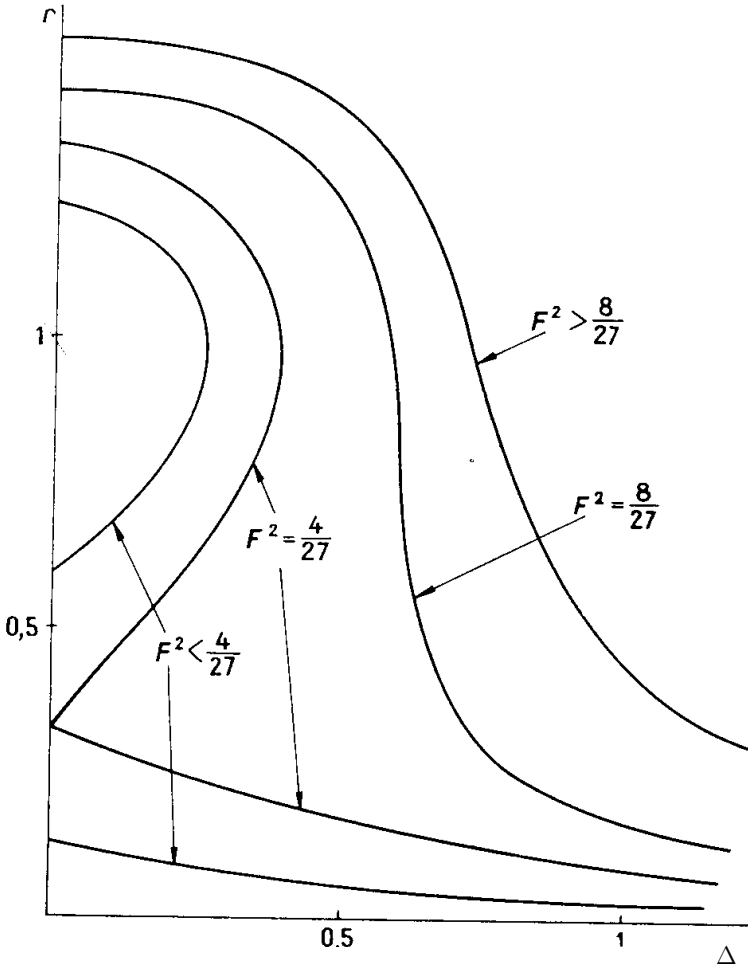
$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$



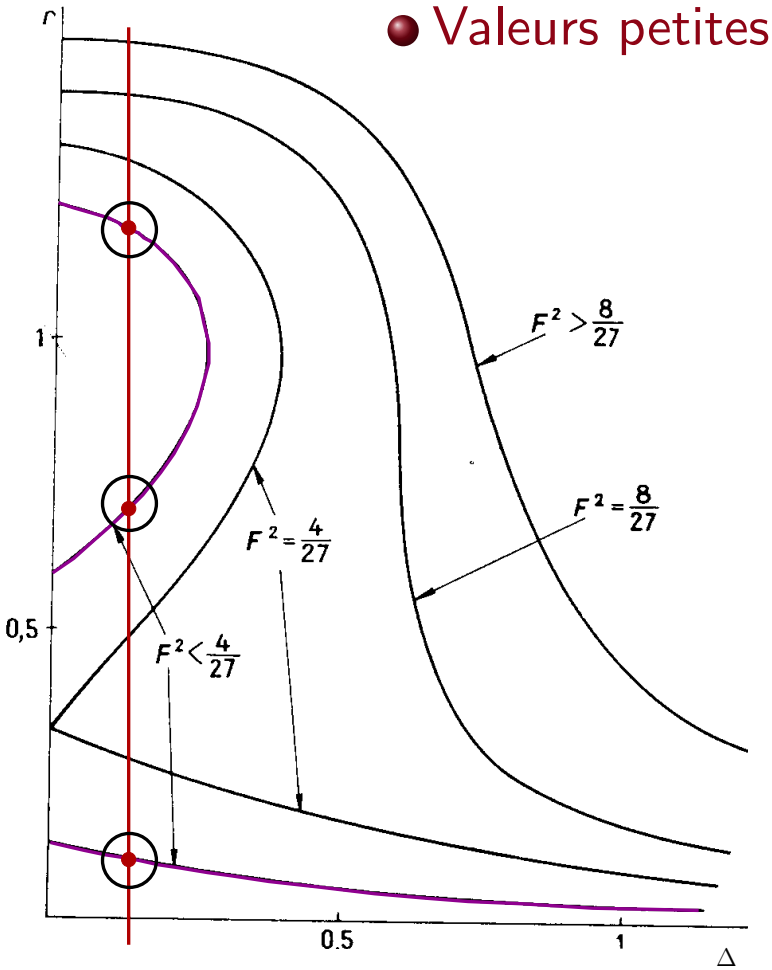
$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$



$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

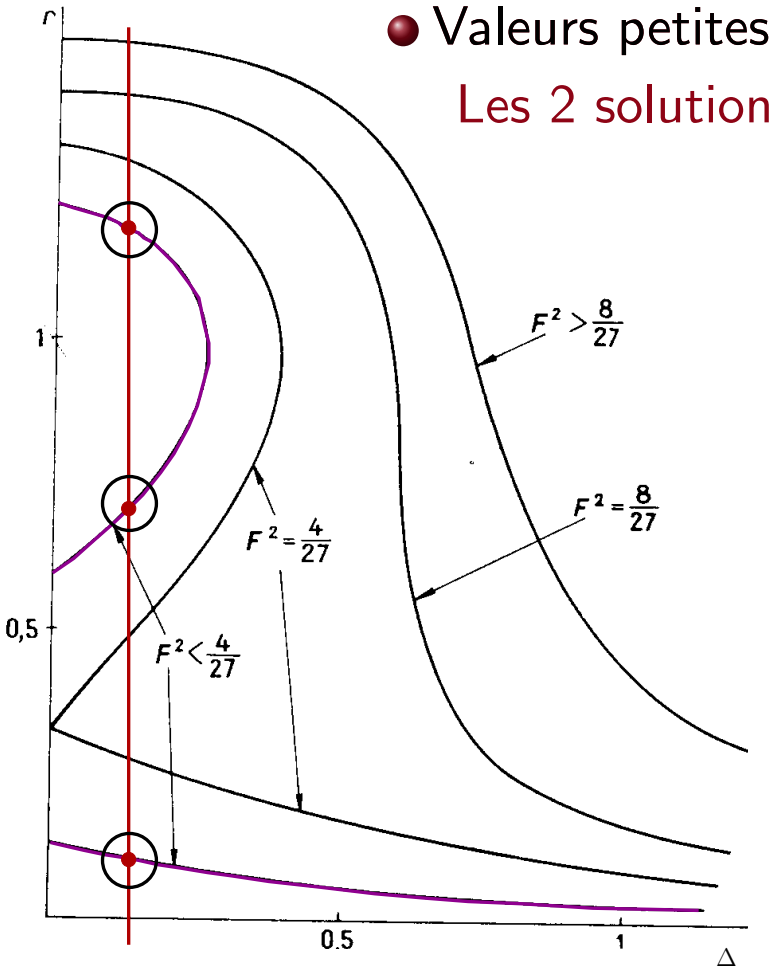
$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$



- Valeurs petites de $\Delta \Rightarrow$ 3 valeurs de r, solution de l'edq.

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$

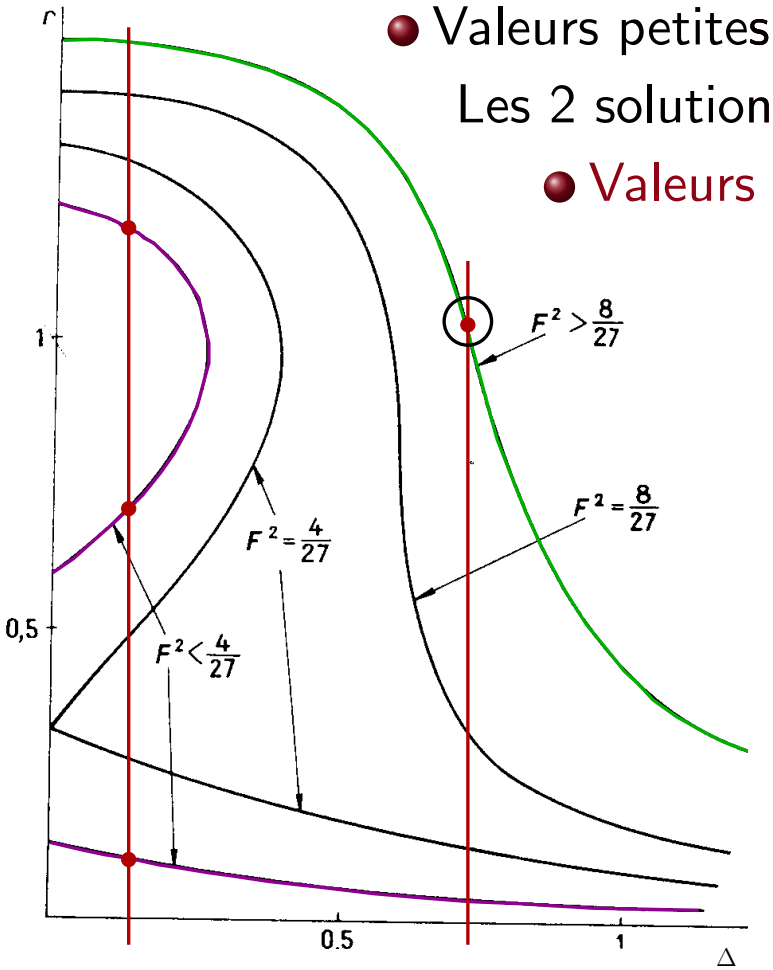


- Valeurs petites de $\Delta \Rightarrow$ 3 valeurs de r, solution de l'edq.

  Les 2 solutions les + faibles en amplitude sont instables.

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

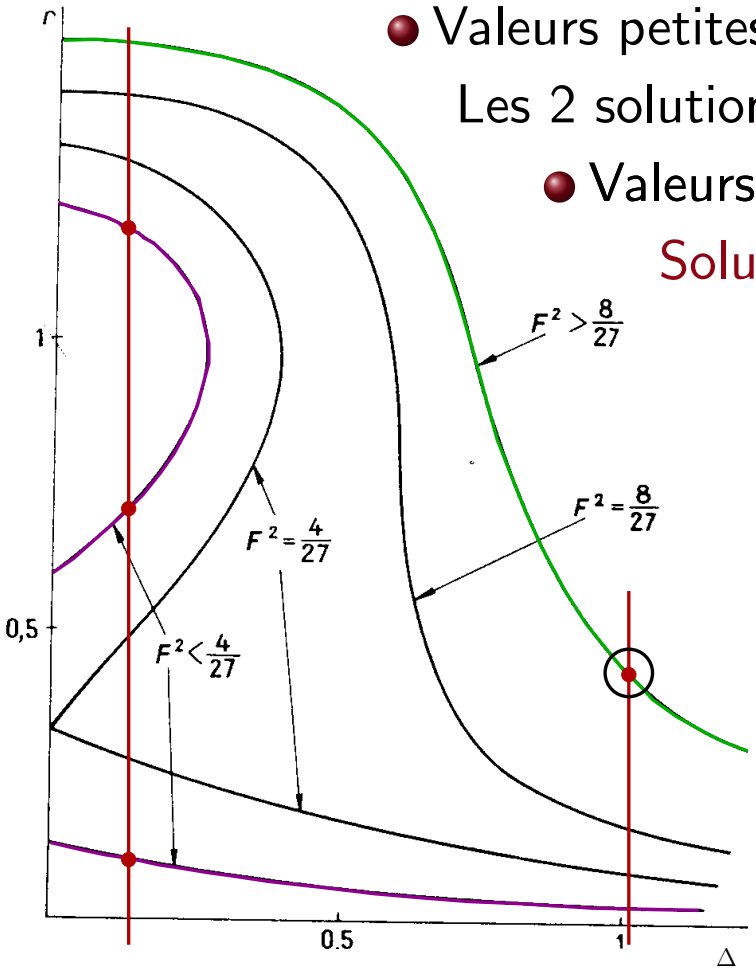
$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$



- Valeurs petites de $\Delta \Rightarrow$ 3 valeurs de r, solution de l'edq.
  Les 2 solutions les + faibles en amplitude sont instables.
  - Valeurs + grandes de $\Delta \Rightarrow$ 1 solution stable.

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

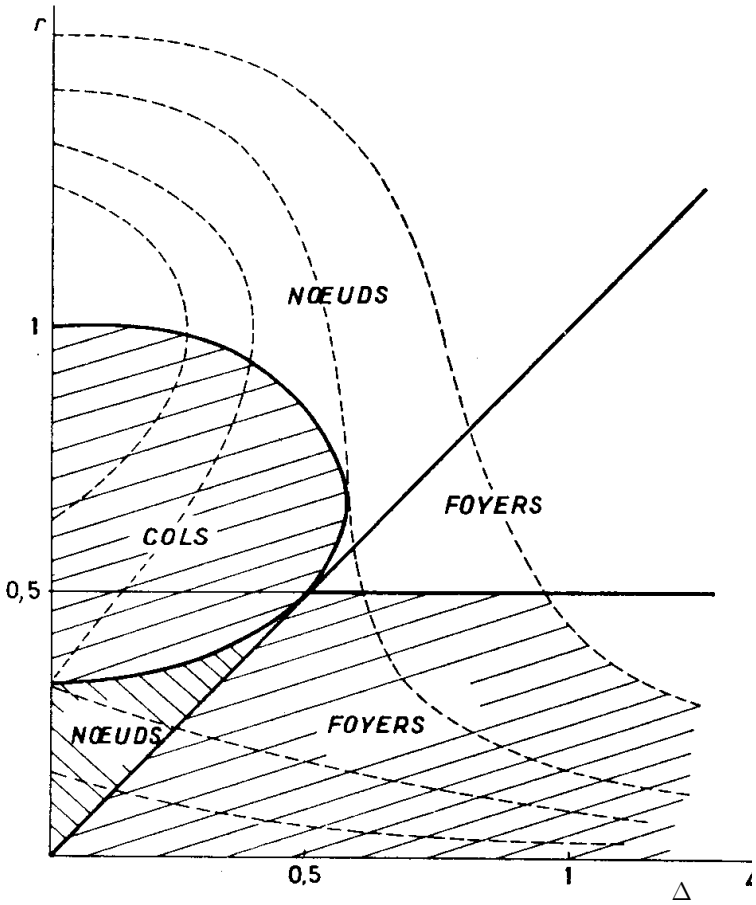
$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$



- Valeurs petites de $\Delta \Rightarrow$ 3 valeurs de r, solution de l'edq.
  Les 2 solutions les + faibles en amplitude sont instables.
  - Valeurs + grandes de $\Delta \Rightarrow$ 1 solution stable.
    Solution devient instable quand ω augmente.

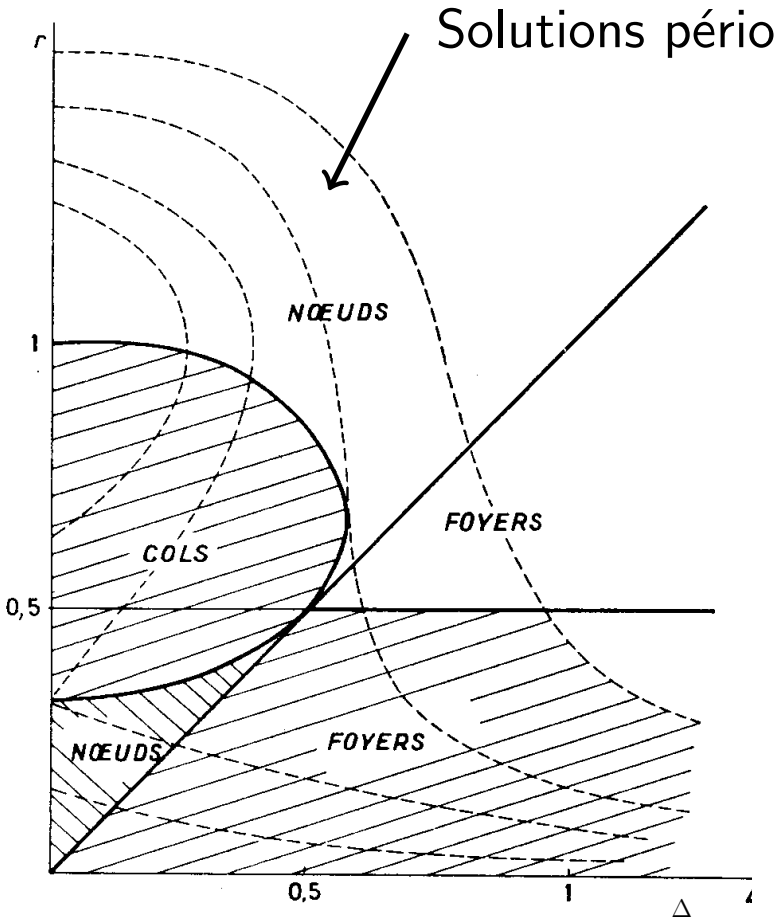
$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$



$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

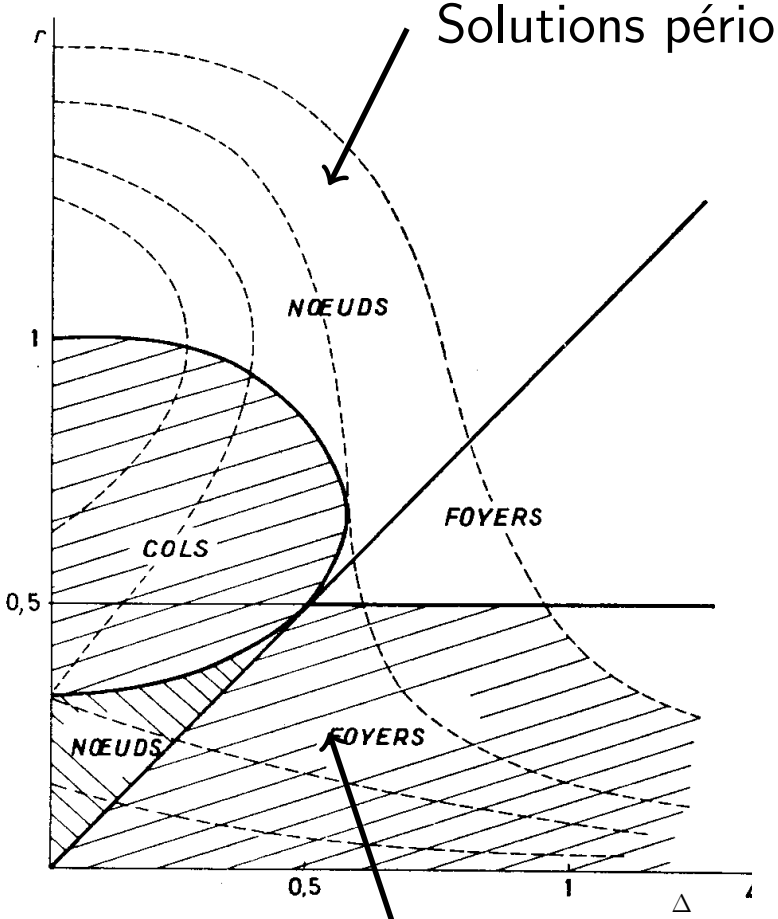
$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$



$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$

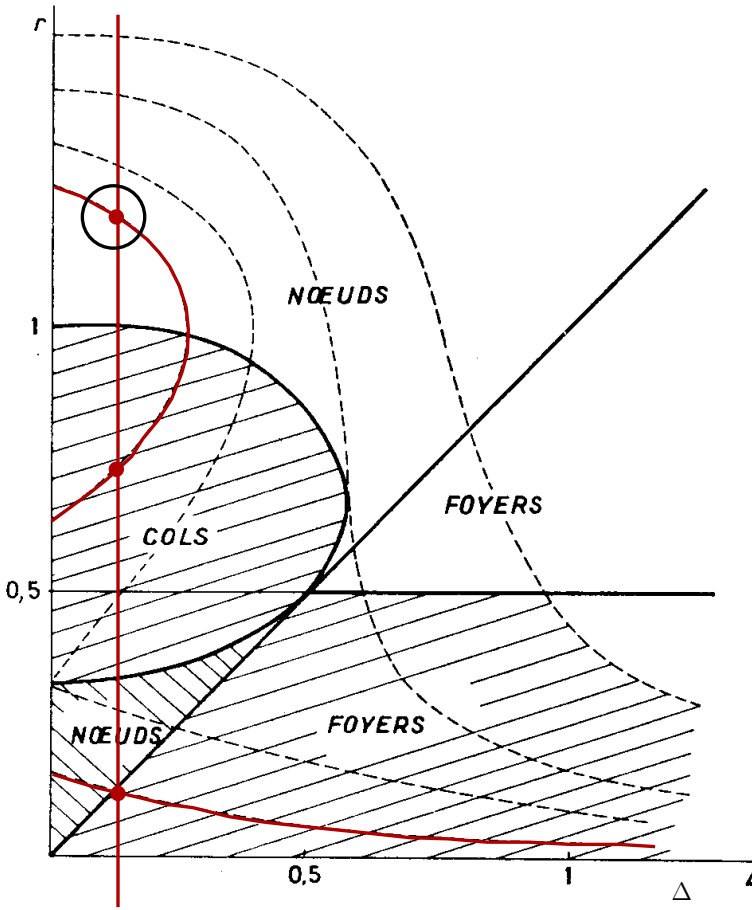
Solutions périodiques stables



Solutions périodiques instables

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$



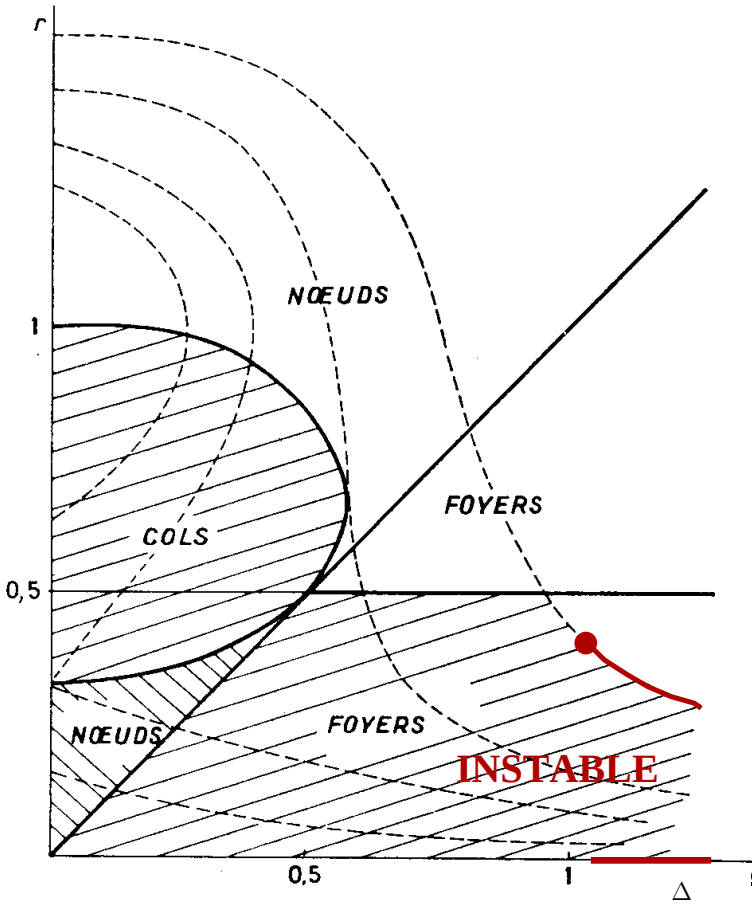
- 1 solution périodique stable

  $\Rightarrow$ **Synchronisation**

  L'oscillateur de VdP est **entraîné** par la source (même fréquence)

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

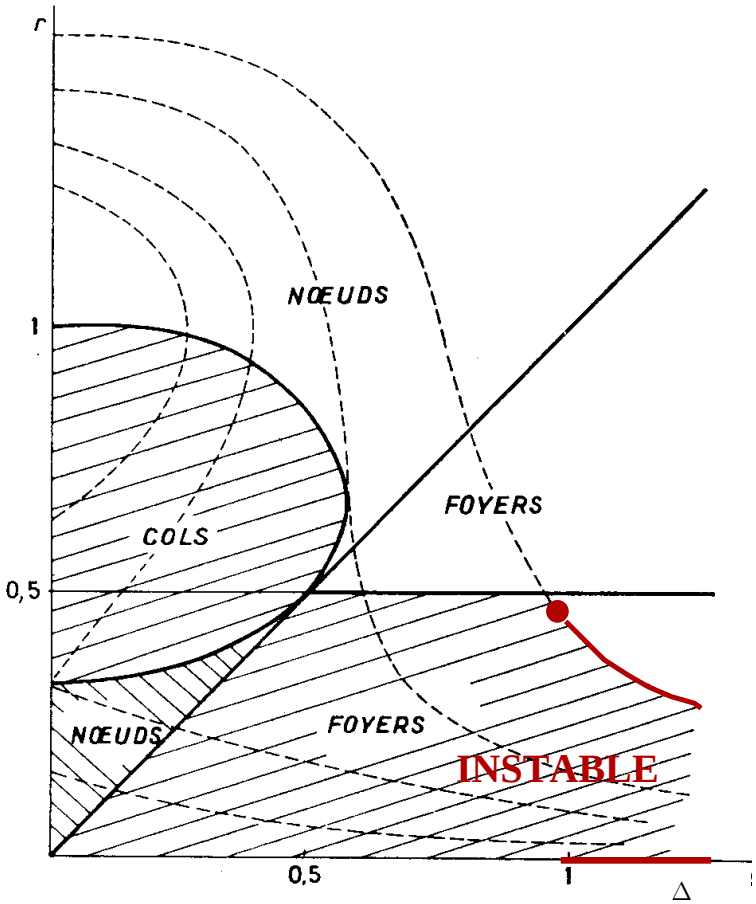
$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$



- 1 solution périodique stable
  $\Rightarrow$ **Synchronisation**
  L'oscillateur de VdP est **entraîné** par la source (même fréquence)
- Seuil fréquentiel de synchronisation

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

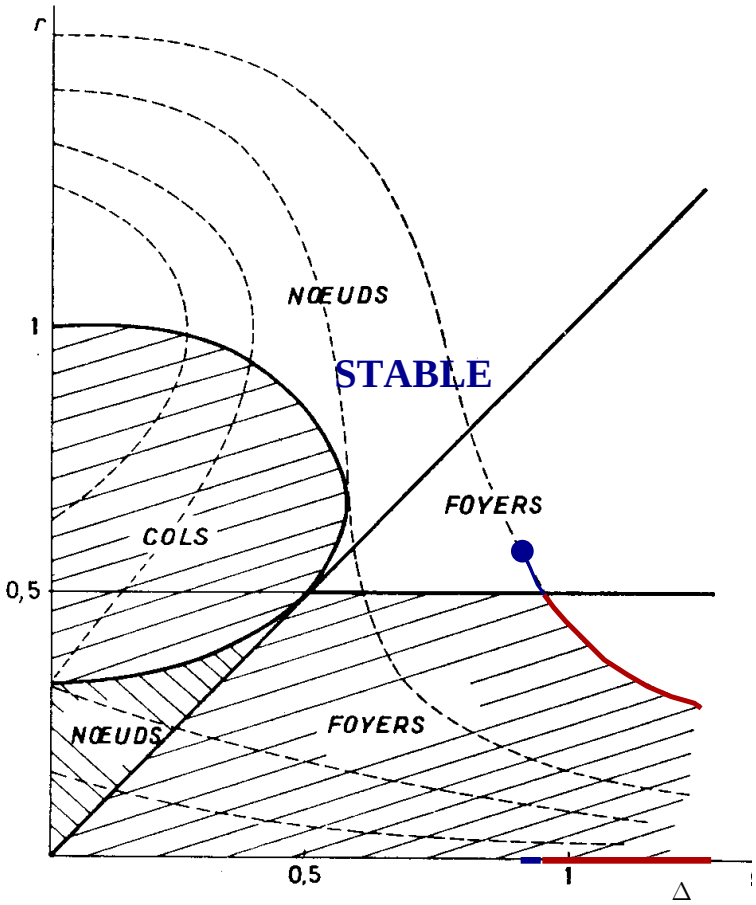
$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$



- 1 solution périodique stable
  $\Rightarrow$ **Synchronisation**
  L'oscillateur de VdP est **entraîné** par la source (même fréquence)
- Seuil fréquentiel de synchronisation

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

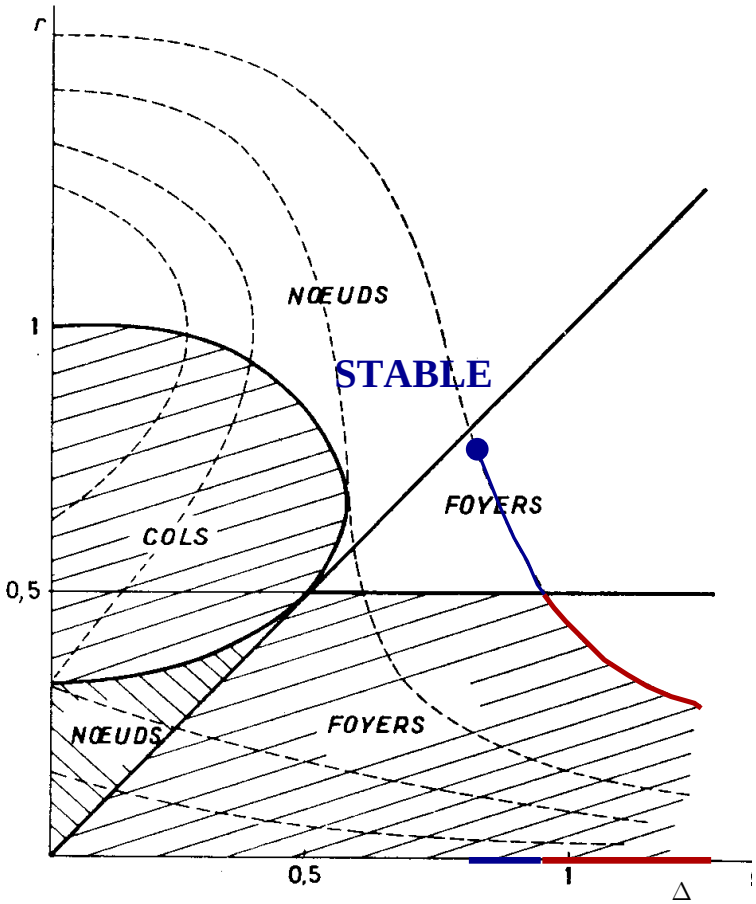
$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$



- 1 solution périodique stable
  $\Rightarrow$ **Synchronisation**
  L'oscillateur de VdP est **entraîné** par la source (même fréquence)
- Seuil fréquentiel de synchronisation

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

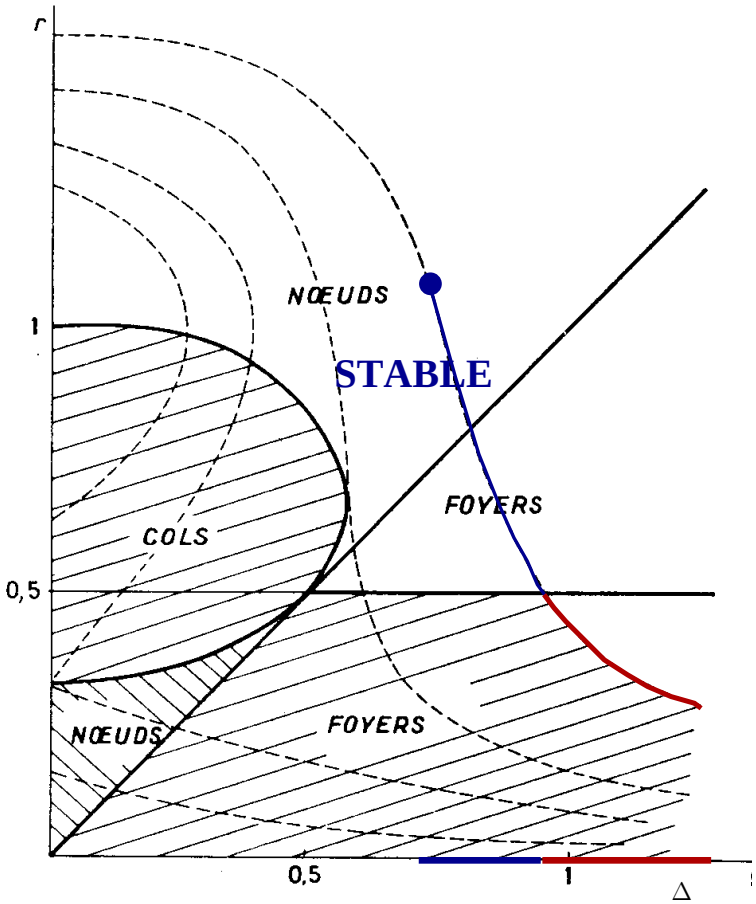
$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$



- 1 solution périodique stable
  $\Rightarrow$ **Synchronisation**
  L'oscillateur de VdP est **entraîné** par la source (même fréquence)
- Seuil fréquentiel de synchronisation

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

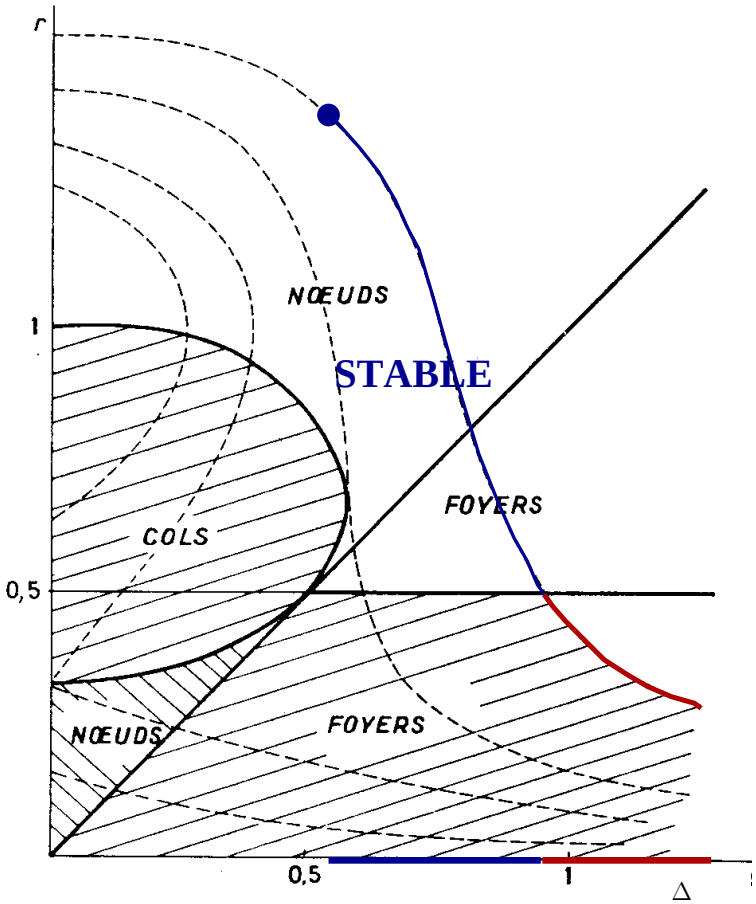
$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$



- 1 solution périodique stable
  $\Rightarrow$ **Synchronisation**
  L'oscillateur de VdP est **entraîné** par la source (même fréquence)
- Seuil fréquentiel de synchronisation

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$



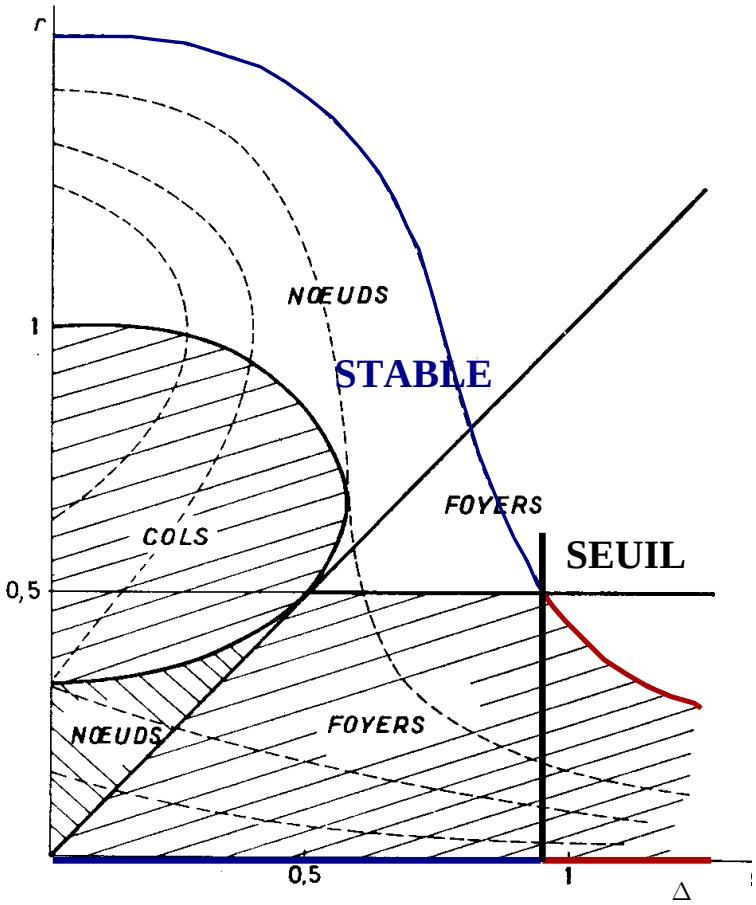
- 1 solution périodique stable

  $\Rightarrow$ **Synchronisation**

  L'oscillateur de VdP est **entraîné** par la source (même fréquence)
- Seuil fréquentiel de synchronisation

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

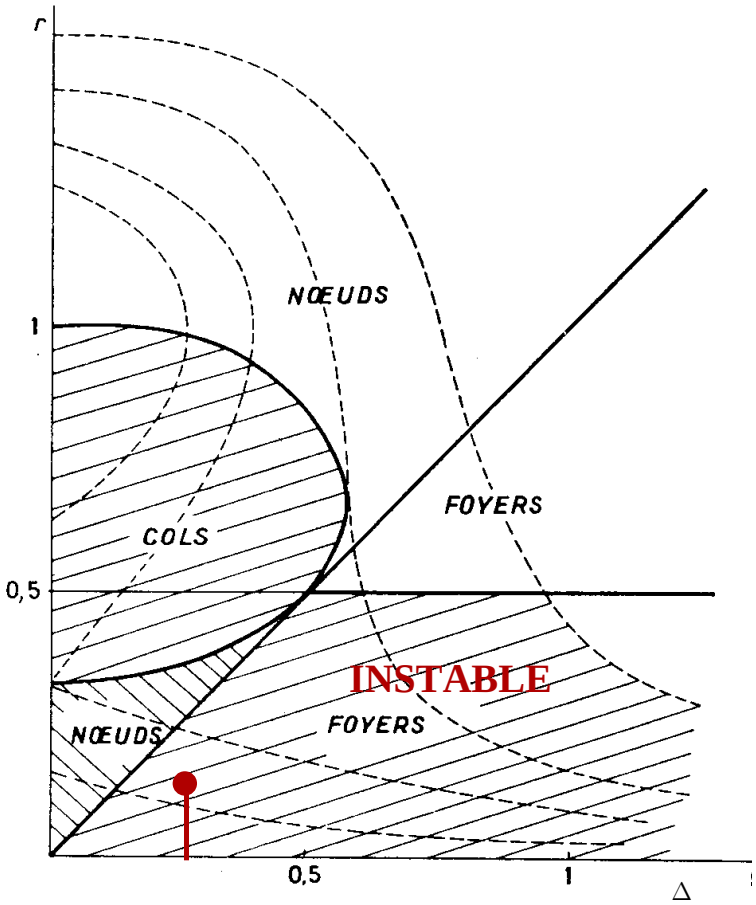
$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$



- 1 solution périodique stable
  $\Rightarrow$ **Synchronisation**
  L'oscillateur de VdP est **entraîné** par la source (même fréquence)
- Seuil fréquentiel de synchronisation

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

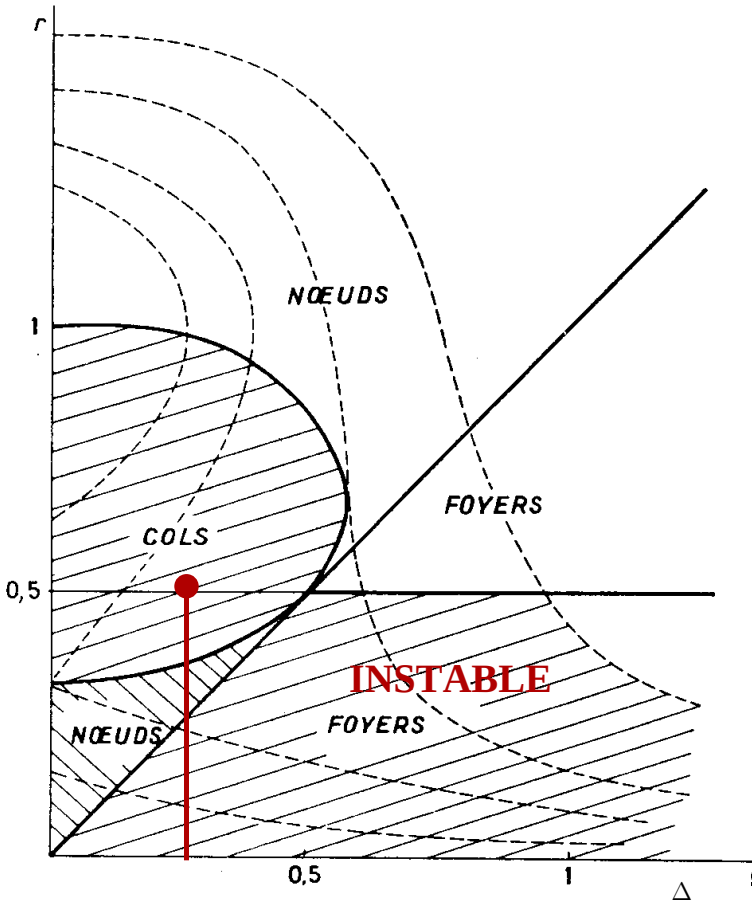
$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$



- 1 solution périodique stable
  $\Rightarrow$ **Synchronisation**
  L'oscillateur de VdP est **entraîné** par la source (même fréquence)
- Seuil fréquentiel de synchronisation
- Seuil d'amplitude de synchronisation

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

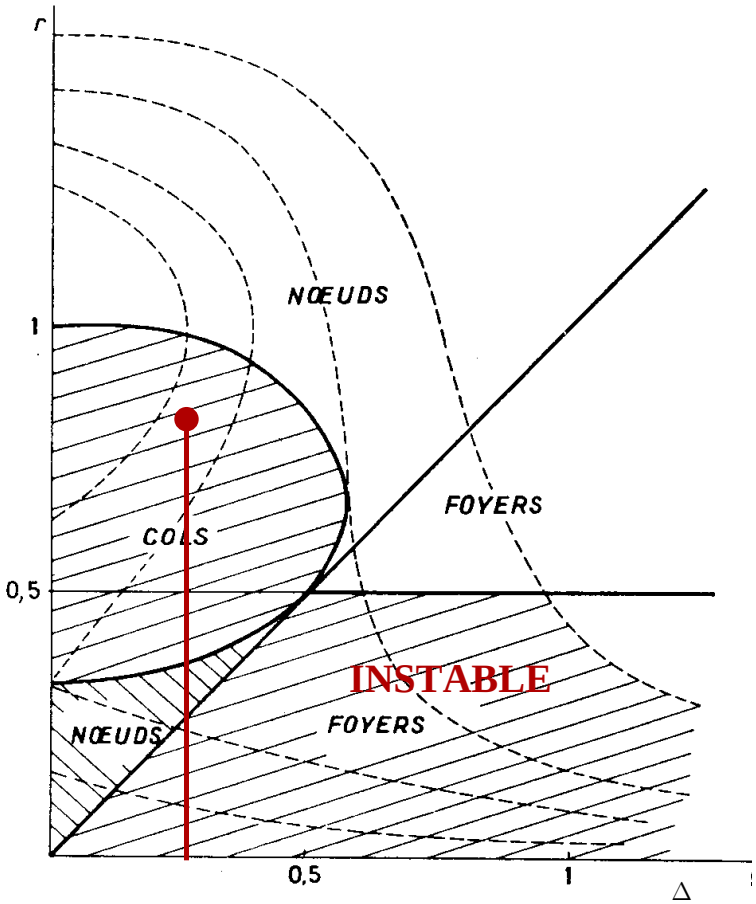
$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$



- 1 solution périodique stable
  $\Rightarrow$ **Synchronisation**
  L'oscillateur de VdP est **entraîné** par la source (même fréquence)
- Seuil fréquentiel de synchronisation
- Seuil d'amplitude de synchronisation

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

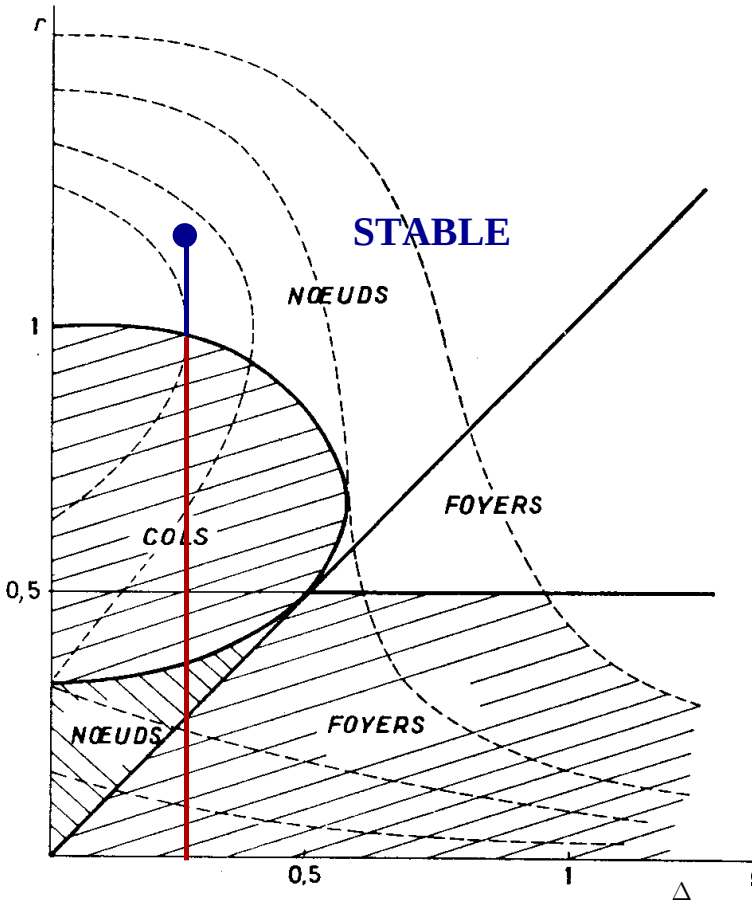
$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$



- 1 solution périodique stable
  $\Rightarrow$ **Synchronisation**
  L'oscillateur de VdP est **entraîné** par la source (même fréquence)
- Seuil fréquentiel de synchronisation
- Seuil d'amplitude de synchronisation

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

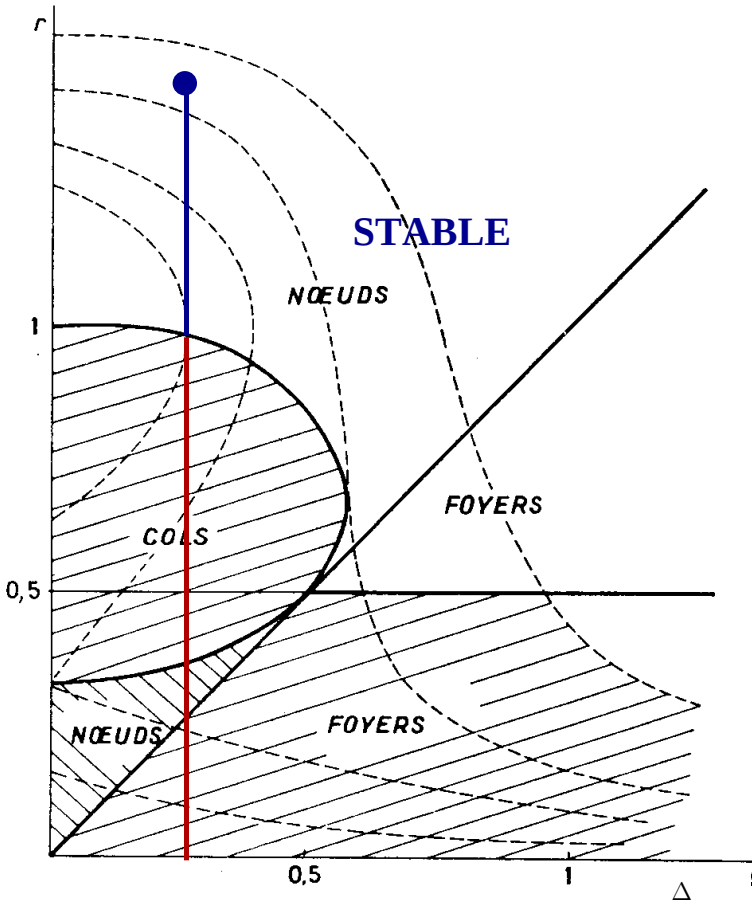
$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$



- 1 solution périodique stable
  $\Rightarrow$ **Synchronisation**
  L'oscillateur de VdP est **entraîné** par la source (même fréquence)
- Seuil fréquentiel de synchronisation
- Seuil d'amplitude de synchronisation

$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

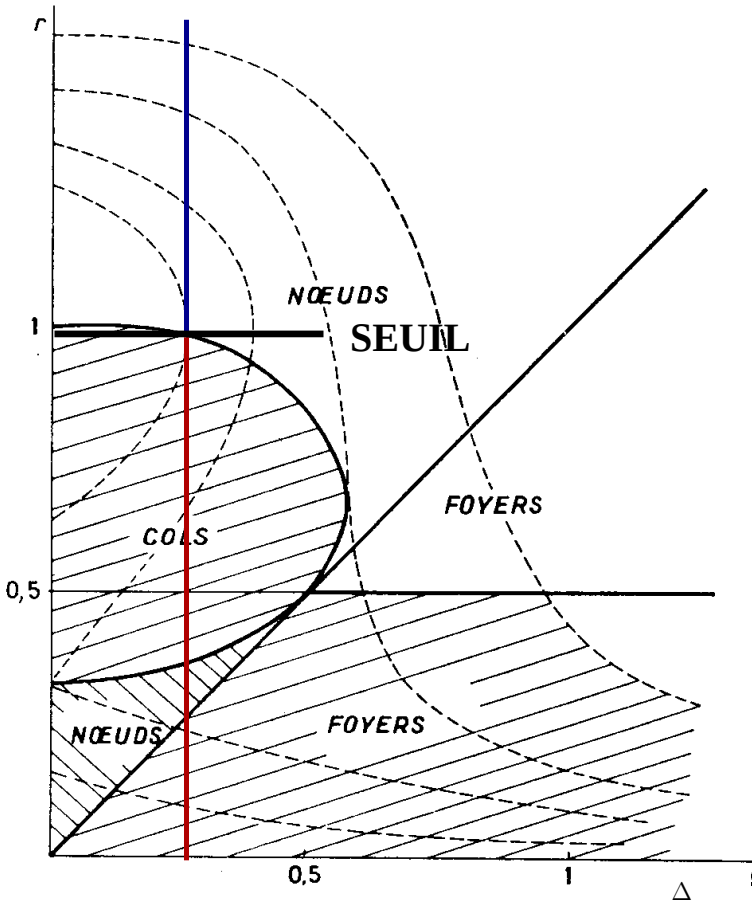
$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$



- 1 solution périodique stable
  $\Rightarrow$ **Synchronisation**
  L'oscillateur de VdP est **entraîné** par la source (même fréquence)
- Seuil fréquentiel de synchronisation
- Seuil d'amplitude de synchronisation

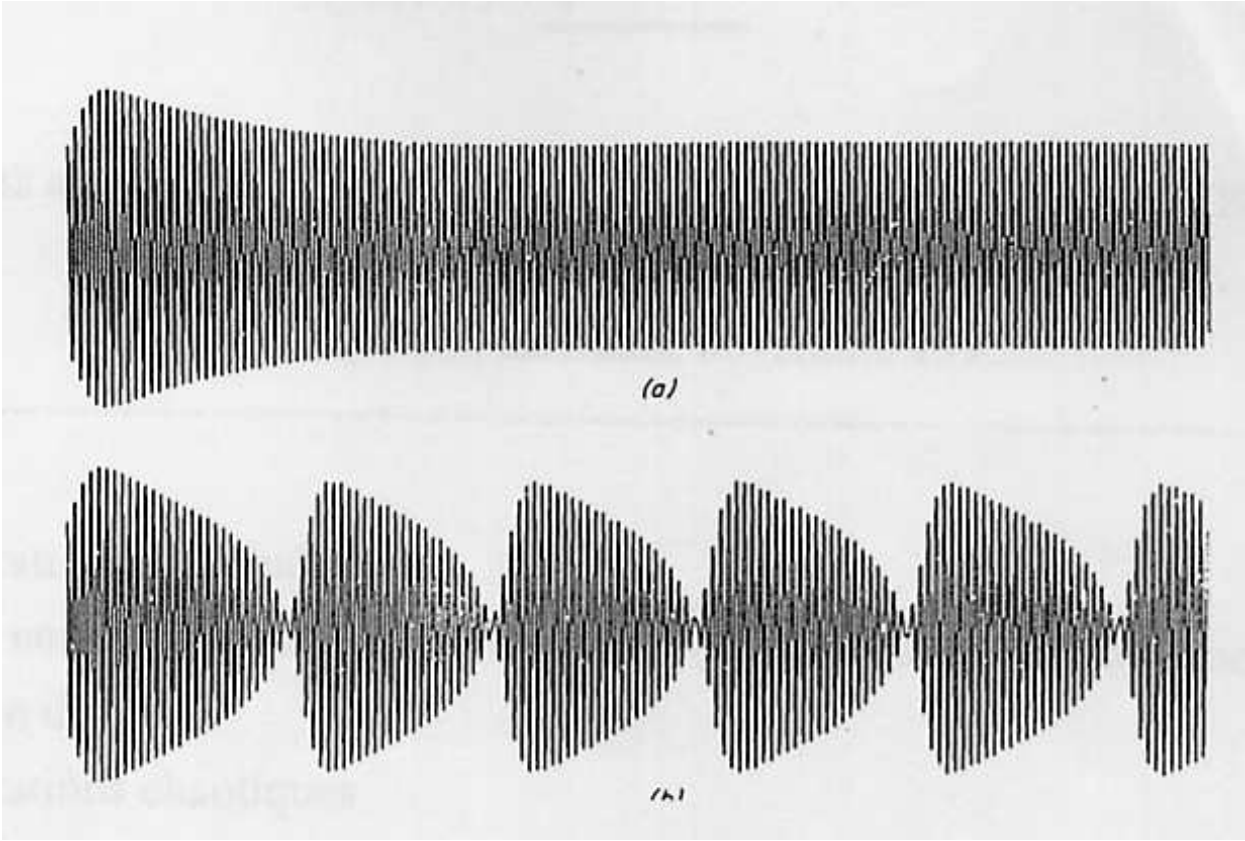
$$\ddot{x} + \mu\omega_0(\beta x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t).$$

$$F^2 = \frac{\beta p^2}{4\mu^2\omega_0^2} \qquad r = \beta/4A^2 \qquad \Delta = 2(\omega_0 - \omega)/(\mu\omega_0)$$



- 1 solution périodique stable
  $\Rightarrow$ **Synchronisation**
  L'oscillateur de VdP est **entraîné** par la source (même fréquence)
- Seuil fréquentiel de synchronisation
- Seuil d'amplitude de synchronisation

Synchronisation de l'oscillateur de Van der Pol

- En dessous du seuil de synchronisation (toutes les solutions périodiques sont instables), on peut observer des battements entre 2 fréquences.
- On peut également observer des régimes d'oscillations encore plus complexes voire même chaotique.

Synchronisation de l'oscillateur de Van der Pol : Exemple