ACADÉMIE DE NANTES

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE

Le Mans, FRANCE

Spécialité : **ACOUSTIQUE**

présentée par

Olivier RICHOUX

pour obtenir le titre de Docteur d'Université

ÉTUDE DE LA PROPAGATION DES ONDES MÉCANIQUES DANS UN RÉSEAU UNIDIMENSIONNEL COMPORTANT DU DÉSORDRE ET/OU DES NON-LINÉARITÉS LOCALISÉES.

Soutenue le 7 décembre 1999
devant le jury composé de

C. SOIZE	Professeur, Onera (rapporteur)
V. GIBIAT	Ingénieur de recherche (Docteur d'état), CNRS, ESPCI (rapporteur)
C. DEPOLLIER	Professeur, Université du Maine (co-directeur de thèse)
V. GUSEV	Professeur, Université du Maine
J. HARDY	Chargé de recherche, CNRS, Université du Maine (co-directeur de thèse)
J. P. SESSAREGO	Directeur de recherche (Docteur d'état), CNRS, LMA, Marseille

Remerciements

Je remercie C. Depollier et J. Hardy, les directeurs de cette thèse, de m'avoir guidé lors de cette recherche et de s'être toujours trouvé disponibles pour discuter de nombreuses questions scientifiques.

Je tiens aussi à remercier V. Pagneux pour s'être intéressé à ces travaux et pour son aide précieuse.

E. Egon et P. Collas m'ont permis d'avoir à ma disposition un montage expérimental de fort bonne qualité, je les en remercie.

Je remercie également C. Soize et V. Gibiat d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail ainsi que V. Gusev et J. P. Sessarego pour avoir fait partie du jury.

Enfin, je tiens à exprimer ma reconnaissance à toutes les personnes qui m'ont supporté et aidé durant ces années.

Merci à Julie pour ses encouragements, son soutien et son aide.

Table des matières

Introduction générale **7**

I Théorie **11**

1 Propagation dans les réseaux unidimensionnels linéaires **13**
1.1 Introduction . . . 13
1.2 Énoncé du problème . . . 14
1.3 Équations générales . . . 15
1.4 Formalisme matriciel . . . 16
1.4.1 Matrices de transmission . . . 16
1.4.2 Matrices de transfert . . . 17
1.4.3 Conclusion . . . 17
1.5 Cas des réseaux périodiques . . . 17
1.5.1 La théorie de Bloch . . . 17
1.5.2 Détermination de la fonction de Green . . . 20
1.6 Cas des réseaux désordonnés . . . 20
1.6.1 Introduction . . . 20
1.6.2 Localisation dans les réseaux unidimensionnels : modèle d'Anderson . . . 20
1.6.3 Notion de désordre . . . 22
1.6.4 Faible concentration d'hétérogénéités . . . 22
1.6.5 Désordre continûment distribué . . . 25
1.7 Conclusion et synthèse . . . 28

2 Propagation dans les réseaux unidimensionnels à non-linéarités localisées **29**
2.1 Introduction . . . 29
2.2 Bibliographie . . . 29
2.3 Description du système . . . 30
2.4 Équation de propagation . . . 31
2.5 Étude générale . . . 32
2.6 Utilisation de la méthode des perturbations . . . 33
2.6.1 Cas d'une non-linéarité . . . 33
2.6.2 Discussion et conclusion . . . 36
2.7 Transparence du milieu aux basses fréquences . . . 37
2.7.1 Caractérisation de la transmission . . . 37
2.8 Approche dynamique du problème . . . 38
2.8.1 Introduction . . . 38
2.8.2 Détermination des diagrammes de phases et des sections de Poincaré . . . 39
2.8.3 Discussion . . . 41
2.9 Conclusion et synthèse . . . 42

3 Méthode du "plongement invariant" (Invariant imbedding) 45
3.1 Introduction . . . 45
3.2 Application à la propagation des ondes . . . 45
3.2.1 Milieu linéaire . . . 46
3.2.2 Milieu non-linéaires . . . 49
3.3 Conclusion et synthèse . . . 50

II Etude numérique 53

4 Introduction 55

5 Équation générale et formalismes utilisés 57
5.1 Équation de propagation . . . 57
5.2 Formalismes . . . 58

6 Résultats numériques 61
6.1 Introduction . . . 61
6.2 Propagation linéaire . . . 61
6.2.1 Réseau ordonné . . . 61
6.2.2 Réseau désordonné . . . 62
6.3 Propagation non-linéaire . . . 67
6.3.1 Diagramme de phase . . . 67
6.3.2 Section de Poincaré . . . 75

7 Conclusion 79

III Etude expérimentale 81

8 Introduction 83

9 Dispositif expérimental et traitement des données 87
9.1 Le dispositif expérimental . . . 87
9.1.1 Introduction . . . 87
9.1.2 Description du dispositif . . . 88
9.2 Mesure des coefficients de transmission et de réflexion . . . 90
9.2.1 Calcul des coefficients de transmission et de réflexion . . . 90
9.2.2 Mesure des fonctions de transfert . . . 93
9.2.3 Calcul des incertitudes de mesure . . . 93
9.3 Techniques de traitement de signal . . . 94
9.3.1 Introduction . . . 94
9.3.2 La transformée de Fourier à court terme . . . 95
9.3.3 La distribution de Wigner-Ville . . . 96
9.3.4 Conclusion . . . 96

10 Le résonateur de Helmholtz : théorie et expérience 97
10.1 Introduction . . . 97
10.2 Description du résonateur . . . 97
10.3 Modèle non-linéaire du résonateur de Helmholtz . . . 97
10.3.1 Utilisation des propriétés élastiques de l'air . . . 98
10.3.2 Détermination de l'admittance d'entrée du résonateur . . . 99
10.3.3 Effet des non-linéarités sur la fréquence de résonance . . . 100

10.4 Calcul de l'impédance d'entrée linéaire d'un résonateur de Helmholtz 101
10.4.1 Cas sans perte 101
10.4.2 Cas avec pertes 102
10.5 Résultats expérimentaux 102
10.5.1 Équations et approche expérimentale 103
10.5.2 Résultats 104
10.6 Conclusion 114

11 Propagation à travers un réseau acoustique 115
11.1 Théorie 115
11.1.1 Le réseau acoustique 115
11.1.2 L'équation de propagation 116
11.2 Expérience 117
11.2.1 Introduction 117
11.2.2 Propagation dans un réseau : le cas linéaire 117
11.2.3 Effets des non-linéarités sur la transmission 126
11.2.4 Conclusion 131

Conclusion générale 133

A Calcul de la fonction de Green pour le cas linéaire non perturbé 137

Introduction générale

La propagation des ondes mécaniques dans des milieux complexes est un sujet qui ne manque pas d'intérêt car les applications sont nombreuses et que beaucoup de questions restent encore sans réponse. Ces milieux se retrouvent dans un grand nombre de domaines distincts en physique qui vont, pour les ondes mécaniques, des vibrations des structures complexes en aérospatiale (ou aéronautique) jusqu'à la propagation de l'onde de choc créée par un train à grande vitesse dans un tunnel. On peut aussi citer la transmission des ondes dans les milieux stratifiés tels que ceux rencontrés en géophysique ou bien la propagation des vibrations transversales le long des caténaires ferroviaires.

Les travaux d'Anderson sur la propagation des électrons dans les cristaux ont montré que la présence de désordre dans un milieu où évoluent les ondes, induit la localisation de l'énergie au voisinage des hétérogénéités. Les effets de cette localisation peuvent expliquer les dégâts que provoquent la présence d'inhomogénéités sur les structures. On comprend donc l'intérêt que suscitent ces études pour les recherches aérospatiales où les atténuations normales dues à la présence de l'air sont absentes.

Dans le cas des ondes de chocs créées par le passage de trains à grande vitesse dans les tunnels, le caractère unidimensionnel du milieu implique que seule une atténuation physique peut empêcher sa propagation. On peut néanmoins placer une série de résonateurs acoustiques (de type Helmholtz) en dérivation pour atténuer les effets génants. Avec des résonateurs placés régulièrement, l'effet de filtre du milieu apparaît comme le prédit la théorie de Bloch. Ceci entraîne, lorsque la fréquence de l'onde se situe dans une bande passante, un renforcement des nuisances pour les voyageurs et des problèmes liés à de fortes vibrations de la structure du train. Au contraire, pour une fréquence appartenant à une bande interdite, l'onde est atténuée exponentiellement. Pour un placement irrégulier des dérivations, la localisation de l'énergie à l'intérieur du tunnel n'améliore pas la situation et le problème reste entier. On peut donc se poser la question de l'efficacité de ce genre de dispositif étant donné le niveau important des ondes sonores qui impliquent des non-linéarités certaines. Quel rôle jouent-elles sur l'atténuation exponentielle supposée des ondes dans les bandes interdites ? La présence de fortes énergies renforce t-elle la structure de bandes passantes et interdites ou bien la détruit-elle ? On comprend bien qu'un effet d'élargissement des bandes passantes signifierait une dégradation des performances des systèmes d'atténuation par les résonateurs à cause des non-linéarités.

Le même genre d'interrogations se pose lorsque l'on étudie la propagation des ondes acoustiques à travers des milieux stratifiés en géophysique. L'interface entre chaque couche de matériaux peut être le théatre de phénomènes non-linéaires. Le brusque changement d'impédance du milieu ajouté à des conditions aux limites de type frottements secs entraîne une réponse non-linéaire du milieu. Dans cette optique, il est intéressant de connaître l'influence des non-linéarités sur la transmission des ondes et leurs effets sur une éventuelle localisation.

Depuis quelques temps, des travaux abordent des problèmes liés aux conséquences de la présence de non-linéarités dans un milieu où se propagent des ondes. Par exemple, des travaux théoriques (Kosevich 1990 [1], Kivshar et Gredeskul 1990 [2]) ont étudié les effets d'atténuation sur les solitons qu'engendre la présence de désordre dans un milieu de propagation. Rappelons que pour un soliton, lors de sa propagation, la dispersion est compensée par les effets non-linéaires ce qui assure la permanence de son profil. Les résultats de ces recherches ont montré que la

localisation est affaiblie en présence de fortes non-linéarités. Dans le même ordre d'idée, on peut citer les récents travaux expérimentaux sur la propagation d'une impulsion non-linéaire dans des milieux désordonnés (Hopkins et *al* 1998 [3]) qui traduisent l'influence des non-linéarités localisées sur le phénomène de localisation de Anderson.

Par analogie avec ces travaux, nous avons l'idée d'étudier la propagation d'ondes mécaniques dans des réseaux unidimensionnels comportant du désordre et/ou des non-linéarités localisées. On peut se demander si l'existence de phénomènes non-linéaires, entraîne une modification de la localisation de l'énergie. Qu'advient-il des interférences, qu'elles soient constructives ou destructives ?

Ce travail se distingue des études citées précédemment car l'on s'intéresse à la propagation d'ondes monochromatiques. Cette solution a été aussi rapidement abordée par Hopkins et *al*, dans le cas de non-linéarités non localisées et leurs résultats n'ont pas mis en évidence d'influence des non-linéarités sur la propriétés de localisation. Pour notre part, nous pensons que l'ajout de non-linéarités dans un milieu ordonné ou non entraîne obligatoirement une modification de la réponse de ce milieu. Quelle est l'influence de ces non-linénarités sur la localisation ? Mais aussi quels sont les effets du désordre sur la propagation non-linéaire ? Ce sont les questions auxquelles nous allons essayer d'apporter des réponses dans le travail de cette thèse.

Ce document est organisé en trois parties distinctes partageant le travail entre l'étude théorique du problème et les résultats d'applications en mécanique et en acoustique.

La première partie présente une étude théorique de la propagation dans des réseaux ordonnés ou désordonnés comportant des non-linéarités localisées. Dans un premier temps, la propagation en régime linéaire est traitée au moyen de différentes méthodes analytiques qui permettent de construire des simulations numériques. Ensuite, l'introduction de non-linéarités localisées dans de tels milieux est étudiée, en proposant, lorsque cela est possible, des calculs analytiques (détermination de fonction de Green ou du coefficient de transmission) et en développant des approches nouvelles en physique classique. Puis, la méthode de "plongement invariant" (invariant imbedding) est appliquée à la propagation des ondes dans un réseau dans le cas d'un régime linéaire et non-linéaire. Cette approche, peu utilisée en mécanique, permet de déterminer directement les coefficients de transmission et de réflexion d'un réseau quelconque ou d'un milieu stratifié sans approximation.

La deuxième partie propose une application basée sur des simulations numériques de ce problème. On étudie la propagation des vibrations le long d'une corde vibrante chargée par des systèmes masse-ressort présentant un comportement non-linéaire. La plupart des notions développées dans la partie précédente sont mises en oeuvre et comparées aux résultats de simulations numériques. L'effet des non-linéarités sur la localisation est explicitement montré et des aspects encore inconnus dans la littérature sont exposés dans les résultats, notamment en utilisant une approche dynamique du problème.

Finalement, une étude expérimentale est présentée dans la troisième et dernière partie. Le milieu est constitué d'un guide d'onde cylindrique sur lequel sont disposés régulièrement des résonateurs de Helmholtz dont le volume est réglable. Après avoir décrit le dispositif expérimental et explicité les différentes méthodes de mesures et de traitement des données, nous nous efforçons de montrer le caractère non-linéaire de la réponse d'un résonateur de Helmholtz pour de fortes amplitudes de l'onde incidente. Un modèle analytique simple est développé et comparé à des résultats expérimentaux. L'aspect non-linéaire d'un résonateur de Helmholtz ressort clairement de cette comparaison et une correction du modèle est nécessaire pour améliorer son efficacité. La propagation d'une onde acoustique dans un réseau ordonné ou désordonné comportant des non-linéarités localisées (au niveau de chaque dérivation) est ensuite étudié expérimentalement en disposant 60 de ces résonateurs en dérivation sur le tube. Le désordre est introduit par l'intermédiaire de variations aléatoires des volumes des résonateurs. Dans un premier temps, le cas linéaire est traité et les résultats expérimentaux et théoriques sont en parfaite adéquation.

La dispersion d'un tel milieu est montrée au moyen d'une analyse temps-fréquence des signaux avant et après le réseau. Puis, l'influence des non-linéarités sur la propagation dans un réseau ordonné ou désordonné est clairement mise en évidence par la détermination expérimentale de la longueur de localisation puis par une analyse temps-fréquence.

Première partie

Théorie

Chapitre 1

Propagation dans les réseaux unidimensionnels linéaires

1.1 Introduction

Les effets de la présence de désordre sur la propagation dans un milieu linéaire sont étudiés dans ce chapitre. Cette étude se restreint au cas unidimensionnel par souci de simplicité et intentionnellement, les notions théoriques développées sont les plus générales possible.

Evidemment, pour observer les effets de la présence de désordre dans un milieu, il est indispensable de connaître parfaitement son comportement dans un état ordonné. C'est l'une des raisons qui nous a poussé à choisir d'étudier la propagation à travers un réseau. Le comportement d'un réseau unidimensionnel ordonné est typique et facilement reconnaissable : le spectre de la transmission se découpe en une succession de bandes en fréquence où le régime est soit propagatif (bandes passantes) soit évanescent (bandes interdites). Le réseau ordonné agit donc comme un filtre en fréquence, partageant la transmission en une partie complètement opaque et une partie transparente. La deuxième raison de ce choix est l'existence de la théorie de Bloch qui permet de localiser très précisément ces différents régimes (Bloch 1928 [4]). Ce genre de transmission a d'ailleurs largement été traité par la littérature dans de nombreuses branches de la physique telles que l'acoustique (Bradley 1994 [5], Sugimoto et Horioka 1995 [6]), la mécanique quantique (Sprung et Wu 1993 [7], Griffiths et Taussig 1992 [8]), la mécanique (Cremer et *al* 1973 [9]) et la physique du solide (Bentalosa et *al* 1982 [10]).

C'est l'effet du désordre (réseau irrégulier) sur l'emplacement de ces bandes qui est étudié dans ce chapitre. Le réseau régulier sert de référence et l'écart par rapport à l'ordre lorsque des inhomogénéités sont rajoutées permet de déterminer et de quantifier précisément l'influence du désordre sur la propagation et la transmission. De très nombreux travaux ont été menés au sujet de l'effet du désordre sur la propagation et, là aussi, beaucoup de domaines différents de la physique sont touchés. Les premières études sont apparues en physique du solide (Dyson 1953 [11], Schmidt 1956 [12]), puis se sont étendues à la mécanique quantique (voir Anderson et *al* 1980 [13], et les références dans Sánchez et *al* 1994 [14]), et à la physique classique (Mead et Lee 1984 [15], Sheng et *al* 1986 [16], Flesia et *al* 1987 [17], Souillard 1989 [18], Soukoulis et *al* 1989 [19], Sornette 1989 [20]). Plus précisément, l'influence d'un champ électrique sur le transport des électrons dans un milieu désordonné a fait l'objet de quelques travaux (Soukoulis et *al* 1983 [21], Bleibaum et *al* 1995 [22]) ainsi que la propagation des ondes acoustiques (Depollier 1986 [23], Sornette 1989 [20], Figotin et Klein 1996 [24]), mécaniques (Hodges 1982 [25], Pierre 1987 [26], Chan et Cai 1998 [27]) ou électromagnétiques (Ursin 1983 [28], Ziolkowski 1991 [29]). De nos jours, ce phénomène est étudié à travers de très nombreuses applications comme la propagation de la lumière (Tiggelen et *al* 1992 [30]), la géophysique (Gilbert 1980 [31], Klyatskin et Saichev 1992 [32]), la semi-conductivité (Diez et *al* 1996 [33]) et la propagation dans les plasmas.

Cette longue liste illustre l'intérêt des scientifiques pour ce problème qui recèle encore de

nombreux points d'interrogation. Le caractère irrémédiable de la localisation n'est toujours pas compris et l'étude des moyens capables de délocaliser une onde est encore d'actualité (Soukoulis et *al* 1994 [34], Heinrichs 1995 [35]).

En outre, les cas bi-dimensionnel et tri-dimensionnel sont maintenant envisagés. Les phénomènes observés sont différents que dans les milieux unidimensionnels car la localisation des ondes n'est plus observée aussi facilement. Là aussi, toutes les branches de la physique moderne sont représentées et le nombre d'articles paraissant dans la littérature ne cesse de croître. Ainsi, les ondes classiques (Heckl 1964 [36]) et électromagnétiques (Busch et *al* 1995 [37], Sigalas et *al* 1996 [38]) sont largement traitées et les études dans le domaine de la physique quantique (Furusaki 1999 [39], Soukoulis et Grest 1991 [40], Abrahams et *al* 1979 [41]) ou de la propagation de la lumière (de Vries et *al* 1989 [42], Akkermans et Maynard 1985 [43]) mettent en évidence une localisation pour les réseaux bi-dimensionnel et tri-dimensionnel. L'effet du désordre dans ces cas là est à peu près le même que pour un réseau unidimensionnel même si la force du désordre doit être bien plus grande pour un résultat équivalent.

Néanmoins, ce travail n'envisage pas de cas similaires et seule la propagation dans un milieu unidimensionnel est étudiée.

1.2 Énoncé du problème

Ce chapitre porte essentiellement sur l'étude de la propagation linéaire à travers un réseau unidimensionnel. Le réseau considéré est constitué d'un milieu unidimensionnel infini et parfaitement homogène chargé aux points x_n par des forces F_n dérivant d'un potentiel V_n (voir schéma 1.1). Par ailleurs, les forces F_n sont supposées être linéaires.

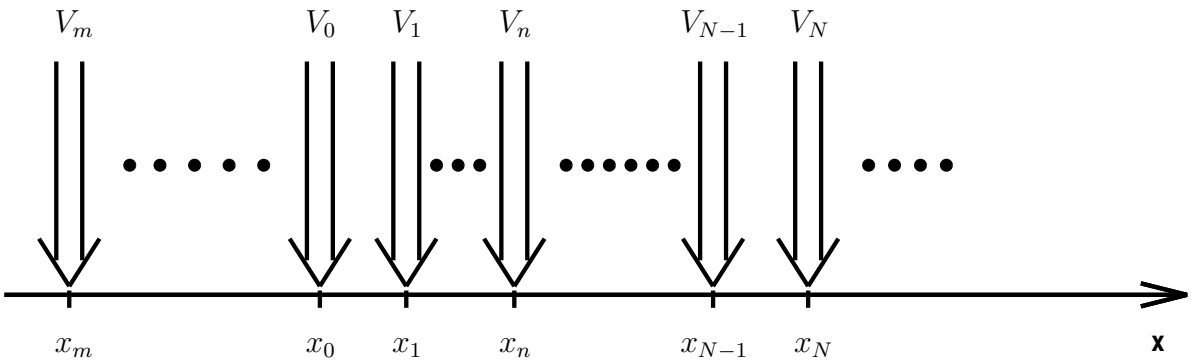

FIG. 1.1 – Représentation schématique du milieu de propagation

Le cas linéaire est abordé à travers deux systèmes distincts qui constituent les deux grandes parties de ce chapitre : la propagation à travers un réseau périodique (ou régulier) et la propagation à travers un réseau désordonné dont les caractéristiques (par exemple le potentiel de chaque site ou la longueur de chaque cellule) varient dans l'espace.

Dans un premier temps, les équations générales décrivant la propagation dans un réseau sont établies : la transmission à travers un réseau régulier est traitée d'une façon analytique grâce à la théorie de Bloch mais une méthode numérique est aussi développée. Le cas du réseau désordonné est notamment abordé au moyen de la méthode des perturbations qui utilise la fonction de Green du milieu perturbé ; un formalisme décrivant la propagation au moyen d'une matrice permet d'aborder le cas général (désordre quelconque). En effet, en présence de désordre, la propagation est caractérisée par des simulations numériques car aucun calcul analytique n'est possible.

Enfin une synthèse permet de récapituler les différents résultats en insistant sur ceux encore inconnus dans la littérature.

1.3 Équations générales

La propagation dans un milieu unidimensionnel, sans source, d'une onde $\Psi(x,t)$ est décrite par l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2} = 0, \tag{1.1}$$

associée à des conditions initiales et à des conditions aux limites. Dans cette équation, c représente la célérité de l'onde dans le milieu.

Dans le problème considéré, les conditions aux limites, représentées par les discontinuités du réseau, se déduisent du comportement de la fonction $\Psi(x,t)$ ou de sa dérivée spatiale $\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}$ aux points x_n. Par la suite, la propagation d'une onde harmonique est étudiée ce qui permet d'écrire le champ sous la forme $\Psi(x,t) = \Psi(x)e^{j\omega t}$.

Si la fonction $\Psi(x,t)$ est continue en x_n et que sa dérivée est discontinue, alors les conditions aux limites en x_n s'écrivent

$$\begin{cases} \Psi(x_n^+) = \Psi(x_n^-) \\ \frac{d\Psi(x)}{dx}|_{x_n^+} - \frac{d\Psi(x)}{dx}|_{x_n^-} = \sigma_n\Psi(x_n) \end{cases} \tag{1.2}$$

et l'équation de propagation pour la distribution $\Psi(x)$ devient

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\Psi(x) = \sigma_n\Psi(x_n)\delta(x-x_n), \tag{1.3}$$

oú $\delta(x)$ est la distribution de Dirac.

Au contraire, si la fonction $\Psi(x,t)$ est discontinue en x_n et que sa dérivée est, pour sa part, continue, les conditions aux limites se mettent sous une forme différente :

$$\begin{cases} \Psi(x_n^+) - \Psi(x_n^-) = \eta_n\frac{d\Psi(x)}{dx}|_{x_n} \\ \frac{d\Psi(x)}{dx}|_{x_n^+} = \frac{d\Psi(x)}{dx}|_{x_n^-} \end{cases} \tag{1.4}$$

et l'équation de propagation s'écrit alors

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\Psi(x) = \eta_n\frac{d\Psi(x)}{dx}|_{x_n}\delta(x-x_n). \tag{1.5}$$

Les équations (1.3) et (1.5) prennent en compte les conditions aux limites en $x = x_n$ et leur membre de droite peut être interprété comme un terme de source (rôle de diffuseur de la discontinuité). Lorsqu'elle est excitée par une onde incidente, la discontinuité du milieu au point x_n se comporte comme une source secondaire qui, à son tour, rayonne dans les deux directions, à savoir, une onde réfléchie vers la gauche et une onde transmise vers la droite. Dans la suite de ce travail, les applications proposées appartiennent toutes au cas où la fonction d'onde est continue et sa dérivée discontinue. Par conséquent, seul ce cas particulier sera étudié.

Équation de propagation

Il découle de la relation (1.3) que l'équation régissant la propagation à travers un réseau comportant des discontinuités aux points x_n ($\forall n$) prend la forme suivante :

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\Psi(x) = \sum_n \delta(x-x_n)\sigma_n\Psi(x). \tag{1.6}$$

De même que pour une discontinuité, le second membre de cette équation représente des sources secondaires qui émettent les unes après les autres au passage de l'onde sur chaque discontinuité. Ces sources sont caractérisées d'une part par la valeur de la discontinuité σ_n et d'autre

part par la valeur de la fonction $\Psi(x)$ au point considéré. Dans le cas d'un réseau périodique, elles sont toutes identiques ($\sigma_n = \sigma$, $\forall n$) et à égale distance les unes des autres.

Pour étudier les solutions de l'équation de propagation (1.6), plusieurs méthodes sont envisageables :

- le développement en série de la fonction $\Psi(x)$, sur une base de fonction (théorie de Bloch), pour prendre en compte la périodicité de la solution. Cette issue n'est possible que pour le cas d'un réseau régulier et permet de trouver une solution analytique au problème ;
- la fonction de Green du milieu peut, elle aussi, être calculée dans le cas d'un réseau périodique ou lorsque quelques inhomogénéités sont présentes (utilisation de la théorie des perturbations) ;
- le formalisme matriciel décrit la propagation à l'aide d'un produit de matrices définissant chacune le passage de l'onde d'une cellule à la suivante. Seule cette solution est adaptée à n'importe quelle configuration (avec ou sans désordre) et permet de résoudre les cas les plus complexes.

1.4 Formalisme matriciel

Ce formalisme est adapté à toutes sortes de configurations et notamment à la présence de désordre dans le réseau. Il permet de décrire la propagation par un produit de matrice définissant chacune une cellule du réseau.

La solution, pour la n^{ieme} cellule ($x_n \leq x < x_{n+1}$), est définie comme une superposition linéaire de deux ondes planes

$$\Psi(x) = A_n e^{jk(x-x_n)} + B_n e^{-jk(x-x_n)} \tag{1.7}$$

où A_n et B_n représentent respectivement les amplitudes de l'onde aller et retour entre x_n et x_{n+1} et $k = \frac{\omega}{c}$ est le nombre d'onde. Les conditions de continuité pour $\Psi(x)$ et de discontinuité pour sa dérivée (voir section précédente) sont prises en compte et permettent de trouver une relation de récurrence entre deux sites consécutifs du réseau :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A_{n+1} & = & (1+\frac{\sigma_{n+1}}{2jk})A_n e^{jkd_{n+1}} + \frac{\sigma_{n+1}}{2jk} B_n e^{-jkd_{n+1}}, \\ B_{n+1} & = & -\frac{\sigma_{n+1}}{2jk} A_n e^{jkd_{n+1}} + (1-\frac{\sigma_{n+1}}{2jk}) B_n e^{-jkd_{n+1}}, \end{array} \right. \tag{1.8}$$

où σ_{n+1}, qui représente le saut de la dérivée de la fonction d'onde à chaque nœud x_{n+1}, dépend de la position de l'onde dans le réseau et où $d_{n+1} = x_{n+1} - x_n$ désigne la distance entre deux sites consécutifs.

Une solution générale de la propagation à travers un réseau quelconque est ainsi définie. Le système est réduit à une séquence infinie de cellules unidimensionnelles couplées de longueur d_n.

1.4.1 Matrices de transmission

Les relations (1.8) peuvent aisément se mettre sous une forme matricielle reliant les amplitudes du champ de chaque côté d'un diffuseur :

$$\begin{bmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+\frac{\sigma_{n+1}}{2jk})e^{jkd_{n+1}} & \frac{\sigma_{n+1}}{2jk} e^{-jkd_{n+1}} \\ -\frac{\sigma_{n+1}}{2jk} e^{jkd_{n+1}} & (1-\frac{\sigma_{n+1}}{2jk})e^{-jkd_{n+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{(\mathbf{n+1})_{11}} & \mathbf{T}_{(\mathbf{n+1})_{12}} \\ \mathbf{T}_{(\mathbf{n+1})_{21}} & \mathbf{T}_{(\mathbf{n+1})_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = \mathbf{T_{n+1}} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

où $\mathbf{T_{n+1}}$ est la matrice de transmission associée à la transmission à travers la n^{ieme} cellule. Connaissant les ondes aller et retour dans la n^{ieme} cellule, il est possible, grâce à cette relation de

déterminer le champ de l'onde en n'importe quel endroit du réseau en appliquant cette relation ou son inverse autant de fois qu'il est nécessaire.

La propagation à travers un réseau quelconque de m cellules est donc décrit par la relation :

$$\begin{bmatrix} A_{n+m} \\ B_{n+m} \end{bmatrix} = \prod_{i=n}^{n+m-1} \mathbf{T}_{i+1} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix}. \tag{1.11}$$

où $(A_n\ B_n)^t$ caractérisent les conditions initiales (les conditions initiales ou aux limites représentent la cellule du réseau dans laquelle l'onde est supposée connue) et $(A_{n+m}\ B_{n+m})^t$ la valeur du champ après la propagation à travers m cellules.

1.4.2 Matrices de transfert

Un formalisme s'appuyant sur des matrices de transfert peut aussi être utilisé pour résoudre ce problème. En posant $\Phi_{\mathrm{n}} = (\Psi_{n+1}\ \Psi_n)^t$ où $\Psi_n = \Psi(x_n)$, la propagation à travers un réseau de m cellules est, cette fois-ci, donnée par :

$$\Phi_{\mathrm{n+m}} = \prod_{i=n}^{n+m} \mathbf{M_i} \Phi_{\mathrm{n}}$$

où

$$\mathbf{M_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{(\mathbf{i})_{11}} + \mathbf{T}_{(\mathbf{i})_{22}} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

est la matrice de transfert associée à la $\mathrm{i}^{\text{ième}}$ cellule. Cette expression est obtenue grâce à un changement de variable (matrice de Poincaré : Bellissard et *al* 1982 [44], Heinrichs 1995 [45]) défini par

$$\Phi_{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} e^{jkd_{n+1}} & e^{-jkd_{n+1}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix}. \tag{1.12}$$

Ainsi, la propagation est maintenant décrite par une équation aux différences finies reliant trois sites consécutifs du réseau :

$$\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} - 2a_n\Psi_n = 0, \tag{1.13}$$

où $a_n = 1/2(\mathbf{T}_{(\mathbf{n})_{11}} + \mathbf{T}_{(\mathbf{n})_{22}})$. Chaque cellule est définie par une valeur de a_n qui, si elle peut s'écrire sous une forme sinusoïdale, correspond à une transmission par cette même cellule.

1.4.3 Conclusion

Ces deux méthodes, fondées sur une description matricielle, sont généralement utilisées pour simuler la propagation à travers un réseau unidimensionnel régulier (Bentalosa et *al* 1982 [10], Griffitths et Taussig 1992 [8], Sprung and *al* 1993 [7]) ou désordonné (Lin et Cai 1995 [46], Balumni et Willemsen 1984 [47], Zotulski 1992 [48], Russ et *al* 1998 [49], Levine et Willemsen 1983 [50], Lui et Fukuma 1986 [51]). Elles sont d'ailleurs complémentaires l'une de l'autre : lorsque la grandeur connue est l'amplitude de l'onde dans le réseau, les matrices de transfert sont les plus à même de décrire la propagation ; au contraire lorsque les ondes aller et retour sont connues, les matrices de transmission sont beaucoup plus appréciables.

1.5 Cas des réseaux périodiques

1.5.1 La théorie de Bloch

1.5.1.1 Introduction

Les ondes de Bloch, qui sont associées à la propagation dans les milieux périodiques, ont été largement étudiées et sont impliquées dans toutes sortes de phénomènes physiques tels que les

ondes acoustiques (Bradley 1994 [5], Cremer et *al* 1973 [9]), les ondes radio, les micro-ondes, les ondes électromagnétiques (notamment optiques) ainsi que les ondes en mécanique du solide (Bentalosa et *al* 1982 [10]) et en mécanique quantique (Griffitths et Taussig 1992 [8]).

La première raison de cet intérêt interdisciplinaire est la dispersion qui caractérise ces ondes de Bloch : le domaine spectral est divisé en une alternance de bandes de fréquences appelées "bandes passantes" et "bandes interdites". Les ondes dont la fréquence appartient aux bandes dites "passantes" se propagent librement alors que dans les bandes "interdites", ces ondes sont atténuées exponentiellement, comme des ondes évanescentes. Cette structure de bandes des ondes de Bloch (relation de dispersion) est la propriété la plus souvent exploitée dans les différentes applications.

Ces propriétés remarquables sont le fruit de la recherche de Felix Bloch [1]. Il a montré que les solutions de l'équation de Schrödinger qui gouverne la dynamique des électrons à l'intérieur d'un réseau de cristal sont des ondes d'une forme particulière, connues aujourd'hui sous le nom d'**ondes de Bloch**. Ce travail forme la base de la théorie des bandes de la mécanique quantique de la conductivité et semi-conductivité dans les solides.

La théorie de Bloch explique l'existence de bandes passantes par un subtil équilibre entre deux ondes couplées se propageant en sens inverse. Dans ce régime, les effets des interférences multiples sont présents et une théorie fondée sur l'existence d'ondes couplées suffit à expliquer la présence de ces bandes (voir les références citées par Bradley pour connaître les différentes applications).

Grâce à la théorie de Bloch, la propagation à travers un réseau périodique infini est connue et l'accès à leurs propriétés dans le cas harmonique devient possible. Des résultats analytiques permettant de valider les différentes simulations, indispensables dans des cas plus complexes (introduction du désordre ou de non-linéarités), sont trouvés et présentés succintement dans la suite de ce chapitre.

1.5.1.2 La relation de dispersion des ondes de Bloch

La propagation à travers un réseau périodique est décrite par une équation différentielle à coefficient périodique dans l'espace (voir l'équation (1.6)). La théorie de Bloch s'applique au cas d'un réseau ordonné (où un opérateur à coefficient périodique est défini) et le théorème de Floquet, principe de base de cette théorie, peut donc être utilisé. La propriété de périodicité des solutions de l'équation différentielle (1.6) est ainsi mise en évidence :

$$\Psi(x+d) = e^{jqd}\Psi(x) \tag{1.14}$$

où d est la périodicité du système représentée par la taille constante des cellules et q le nombre d'onde de Bloch.

Pour un réseau ordonné (toutes les valeurs des sauts de la dérivée de la fonction d'onde de chaque site sont égales), les matrices de transmission sont identiques pour toutes les cellules et s'écrivent :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} (1+\frac{\sigma}{2jk})e^{jkd} & \frac{\sigma}{2jk}e^{-jkd} \\ -\frac{\sigma}{2jk}e^{jkd} & (1-\frac{\sigma}{2jk})e^{-jkd} \end{bmatrix}.$$

Donc, pour décrire une propagation à travers m cellules, il suffit de multiplier m fois la matrice $\mathbf{T}$. Si on définit s comme les valeurs propres de la matrice $\mathbf{T}$, alors la propagation à travers m cellules en partant des conditions aux limites $(A_n\ B_n)^t$ se met sous la forme :

$$\begin{bmatrix} A_{n+m} \\ B_{n+m} \end{bmatrix} \mathbf{T}^m \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = s^m \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix}.$$

Ainsi, la position des bandes passantes et interdites ne dépend que des valeurs propres s. Si s^m peut se mettre sous la forme $s^m = e^{j\phi}$ où seule la phase ϕ varie, une bande passante est définie.

[1] Elles lui ont permis d'obtenir le prix Nobel en 1928.

s étant un nombre complexe de module 1, l'onde est périodique le long du réseau et se propage sans difficulté. Dans le cas où $|s^m| < 1$, l'onde subit une importante atténuation au cours de sa propagation et une bande interdite est mise en évidence.

L'étude du problème aux valeurs propres est donc primordiale pour la compréhension du phénomène et sa résolution. La relation de dispersion de ces ondes est donnée par la solution du problème aux valeurs propres. Ces valeurs propres s sont solutions de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} \mathbf{T}_{11} - s & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} - s \end{vmatrix} = s^2 - s(\mathbf{T}_{11} + \mathbf{T}_{22}) + |\mathbf{T}| = 0,$$

où

$$|\mathbf{T}| = \det(\mathbf{T}) = \mathbf{T}_{11}\mathbf{T}_{22} - \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{21}.$$

Cette relation générale peut être simplifiée lorsque des cas plus précis sont étudiés tels qu'un système réciproque.

Système réciproque

Un système est dit réciproque quand sa réponse en un point A (extérieur au système) dûe à une source située en B (extérieur au système) est égale à la réponse en B à une source en A. Ceci entraîne, dans notre cas, $|\mathbf{T}| = 1$, ce qui permet de trouver deux valeurs propres s et $1/s$ distinctes. L'équation caractéristique peut alors se mettre sous la forme

$$s + \frac{1}{s} = \mathbf{T}_{11} + \mathbf{T}_{22}$$

ce qui, en supposant que les ondes de Bloch soient formées d'ondes conventionnelles (les valeurs propres sont e^{jqd}), amène à la relation de dispersion des ondes de Bloch suivante :

$$\cos(qd) = \frac{1}{2}(\mathbf{T}_{11} + \mathbf{T}_{22}). \tag{1.15}$$

Comme le système est non dissipatif, $\mathbf{T}_{22} = \mathbf{T}_{11}^*$, la relation de dispersion s'écrit donc simplement

$$\cos(qd) = \Re(\mathbf{T}_{11}) = \kappa(\omega). \tag{1.16}$$

Ainsi les fréquences correspondant à une valeur réelle de q sont associées à des ondes de Bloch propagatives (bande passante) tandis que les régions du spectre où q est imaginaire sont associées à des ondes de Bloch exponentiellement atténuées (bande interdite).

En utilisant la définition de la matrice de transmission, la relation de dispersion pour les ondes de Bloch devient :

$$\cos(qd) = \cos(kd) + \frac{\sigma}{2k}\sin(kd). \tag{1.17}$$

Cette expression est directement exploitée pour connaître la position des bandes pour un système donné. Pour évaluer les valeurs de q, les parties réelles et imaginaires sont séparées et le nombre d'onde de Bloch prend la forme suivante :

$$qd = \begin{cases} n_p\pi \pm j\cosh^{-1}(\kappa) & \kappa > 1, \\ \pm\cos^{-1}(\kappa) & -1 \leq \kappa \leq 1, \\ n_i\pi \pm j\cosh^{-1}(|\kappa|) & \kappa < -1, \end{cases} \tag{1.18}$$

où n_p est un entier pair et n_i un entier impair.

Ainsi, le cas d'un réseau périodique peut être complètement résolu par une méthode analytique.

Remarque

Le cas du système dissipatif n'est pas abordé dans ce chapitre mais n'engendre pas de problème particulier. Ce cas sera traité lors de l'application de cette théorie à la propagation dans un réseau acoustique. Les coefficients de la matrice de transmission prendront en compte les effets visqueux et thermiques mis en jeu lors de la propagation et les positions des bandes seront donc dépendantes des effets de dissipation.

1.5.2 Détermination de la fonction de Green

La fonction de Green d'un tel sytème est définie par :

$$\Psi(x_m) = \Psi(x_n)G_0(m, n, a).$$

où $G_0(m, n, a) = G_0(x_m, x_n, a)$. Cette fonction est déterminée par l'excitation (source) au point x_n et par le résultat de cette excitation en x_m (il faut noter ici que ces indices représentent des emplacements du réseau et sont donc équivalents à des distances avec cette écriture). La valeur de a représente l'expression des valeurs propres et définit la propagation.

On décrit la propagation au moyen de la fonction de Green du système sous la forme d'une équation aux différences finies :

$$G_0(m, n+1, a) + G_0(m+1, n, a) - 2aG_0(m, n, a) = \delta_{m,n} \tag{1.19}$$

où $\delta_{m,n}$ est la fonction de Dirac et $a = \frac{1}{2}(\mathbf{T}_{11} + \mathbf{T}_{22})$. La solution de cette équation se met sous la forme (voir annexe A) :

$$G_0(m, n, a) = \frac{-(a - \sqrt{a^2 - 1})^{|m-n|}}{2\sqrt{a^2 - 1}}. \tag{1.20}$$

La réponse du système est définie par le comportement de $G_0(m, n, a)$ qui est lui même déterminé par la valeur du paramètre a. Dans le cas d'un système réciproque, il est aisé de voir que $a = \cos(qd)$ et donc que lorsque $|\cos(qd)| \leq 1$, la fonction de Green a un comportement périodique (sinusoïdal). Les ondes dont le nombre d'onde q vérifie cette inégalité appartiennent aux bandes passantes puiqu'elles ne subissent aucune atténuation et possèdent la même périodicité que le réseau. Au contraire, lorsque $|\cos(qd)| \geq 1$, la fonction de Green a un comportement exponentiellement amorti avec la distance à l'excitation (qd se met sous la forme d'un cosinus hyperbolique) : ces ondes appartiennent aux bandes interdites puisqu'elles ne se propagent pas.

En outre, la fonction de Green est très utile lorsque peu d'inhomogénéités sont introduites dans le réseau. En utilisant la méthode des perturbations, la fonction de Green du milieu perturbé est définie grâce à la fonction de Green du milieu ordonné et de nombreuses conclusions peuvent être tirées de son analyse.

1.6 Cas des réseaux désordonnés

1.6.1 Introduction

La propagation à travers un milieu est généralement conditionnée par les effets des interférences dans celui-ci. Par exemple, dans le cas d'une structure périodique, la propagation est définie par la dispersion des ondes de Bloch, qui elles même sont caractérisées par une structure de bandes dans le domaine spectral. Dans les milieux possédant quelques hétérogénités (présence de quelques cellules différentes des autres), l'effet limité des inhomogénéités (diffuseurs) autorise toujours la propagation sur une longueur finie mais avec la phase, la vitesse et le coefficient d'absorption différents de ceux du cas régulier (Depollier 1986 [23], Luck 1992 [52]). En revanche, pour des désordres continûment distribués, les effets d'interférences cohérentes n'existent plus et la localisation des ondes apparaît.

Ainsi deux types différents de problèmes peuvent être distingués dans le contexte des ondes classiques ce qui constituera les deux grandes parties de cette étude.

1.6.2 Localisation dans les réseaux unidimensionnels : modèle d'Anderson

Le nom générique "modèle d'Anderson" regroupe diverses variantes de l'équation de Schrödinger dans un potentiel désordonné à une dimension. Anderson (Anderson 1958 [53]) a étudié

la propagation des électrons dans un cristal contenant des impuretés et a montré que les interférences entre les électrons jouaient un rôle important dans la transmission. Le phénomène de localisation des ondes est un phénomène ondulatoire, encore assez mal connu, tout à fait général qui affecte aussi la propagation des ondes classiques (son, lumière, ...) dans un milieu inhomogène. Anderson a montré que la fonction d'onde régissant un électron dans un cristal désordonné peut être fortement altérée (par rapport au cas du cristal ordonné) ce qui implique une décroissance exponentielle de la transmission à travers ce cristal.

D'après les travaux d'Anderson, le fait que le milieu soit infini et unidimensionnel garantit la localisation de toutes les ondes quel que soit le désordre présent dans ce milieu. Au contraire, dans cette étude, dans un souci de réalisme, le réseau désordonné considéré est de taille finie ce qui interdit une localisation unilatérale. En effet, le cas étudié est le suivant : on considère un réseau unidimensionnel ordonné infini dont une partie de longueur L présente un désordre (voir figure (1.2)). Le réseau ordonné joue un rôle de filtre et seules les ondes appartenant à une bande passante sont incidentes au réseau désordonné. L'onde incidente est d'amplitude R_e et engendre une partie réfléchie vers la gauche d'amplitude R_s et une partie transmise vers la droite d'amplitude T.

Pour mettre en évidence l'effet de la localisation, on introduit la notion de longueur de localisation définie comme le décrément logarithmique de l'onde à l'intérieur du milieu désordonné. Ainsi la localisation dans un milieu de taille finie n'est visible que si cette longueur (de localisation) est bien plus faible que la taille du milieu désordonné.

Pour mesurer l'importance de la localisation, la détermination du coefficient de transmission est parfaitement adaptée et la méthode matricielle générale développée dans le chapitre précédent permet de calculer ce coefficient. La longueur de localisation et le coefficient de transmission sont reliés par une relation simple (loi exponentielle) qui peut être caractérisée par cette méthode.

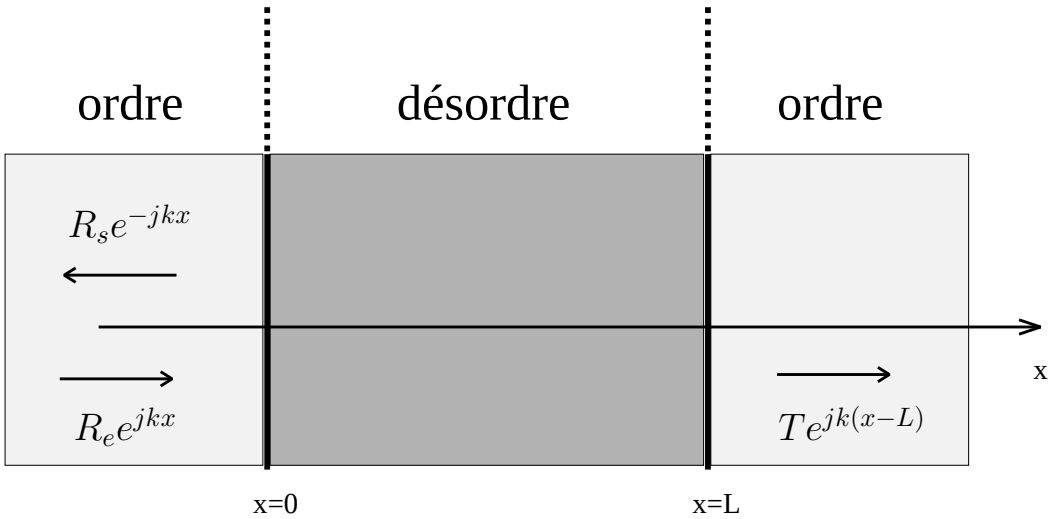

FIG. 1.2 – Représentation schématique de la transmission d'une onde à travers un milieu désordonné de taille finie.

Remarque

Généralement, lorsque l'étude n'exige qu'une vue "globale" de la localisation en fonction de la fréquence (ou l'énergie) de l'onde, on utilise le coefficient de transmission. En revanche lorsqu'une analyse fine de la transmission est nécessaire, l'observation de la longueur de localisation est bien plus enrichissante et permet d'étudier les effets de l'introduction du désordre en fonction de l'épaisseur du milieu.

Tous ces points sont abordés au moyen de calculs analytiques ou grâce à des simulations. Dans ce qui suit, on se consacre à la mise en place de ces techniques qui seront utilisées dans

les deuxième et troisième parties de ce travail dédiées chacune à une application différente de ce type de problème.

1.6.3 Notion de désordre

La notion de désordre n'est pas claire et évidente à appréhender et plusieurs définitions distinctes sont envisageables. Généralement, on parle de désordre quand il est possible de comparer le milieu comportant du désordre avec le même milieu dans un cas ordonné. Dans l'étude qui va suivre, cette règle est respectée et les effets de l'introduction du désordre sont quantifiés grâce à la comparaison des résultats avec et sans désordre. Le désordre est appréhendé comme une perturbation plus ou moins importante du cas ordonné. Cette perturbation peut être localisée en quelques endroits du réseau et l'on parlera alors d'une faible concentration d'hétérogénéités. Au contraire, les perturbations peuvent apparaître tout au long du milieu ce qui constituera un désordre continûment distribué dans la suite de ce travail.

Le premier exemple est typiquement décrit par un milieu comportant une ou plusieurs hétérogénéités traitées comme des inhomogénéités ponctuelles et peu nombreuses. Les valeurs et le nombre de celles-ci par rapport au cas ordonné peuvent varier. La méthode des perturbations est utilisée pour déterminer la fonction de Green d'un réseau comportant une hétérogénéité. Par extension, on étudie le cas d'une distribution d'un grand nombre d'hétérogénéités en les supposant de faible importance (écart faible entre leurs valeurs et celles du cas ordonné) et l'atténuation des ondes est établie analytiquement.

Le désordre continûment distribué est représenté, dans ce travail, par un réseau dont une ou plusieurs des caractéristiques (densité, température, ...) varient dans l'espace. Comme exposé dans la description du système, le modèle de Kronig-Penney[2] est utilisé ; il suppose le potentiel $V(x)$ à très courte portée, de sorte qu'il peut être représenté par une somme de distribution de Dirac, d'amplitude σ_n centrée sur les positions x_n des discontinuités. Deux sortes de désordre sont différenciés dans le cas d'une propagation à travers un milieu chargé par un potentiel discret :

- le désordre sur les amplitudes σ_n des potentiels. Ce type de désordre est défini comme paramétrique et laisse la taille des cellules intacte et égale ;
- le désordre sur les positions x_n des potentiels. Celui-ci est dit géométrique et ne conserve pas la taille des cellules.

Dans ce modèle, chaque valeur de l'hétérogénéité ou de la taille des cellules est choisie de façon pseudo-aléatoire au moyen d'une distribution normale dont la valeur moyenne et l'écart type $1/\epsilon$ sont connus (voir la figure (1.3)).

La localisation d'Anderson dans un réseau unidimensionnel de longueur finie est mise en évidence, notamment, en calculant la longueur de localisation et le coefficient de transmission. La propagation à travers un réseau où le désordre est uniformément réparti est décrite au moyen du formalisme matriciel développé dans le premier chapitre.

1.6.4 Faible concentration d'hétérogénéités

Le désordre faible peut être illustré par le cas d'un réseau à une hétérogénéité. Cet exemple est traité dans ce paragraphe en déterminant la fonction de Green d'un réseau perturbé par la présence d'une unique inhomogénéité. Puis, par extension, le cas d'un grand nombre d'hétérogénéités et d'un désordre faible est envisagé en se référant au travail de Depollier (Depollier 1989 [54]) qui s'appuie sur des méthodes d'approximation (méthode de l'opérateur moyen et méthode du potentiel cohérent, Thouless 1974 [55]).

[2] Le modèle de Kronig-Penney a été développé en physique du solide et il est décrit mathématiquement par un peigne de Dirac.

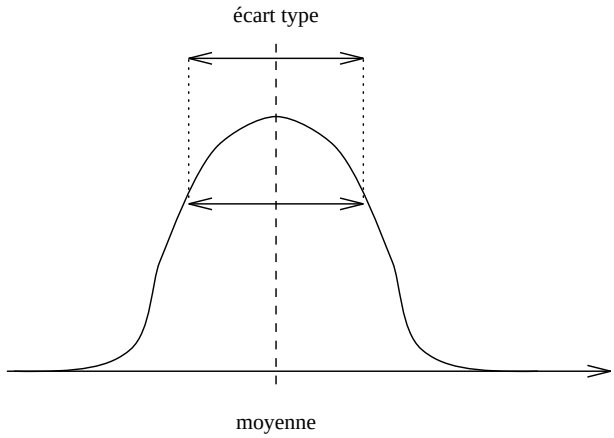

FIG. 1.3 – Type de distribution utilisée pour choisir les valeurs des potentiels ou des tailles des cellules pour construire un réseau contenant un désordre uniformément distribué.

1.6.4.1 Cas d'une hétérogénéité

La propagation dans un réseau régulier dont l'équation est donnée par (1.13) est considérée. Une hétérogénéité est placée sur le noeud x_m caractérisée par a' qui définit le potentiel (et la force) pour ce site. Les équations décrivant la propagation sont :

$$\begin{array}{lll} \Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} - 2a\Psi_n = 0, & \text{pour} & n \neq m, \\ \Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} - 2a'\Psi_n = 0, & \text{pour} & n = m, \end{array} \tag{1.21}$$

dans lesquelles la fonction d'onde au point x_n, qui est la superposition d'une onde incidente $e^{jn\phi}$ et de l'onde diffusée par l'hétérogénéité $s(x_n)$, est notée :

$$\Psi_n = e^{jn\phi} + s(x_n). \tag{1.22}$$

L'onde incidente se propage dans le réseau périodique non perturbé et vérifie l'équation (1.13). Les relations (1.21) se mettent sous la forme :

$$\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} - 2a\Psi_n = 2(a' - a)\Psi_n\delta_{n,m}. \tag{1.23}$$

En reportant l'expression de la fonction d'onde en x_n dans cette dernière équation et compte tenu de la relation (1.21), on trouve :

$$s(x_{n+1}) + s(x_{n-1}) - 2as(x_n) = 2(a' - a)(s(x_n) + e^{jn\phi})\delta_{n,m}, \tag{1.24}$$

dont la solution vérifie l'équation

$$s(x_n) = 2(a' - a)[s(x_m) + e^{jm\phi}]G_0(m, n, a) \tag{1.25}$$

où $G_0(m, n, a)$ est la fonction de Green du réseau non perturbé. En posant

$$\Lambda = 2(a' - a)G_0(m, m, a),$$

$s(x_m)$ se met sous la forme

$$s(x_m) = \frac{\Lambda e^{jm\phi}}{1 - \Lambda}$$

ce qui permet de trouver la solution de l'équation (1.25) :

$$s(x_n) = \frac{\Lambda G_0(m, n, a)}{G_0(m, m, a)} \frac{1}{1 - \Lambda} e^{jm\phi}. \tag{1.26}$$

La relation (1.22), en utilisant cette dernière équation, permet de déterminer la fonction de Green du réseau perturbé entre les points x_n et x_l :

$$G(l,n,a) = G_0(l,n,a) + G_0(l,m,a)TG_0(m,n,a) \tag{1.27}$$

où T qui représente l'opérateur diffusion de l'impureté s'écrit :

$$T = \frac{\Lambda}{(1-\Lambda)G_0(m,m,a)}, \tag{1.28}$$

et se simplifie en

$$T = \frac{2(a-a')}{1-2(a-a')G_0(m,m,a)}. \tag{1.29}$$

Ainsi, la fonction de Green d'un réseau comportant une hétérogénéité est déterminée analytiquement. Elle est constituée d'un terme représentant la propagation libre entre le point source x_n et le point d'arrivée de l'onde x_l ($G_0(l,n,a)$) associé à un terme de diffusion ($G_0(l,m,a)TG_0(m,n,a)$). Ce dernier est composé de la propagation libre entre la source et l'impureté , puis de la diffusion par l'impureté et finalement de la propagation entre celle-ci et le point d'arrivée.

Cette fonction de Green est très utile lors de l'analyse de propagation dans des milieux comportant, par exemple, des défauts. En utilisant des méthodes d'approximation, on peut étendre cette notion au cas d'un grand nombre d'hétérogénéités présentes dans le milieu.

1.6.4.2 Cas d'un grand nombre d'hétérogénéités

Pour un grand nombre fini N d'hétérogénéités, on conçoit que la généralisation du calcul dans le cas d'une hétérogénéité soit envisageable. On obtient une relation analogue à (1.27) :

$$G = G_0 + G_0TG_0$$

dans laquelle G_0 représente la fonction du milieu non perturbé et où T est l'opérateur diffusion du réseau construit à partir des opérateurs de chaque hétérogénéité T_m tel que :

$$T = f(T_m).$$

On s'intéresse à la valeur moyenne $\langle G\rangle$ de la fonction de Green dont le calcul n'est possible qu'à l'aide de méthodes d'approximation telles que, par exemple, la méthode de l'opérateur moyen. Pour cela, on définit $\langle G\rangle$ par

$$\langle G\rangle = G_0 + G_0\langle T\rangle G_0.$$

Cette approximation consiste à poser

$$\langle T\rangle = f(\langle T_m\rangle)$$

ce qui permet, par la suite, de déterminer la fonction de Green du milieu effectif $G_e(l,m,a)$ telle que

$$G_e(l,m,a) = G_0(l,m,k^2-\Sigma) \tag{1.30}$$

où Σ est une grandeur complexe reliée à la valeur moyenne de l'opérateur diffusion $\langle T\rangle$ (Depollier 1989 [54]). L'expression de cette grandeur se réécrit sous la forme

$$\Sigma = \Delta + j\Gamma, \tag{1.31}$$

où le réel Δ renormalise la célérité de l'onde dans le milieu effectif et où Γ mesure l'atténuation. Le vecteur d'onde devient complexe et s'écrit :

$$\phi' = \phi + j\gamma. \tag{1.32}$$

La partie réelle ϕ est donnée par $a = \cos(\phi)$ (réseau ordonné) et γ représente l'atténuation de l'onde dans le réseau.

1.6.4.3 Faible désordre

Les hétérogénéités, définies par a'_i, modifient la propagation dans le réseau. En utilisant un développement en série de perturbations de la fonction de Green du cas perturbé, en prenant sa valeur moyenne et en tenant compte de la propriété $\langle G_0(l,m,a)\rangle = G_0(l,m,a)$, l'atténuation γ de l'onde se met sous la forme (Depollier 1989 [54]) :

$$\gamma = \lim_{|l-m|\to\infty} \{\mathcal{R}e[\frac{1}{|l-m|}\log(1+2G_0(l,m,a)\langle a'_i - a\rangle + 4\langle G_0^2(l,m,a)\rangle\langle (a'_i-a)^2\rangle)]\} \tag{1.33}$$

pour les bandes passantes.

Lorsque le désordre est faible, on pose $(a'_i - a) \ll a$, ce qui permet un développement de la fonction logarithme autour de l'unité. En outre, lorsqu'il est centré, la valeur de $\langle a'_j - a\rangle = 0$ et, l'atténuation est donnée par :

$$\gamma \simeq \frac{\langle (a'_i - a)(a'_j - a)\rangle}{\sin^2(\phi)}. \tag{1.34}$$

Ainsi, l'atténuation au premier ordre s'exprime toujours par la relation (1.34) dans les bandes passantes. De même, il est possible de retrouver ce résultat en définissant les amplitudes des ondes transmises et réfléchies pour chaque hétérogénéité et en calculant l'atténuation moyenne des ondes au moyen du calcul du coefficient de transmission total T_N. Celui-ci est donné par

$$T_N = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{e^{j\phi}}{1-\Lambda_i}$$

où $\Lambda_i = 2(a'_i - a)G_0(i,i,a)$ d'après l'équation (1.26). L'atténuation moyenne γ peut se mettre sous la forme

$$\gamma = \frac{1}{N}\mathcal{R}e[\log(T_N)]$$

dont le premier terme du développement donne la relation (1.34). Cette approche permet de déterminer analytiquement l'atténuation de l'onde causée par la présence d'hétérogénéités dans le réseau et montre l'importance des inhomogénéités sur la transmission du milieu : les valeurs a'_i définissant les hétérogénéités occupent une place primordiale dans l'estimation de l'atténuation de l'onde.

1.6.5 Désordre continûment distribué

1.6.5.1 Calcul du coefficient de transmission

La connaissance du coefficient de transmission d'un système permet de caractériser sa transparence pour une longueur finie. Ce coefficient est défini comme le rapport du champ à la sortie de l'échantillon désordonné et du champ incident à cette partie. Il ne dépend pas de l'amplitude d'entrée puisque le cas linéaire est étudié mais il est déterminé par la force du désordre et par la fréquence de l'onde incidente.

La méthode utilisée pour ce calcul est celle décrite par le formalisme matriciel dans la section (1.4). La propagation à travers un réseau de N cellules est caractérisée par le produit de N matrices de transmission. Les valeurs de l'onde aller et retour à la sortie de réseau désordonné sont données par la relation :

$$\begin{bmatrix} A_N \\ B_N \end{bmatrix} = \mathbf{T}_N\mathbf{T}_{N-1}...\mathbf{T}_1 \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{N} \mathbf{T}_i \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} \tag{1.35}$$

où $(A_0\ B_0)^t$ caractérisent l'onde aller et retour au début de la partie désordonnée (conditions aux limites). Le milieu de chaque coté du réseau désordonné est supposé infini (réseau périodique) et anéchoïque ce qui permet d'écrire les conditions aux limites à la sortie de l'échantillon

désordonné :

$$\begin{cases} A_N &= T, \\ B_N &= 0. \end{cases}$$

A l'entrée du réseau désordonné, les valeurs des ondes incidente et réfléchie sont connues :

$$\begin{cases} A_0 &= R_e, \\ B_0 &= R_s. \end{cases}$$

En utilisant l'inverse de la relation (1.35), le coefficient de transmission d'un réseau désordonné composé de N cellules se calcule en déterminant la valeur de l'onde aller en $x = 0$ (début du réseau désordonné) correspondant à une valeur de l'onde transmise fixée. Il se met alors sous la forme :

$$\mathcal{T} = \frac{T}{R_e} = \frac{A_N}{A_0}.$$

Le coefficient de transmission décrit la dépendance fréquentielle de la réponse du système, son interprétation physique est immédiate, ce qui en fait son intérêt ; une comparaison avec des résultats expérimentaux est aisée.

Suivant le contexte expérimental (par exemple), l'utilisation du formalisme s'appuyant sur des matrices de transfert peut s'avérer plus judicieuse. Il se peut que la décomposition du champ en une onde aller et retour soit impossible ce qui interdit le choix de la méthode utilisant des matrices de transmission. Grâce aux matrices de transfert, la propagation à travers l'échantillon désordonné du réseau peut se mettre sous la forme d'un système incluant l'équation de propagation et les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \Psi_n = R_e e^{jkx} + R_s e^{-jkx} & \text{pour} \quad x \leq 0 \\ \Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} + E_n \Psi_n = 0 & \text{pour} \quad 0 \leq x \leq L \\ \Psi_n = T e^{jkx} & \text{pour} \quad x \geq L \end{cases} \tag{1.36}$$

Comme précédemment, le coefficient de transmission est défini en supposant connues les conditions aux limites à la sortie du réseau désordonné (le réseau ordonné est anéchoïque et infini). Ces conditions s'écrivent :

$$\begin{cases} \Psi_{N+1} &= T e^{jkd} \\ \Psi_N &= T \end{cases} \tag{1.37}$$

et représentent le champ en $x = L$ et $x = L+d$. Deux conditions sont nécessaires pour déterminer les valeurs de l'onde à l'entrée de la partie désordonnée en $x = d$ (amplitude Ψ_1) et en $x = 0$ (amplitude Ψ_0). Après quelques manipulations, l'amplitude du coefficient de transmission se met, alors, sous la forme :

$$\mathcal{T} = \frac{T}{R_e} = \sqrt{1 - \left| \frac{e^{-jk} - r_0}{r_0 - e^{jk}} \right|^2} \tag{1.38}$$

où $r_i = \frac{\Psi_{i+1}}{\Psi_i}$ se nomme la variable de Ricatti.

Toutefois, il demeure indispensable d'accompagner l'évaluation du coefficient de transmission, d'une mesure (ou calcul) de la longueur de localisation pour la comparer à la taille du sytème. C'est le seul moyen de caractériser la localisation de Anderson dans le cas d'un milieu désordonné de taille finie [3].

1.6.5.2 Détermination de la longueur de localisation

L'étude du modèle unidimensionnel de propagation à travers un réseau désordonné composé de N cellules est donc l'équivalent de l'analyse d'un produit de N matrices de transfert (ou de

[3] En effet, il est tout à fait envisageable que le coefficient de transmission ne soit pas nul alors que les modes correspondants sont localisés par le désordre du milieu de propagation.

transmission). Généralement le nombre de cellules envisagé est très grand pour pouvoir bénéficier de simplifications.

Dans le cas de milieu aléatoire et en s'appuyant sur des travaux mathématiques importants (Furstenberg et Kesten 1960 [56], Oseledec 1968 [57]), le comportement asymptotique du produit d'un grand nombre de matrices $\mathbf{T_n}$, 2×2, aléatoires, indépendantes, équidistribuées, est caractérisé par l'existence de la limite suivante :

$$\gamma = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \ln(\mathrm{tr}[\prod_{i=1}^{N} \mathbf{T_i}]). \tag{1.39}$$

Cette limite γ est appelée l'**exposant de Lyapunov** du produit infini de matrices. Cette terminologie a été choisie par analogie avec la théorie des systèmes dynamiques et il apparaît que, dans le cas du modèle d'Anderson, cet exposant est toujours positif (Luck 1992 [52]). Intuitivement, le contenu physique de cette grandeur peut être compris comme suit : une fonction d'onde croît typiquement, en valeur absolue, selon la loi

$$|\Psi_n| = e^{\gamma x}$$

de la même façon que dans un système dynamique chaotique, l'écart entre deux trajectoires initialement voisines croît comme $|\delta x| = e^{\gamma t}$ (exponentiellement avec le temps).

Ce résultat peut être exploité pour expliquer le phénomène de localisation (de Anderson) dans le cas d'un potentiel aléatoire discret. En effet, les solutions de l'équation de propagation (1.6) ne peuvent pas croître exponentiellement ni pour $x \to +\infty$, ni pour $x \to -\infty$. Comme les deux seuls comportements possibles pour les fonctions d'onde du système sont de la forme $\exp(\pm\gamma x)$, les solutions doivent décroître exponentiellement en fonction de la distance selon la loi $\exp(-\gamma x)$ pour $x \to +\infty$.

Par analogie avec cette approche de la propagation à travers un milieu aléatoire, nous avons appliquer la définition de l'exposant de Lyapunov au cas de la propagation dans un réseau désordonné. Avec un désordre continûment distribué, l'inverse de cet exposant (calculé avec un grand nombre de cellules) est interprété comme la **longueur de localisation** ξ (Luck 1992 [52]). Ainsi,

$$\xi = \frac{1}{\gamma}$$

sert de mesure de la localisation et est interprétée comme le décrément logarithmique de l'onde à l'intérieur du réseau désordonné ou comme la longueur sur laquelle l'amplitude de l'onde décroît d'un facteur e.

Cette loi de décroissance exponentielle peut être élargie au coefficient de transmission ce qui permet d'exprimer ce coefficient comme une fonction de la longueur de localisation (Knapp et *al* 1989 [72]) :

$$|\mathcal{T}| = \exp(-\gamma x_N) = \exp(-\frac{L}{\xi}) \tag{1.40}$$

où L représente la longueur du réseau désordonné.

Il faut donc comparer la longueur de localisation avec la taille du système pour déterminer les effets du désordre sur la transmission à travers le milieu. Néanmoins, le comportement du coefficient de transmission en fonction de la taille du milieu ou le calcul de l'exposant de Lyapunov, lorsque la taille du réseau est grande, permettent directement de connaître la longueur de localisation du système et d'observer l'influence du désordre.

Remarques

- Il existe un lien, facile à établir, entre l'exposant de Lyapunov (ou la longueur de localisation) et les variables de Riccati. La fonction d'onde sur un site quelconque n peut s'écrire

$$\Psi_n = \Psi_0 \prod_{i=0}^{n-1} r_i. \tag{1.41}$$

La définition de l'exposant de Lyapunov (1.39) conduit à un comportement asymptotique pour n grand

$$\ln|\Psi_n| = \ln|\Psi_0| + \sum_{i=0}^{n-1} \ln|r_i|. \tag{1.42}$$

- Il faut noter que la relation (1.40) ne caractérise que le comportement typique du coefficient de transmission (Luck 1992 [52]). C'est à dire essentiellement sa valeur la plus probable. Généralement, la moyenne d'une telle grandeur est plus grande que sa valeur typique.
- De même que pour le coefficient de transmission, le coefficient de réflexion $\mathcal{R}$ peut être déterminé en utilisant les variables de Riccati. Ainsi, la relation liant ces deux grandeurs se met sous la forme :

$$r_N = \frac{e^{-jk} + \mathcal{R}e^{jk}}{1+\mathcal{R}}. \tag{1.43}$$

Cette relation est très intéressante puisque les variables de Riccati ne dépendent que des énergies des sites pour $n \leq N$. Donc, ces variables se "souviennent" de la condition initiale qui permet le calcul du coefficient de réflexion.

1.7 Conclusion et synthèse

L'étude de la propagation à travers un réseau unidimensionnel linéaire a largement été traitée dans la littérature et ce chapitre a surtout pour vocation de récapituler les différents résultats établis dans ce domaine. Seule la détermination de la fonction de Green d'un réseau périodique et son utilisation pour connaître celle d'un réseau faiblement perturbé permettent de connaître le comportement de la transmission à travers un réseau désordonné de façon analytique.

Ce premier travail permet de développer les méthodes de base, pour des cas simples, qui seront utilisées tout au long de l'étude. On réalise notamment une résolution analytique du cas linéaire homogène dont la compréhension est indispensable pour aborder des problèmes plus généraux.

Les effets du désordre sur la transmission sont mis en évidence par l'introduction de la longueur de localisation et du calcul du coefficient de transmission. En ce qui concerne le cas d'un réseau périodique, la relation de dispersion a été établie et la succession des bandes passantes et interdites mise en évidence. La méthode matricielle développée dans cette partie sera généralisée pour le cas non-linéaire et les mêmes outils permettront de décrire la transmission à travers un réseau comportant des non-linéarités localisées.

Chapitre 2

Propagation dans les réseaux unidimensionnels à non-linéarités localisées

2.1 Introduction

Dans cette partie, la transmission à travers un réseau de taille finie comportant des non-linéarités localisées et/ou du désordre est étudiée. Cette étude constitue une façon simple d'appréhender le problème de transmission dans un cas non-linéaire car la propagation entre deux nœuds consécutifs du réseau est considérée comme linéaire. Seule la réponse de chaque site du réseau possède un comportement non-linéaire (le cas linéaire correspond à l'indépendance de la réponse à l'amplitude de l'onde incidente sur chaque site). En outre, nous avons choisi de ne nous intéresser qu'à la propagation des ondes planes à l'intérieur du réseau. Une telle formulation permet d'obtenir les caractéristiques de la transmission grâce aux mêmes méthodes que celles utilisées dans le cas linéaire par une généralisation du concept de produit matriciel. Enfin, seul le premier harmonique (fondamental) est pris en compte dans les calculs car les amplitudes étudiées (ou les non-linéarités) restent faibles. Cette simplification doit apparaître comme un choix de notre part et non pas comme une approximation. Bien entendu, les solutions trouvées grâce à cette simplification ne peuvent pas prétendre définir dans son intégralité le problème de transmission non-linéaire. En revanche, ces solutions indiquent, dans la plupart des cas [1], le comportement général de la fonction d'onde et les principaux phénomènes mis en jeu lors de la propagation.

Ainsi, les caractères d'instabilité et de multistabilité de cette propagation sont mis en valeur grâce à une approche inspirée des travaux développés lors des études des systèmes dynamiques. L'influence du désordre sur cette propriété et plus généralement sur la transmission est observée et analysée. Par ailleurs, des cas particuliers (cas d'une non-linéarité, approximation basses fréquences) sont étudiés pour permettre de "valider" analytiquement les résultats numériques.

2.2 Bibliographie

De très nombreux articles abordent, de façon théorique, le problème de la propagation dans des réseaux périodiques ou désordonnés comportant des non-linéarités.

En ce qui concerne les réseaux homogènes, la plupart des travaux utilise des méthodes dynamiques (Wan et Soukoulis 1990 [59], Hawrylak et Grabowski 1989 [60], Li et *al* 1996 [61], Delyon et *al* 1986 [62], Grabowski et Hawrylak 1990 [63], Hawrylak et *al* 1989 [64], Hennig et *al* 1994 [65], Narayanan et Sekar 1998 [66], Wan et Soukoulis 1989 [67]) qui permettent de mettre en évidence

[1] par exemple dans le cas de faibles non-linéarités.

l'influence des non-linéarités sur les ondes de Bloch. Ces études traitent aussi de l'apparition de comportements chaotiques liés à l'existence de bifurcations successives. Parallèlement, d'autres travaux consacrés à l'étude de chaînes non-linéaires plongées dans un fort champ électrique, ont permis de développer des théories similaires (Cota et *al* 1992 [68], Cai et *al* 1995 [69]). Enfin, quelques articles traitent de l'existence d'ondes solitaires (solitons) dans des milieux non-linéaires périodiques (voir par exemple Iizuka 1995 [70]).

Lorsque le désordre est présent dans le milieu, en même temps que les non-linéarités, les méthodes utilisées pour étudier le comportement physique du système sont différentes. Quelques travaux résument ces méthodes (Gredeskul et Kivshar 1992 [71], Knapp et *al* 1989 [72]), et notamment une méthode basée sur la description de la propagation au moyen d'une équation aux différences finies (Cota et *al* 1995 [58]) ou bien au moyen de développements adaptés et empruntés aux cas linéaires (Sayar et *al* 1997 [73]). Mais généralement, des solutions qui utilisent une description dynamique sont choisies pour observer la compétition entre les effets du désordre et ceux des non-linéarités (Knapp et *al* 1991 [74], Devillard et Souillard 1986 [75], Zevin 1996 [76]) et mettre en évidence une réelle influence des non-linéarités sur la propagation (Mal'shukov et Mahan 1998 [77], Datta et Jayannavar 1998 [78]). Les ondes solitaires sont elles aussi étudiées lorsque du désordre est présent dans le milieu et les conclusions aboutissent souvent à la possible délocalisation de l'onde grâce aux non-linéarités (Shepelyansky 1993 [79], Kivshar et *al* 1990 [2]).

2.3 Description du système

On étudie, dans ce qui suit, un milieu unidimensionnel infini homogène, chargé aux points x_n compris entre $x = 0$ et $x_N = L$ par un potentiel V_n^{nl}. La seule différence avec le cas linéaire réside dans la présence d'une partie non-linéaire dans le potentiel V_n^{nl}. Celui-ci définit ainsi une force F_n^{nl} appliquée à chaque point x_n qui dépend de l'amplitude de l'onde se propageant dans le milieu. De même que pour le cas linéaire, le désordre est introduit sur l'amplitude du potentiel ou sur la position des points d'application. La figure (2.1) résume cette description et met en évidence les différentes notations utilisées dans la suite de ce chapitre.

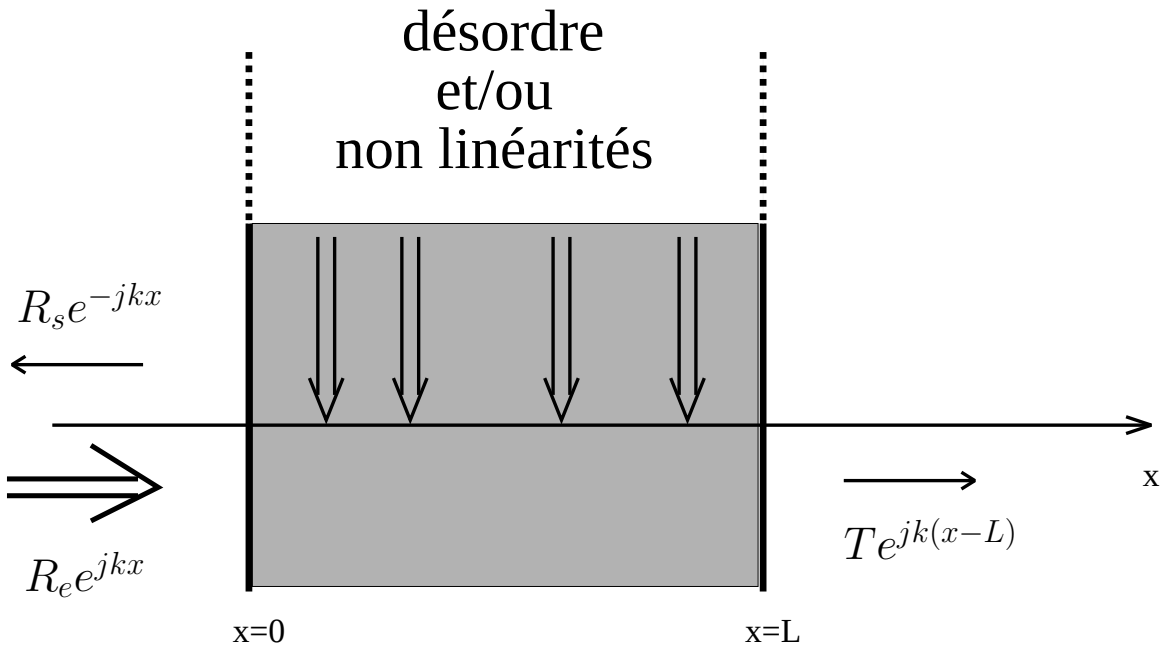

FIG. 2.1 – Représentation schématique du réseau non-linéaire étudié.

2.4 Équation de propagation

Les non-linéarités étant localisées à chaque point x_n du réseau, seules les conditions de raccordement du champ en ces points sont modifiées dans le cas d'un milieu non-linéaire. Une fonction d'onde harmonique $\Psi(x,t) = \Psi(x)e^{j\omega t}$ est considérée et l'éventuelle présence d'harmoniques supérieurs (avec une pulsation 2ω, 3ω, ...) est négligée. Par la suite, on ne s'intéresse donc qu'à la propagation de l'onde émise par la source. La relation de discontinuité peut alors s'écrire :

$$\frac{d\Psi(x)}{dx}|_{x_n^+} - \frac{d\Psi(x)}{dx}|_{x_n^-} = \sigma^{nl}(x_n, \Psi(x_n))\Psi(x_n), \tag{2.1}$$

où $\sigma^{nl}(x_n, \Psi(x_n))$ représente le saut de la dérivée de la fonction d'onde au point x_n et dépend de l'amplitude de l'onde à ce point.

En suivant les mêmes étapes que dans le cas linéaire, l'équation générale de la propagation à travers un milieu composé de N cellules et chargé par un potentiel non-linéaire à chaque point x_n s'écrit :

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + k^2\Psi(x) = \sum_{n=0}^{N} \delta(x - x_n)\sigma^{nl}(x, \Psi(x))\Psi(x). \tag{2.2}$$

Comme dans le cas linéaire, le second membre de cette équation représente N sources secondaires qui réémettent lors du passage de l'onde sur chaque discontinuité du réseau. En revanche, l'intensité de ces sources dépend maintenant de l'intensité de l'onde incidente. On peut alors poser :

$$\sigma^{nl}(x, \Psi(x)) = \sigma_n + f(\Psi(x)), \tag{2.3}$$

où $f(x)$ qui caractérise le terme non-linéaire du potentiel est indépendant de la position dans le réseau et où σ_n représente le saut de la discontinuité en x_n dans le cas linéaire correspondant.

Finalement, l'équation générale de propagation dans un système à non-linéarités localisées s'écrit :

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + k^2\Psi(x) = \sum_{n=0}^{N} \delta(x - x_n)(\sigma_n + f(\Psi(x)))\Psi(x), \tag{2.4}$$

associée aux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \Psi_n = R_e e^{jkx} + R_s e^{-jkx} & \text{pour} \quad x \leq 0, \\ \Psi_n = T e^{jk(x-x_N)} & \text{pour} \quad x \geq L. \end{cases} \tag{2.5}$$

Cette équation décrit le cas le plus général de propagation dans un milieu à non-linéarités localisées.

Pour en trouver les solutions et compte tenu des simplifications et approximations qui ont été faites, seules des méthodes numériques peuvent être utilisées. Elles sont de surcroît assez simplement mises en œuvre.

Remarque

Dans cette étude, deux sortes de non-linéarités sont abordées :
- $f(x) \sim \alpha\, x$ et,
- $f(x) \sim \alpha\, x^2$.

Le premier cas fait l'objet, dans la troisième partie de ce travail, d'une analyse expérimentale qui permet de valider un certain nombre de résultats numériques. Par conséquent, cette forme de non-linéarité n'est pas traitée dans le cadre de cette partie théorique. A l'inverse, le cas d'une non-linéarité dite "symétrique" ($f(x) \sim \alpha x^2$) est largement analysé dans ce chapitre au travers de l'étude détaillée de deux cas particuliers qui sont la présence d'une unique non-linéarité dans le réseau et la détermination de la transmission avec l'approximation basse fréquence.

2.5 Étude générale

La propagation à travers un réseau s'étendant de $x_0 = 0$ à $x_N = L$, composé de N cellules comportant chacune une non-linéarité est étudiée au moyen d'un formalisme utilisant des opérateurs. De même que dans le cas linéaire, le milieu considéré est unidimensionnel et infini à droite et à gauche du réseau non-linéaire (figure (2.1)). Le potentiel, présent en chaque point x_n, est décomposé en une partie linéaire et une partie non-linéaire (voir la description du problème et l'expression (2.3)).

Les solutions de l'équation de propagation (2.4) sont mises sous la forme d'une somme d'une onde aller et d'une onde retour entre deux sites consécutifs (équation (1.7)). Les conditions de raccordement en $x = x_n$, identiques à celles utilisées dans le cas linéaire, permettent ainsi d'obtenir une relation itérative reliant les ondes aller et retour à l'intérieur de deux cellules voisines décrivant la propagation à travers le milieu non-linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A_{n+1} & = & (1+\frac{\sigma_{n+1}}{2jk})A_n e^{jkd_{n+1}} + \frac{\sigma_{n+1}}{2jk}B_n e^{-jkd_{n+1}} + \frac{f(\Psi(x_{n+1}))}{2jk}(A_n e^{jkd_{n+1}} + B_n e^{-jkd_{n+1}}), \\ B_{n+1} & = & -\frac{\sigma_{n+1}}{2jk}A_n e^{jkd_{n+1}} + (1-\frac{\sigma_{n+1}}{2jk})B_n e^{-jkd_{n+1}} - \frac{f(\Psi(x_{n+1}))}{2jk}(A_n e^{jkd_{n+1}} + B_n e^{-jkd_{n+1}}). \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Ainsi, grâce à l'opérateur non-linéaire $\{\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{n+1}}\}$, défini par les relations (2.6), l'expression non-linéaire reliant <u>formellement</u> les vecteurs $(A_{n+1}\, B_{n+1})^t$ et $(A_n\, B_n)^t$

$$\begin{bmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{bmatrix} = \{\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{n+1}}\} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

décrit la transmission à travers chaque cellule du réseau. A partir des conditions aux limites $(A_0\ B_0)^t$, l'équation

$$\begin{bmatrix} A_N \\ B_N \end{bmatrix} = \prod_{n=1}^{N} \{\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{n}}\} \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

traduit la propagation entre x_0 et x_N.

Ce formalisme, qui définit un opérateur de transmission $\{\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{n}}\}$, peut être comparé au formalisme des matrices de transmission utilisé dans le cas linéaire.

En étudiant la transmission de l'onde au travers de trois sites consécutifs, la propagation dans le cas non-linéaire peut aussi s'écrire sous la forme d'une équation aux différences finies

$$\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} - 2a_n\Psi_n - \frac{f(\Psi_n)}{k}\sin(kd)\Psi_n = 0, \tag{2.9}$$

accompagnée des conditions aux limites déjà définies dans le cas linéaire. Dans cette relation, la présence de non-linéarités ajoute un terme dépendant de l'amplitude de la fonction d'onde par rapport au cas linéaire. Ce terme peut aussi être pris en compte dans l'expression de $a_n^{nl}(\Psi_n)$ de chaque site en posant :

$$a_n^{nl}(\Psi_n) = a_n + \frac{f(\Psi_n)}{2k}\sin(kd). \tag{2.10}$$

L'étude du cas linéaire a montré que la valeur de a_n pour chaque site joue un rôle très important dans la transmission de l'onde à travers le réseau. Dans le cas régulier, cette valeur doit être comprise entre -1 et 1 pour que l'onde puisse se propager. Ainsi la valeur du terme non-linéaire ($\frac{f(\Psi_n)}{2k}\sin(kd)$) apparaît primordiale et peut permettre un changement de régime de transmission en entraînant la valeur de $a_n^{nl}(\Psi_n)$ d'un côté ou de l'autre de la "frontière" entre le régime propagatif et évanescent. Ainsi, un mode évanescent dans le cadre linéaire peut devenir propagatif (et inversement) grâce à la présence de non-linéarités dans le réseau. On peut facilement imaginer qu'un réseau désordonné puisse subir les mêmes influences à moindre échelle.

Les simulations de la propagation à travers un milieu comportant des non-linéarités localisées et du désordre sont maintenant réalisables en utilisant ce formalisme. Il est important de noter,

qu'à ce stade de l'étude, n'importe quel type de non-linéarités peut être traité au moyen de cette méthode. Dans le présent chapitre, le cas d'une non-linéarité symétrique, qui se prête bien à l'utilisation de méthodes analytiques telles que la méthode des perturbations ou l'approximation des basses fréquences, est traité. La symétrie du potentiel, lorsque cette sorte de non-linéarité est choisie, permet aussi de définir un invariant du mouvement qui facilite l'approche dynamique du phénomène. Ceci constitue une troisième méthode pour décrire la propagation. Elle met en évidence des comportements complexes tels que la multistabilité et elle illustre les effets couplés du désordre et des non-linéarités.

2.6 Utilisation de la méthode des perturbations

La présence de non-linéarités dans le réseau modifie la propagation à travers celui-ci et la méthode des perturbations peut être utilisée pour calculer la transmission d'un réseau non-linéaire dans le cas de faibles amplitudes. Néanmoins, le cas de non-linéarités isolées peut aussi se traiter au moyen du formalisme des opérateurs non-linéaires.

La méthode des perturbations aide à déterminer la fonction de Green du système non-linéaire à partir de la fonction de Green du système ordonné linéaire. Cette fonction permet de prévoir les phénomènes principaux survenant lors de la propagation. Par exemple, la détermination du coefficient de transmission de l'échantillon du réseau comportant une non-linéarité ou de la longueur de localisation, à partir de cette même non-linéarité, est possible. Le cas de plusieurs non-linéarités est abordé au moyen d'une analogie avec le cas d'une non-linéarité.

2.6.1 Cas d'une non-linéarité

Nous supposons que la non-linéarité est placée en x_0 dans un réseau infini. Cette non-linéarité est définie par $H(x_0, |\Psi(x_0)|) = H_0 = \lambda_0 |\Psi(x_0)|^2$ et l'amplitude de l'onde est suffisamment faible pour que la présence de cette non-linéarité soit considérée comme une perturbation du cas linéaire (cas non perturbé).

2.6.1.1 Détermination de la fonction de Green perturbée

La propagation à travers un réseau comportant une non-linéarité en $x = x_0$ peut s'écrire :

$$(\frac{d^2}{dx^2} + k_l^2)\Psi(x) = H(x, |\Psi(x)|)\delta(x - x_0)\Psi(x), \tag{2.11}$$

où k_l représente le vecteur d'onde du réseau linéaire ordonné (onde de Bloch). Dans cette expression, la non-linéarité s'interprète comme une source secondaire. La propagation dans un réseau linéaire ordonné est décrite par l'équation :

$$(\Delta + k_l^2)\Psi(x) = 0. \tag{2.12}$$

Donc, en posant $k_{nl}^2 = k_l^2 - H_0$ et en considérant les opérateurs $\mathbf{L_l}$ et $\mathbf{L_{nl}}$ caractérisés par les relations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta + k_l^2 & = & \mathbf{L_l} \\ \Delta + k_{nl}^2 & = & \mathbf{L_{nl}} \end{array} \right. \tag{2.13}$$

on définit les fonctions de Green $G_0(m, n, a)$ et $G(m, n, a)$ par les expressions suivantes :

$$\begin{array}{rcl} G_0 \star \mathbf{L_l} & = & \delta \\ G \star \mathbf{L_{nl}} & = & \delta \end{array} \tag{2.14}$$

qui s'écrivent dans le domaine de Fourier

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{G_0}\mathbf{L_l} & = & \mathbb{1} \\ \widetilde{G}\mathbf{L_{nl}} & = & \mathbb{1} \end{array} \tag{2.15}$$

où $\mathbb{1}$ est l'opérateur identité et G la fonction de Green du milieu perturbé par une non-linéarité. $\mathbf{L_{nl}}$ se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{L_{nl}} &= \tfrac{d^2}{dx^2} + k_{nl}^2 = \tfrac{d^2}{dx^2} + k_l^2 - H_0 \\ &= \mathbf{L_l} - H_0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

et, compte tenu de la relation (2.14), l'expression de G devient :

$$G = [\mathbf{L} - H_0]^{-1}$$

qui, après quelques manipulations algébriques, s'écrit :

$$G = [1 - G_0 H_0]^{-1} G_0.$$

En développant en série de perturbations l'opérateur au dénominateur, on obtient :

$$\begin{aligned} G &= G_0 + G_0 H_0 G_0 + G_0 H_0 G_0 H_0 G_0 + \dots \\ &= G_0 + G_0 \mathbf{T_0} G_0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

où l'opérateur diffusion $\mathbf{T_0}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{T_0} &= H_0 + H_0 G_0 H_0 + \dots \\ &= H_0[1 - G_0 H_0 + \dots]. \end{aligned}$$

Si l'on utilise cette relation dans l'équation (2.17), l'expression de la fonction de Green du milieu perturbé par une non-linéarité en $x_0 = 0$ devient :

$$G(m,n,a) = G_0(m,n,a) + \frac{G_0(m,0,a) H_0 G_0(0,n,a)}{1 - H_0 G_0(0,0,a)} \tag{2.18}$$

où G_0 représente la fonction de Green du milieu non perturbé.

L'interprétation d'une telle expression est finalement assez simple : le premier terme du membre de droite représente la propagation libre à travers un réseau non perturbé entre les points x_m et x_n et le deuxième terme représente une propagation libre entre x_m et la non-linéarité, la diffusion par la non-linéarité H_0 et la propagation libre entre la non-linéarité et le point x_n. Ce terme de diffusion est une somme infinie (voir la relation (2.17)) qui traduit des réflexions ou des diffusions multiples dans le milieu.

Il devient possible, au moyen de l'expression de cette fonction de Green, de caractériser l'effet de la non-linéarité sur la propagation.

2.6.1.2 Influence de la non-linéarité sur la propagation

On évalue séparément le cas des bandes passantes et interdites. La fonction de Green est déterminée pour chacun d'eux et son analyse permet de définir le régime de la propagation.

Le cas des bandes interdites

Le pôle de la fonction de Green du milieu perturbé, donné par $G_0(m,n,a) = 1/(\lambda_0 |\Psi(x_0)|^2)$ appartient à une bande interdite puisque $\lambda_0 |\Psi(x_0)|^2$ est réel (voir la première partie et le cas du réseau ordonné). La valeur a_p de ce pôle est

$$a_p = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\lambda_0^2 |\Psi(x_0)|^4},$$

et l'amplitude de l'onde évanescente en ce point s'obtient à partir du résidu de la fonction de Green pour $a = a_p$:

$$\mathrm{Res}\{G(m,n,a_p)\} = \frac{G_0(m,0,a_p) G_0(0,n,a_p)}{-G_0'(0,0,a_p)},$$

où $G_0'(0,0,a_p)$ est la dérivée par rapport à a de $G_0(0,0,a)$ pour $a = a_p$, et se met sous la forme :

$$|\Psi(x_n)|^2 = \mathrm{Res}\{G(m,n,a_p)\}. \tag{2.19}$$

Pour $n = 0$ et compte tenu de l'expression de la fonction de Green $G_0(m,n,a)$, on trouve :

$$|\Psi(x_0)|^2 = 2\sqrt{1 - \frac{1}{\lambda_0^2}}.$$

Quant à l'amplitude du champ en $x = x_n$, elle vaut :

$$\begin{aligned} |\Psi(x_n)| &= |\Psi(x_0)|(|\lambda_0| - \sqrt{\lambda_0^2 - 1})^n \\ &= |\Psi(x_0)| \exp(n \ln(|\lambda_0| - \sqrt{\lambda_0^2 - 1})). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Pour $|\lambda_0| \leq 1$, l'amplitude $|\Psi(x_n)|$ peut se mettre sous la forme complexe, ce qui traduit un mode propagatif. Ainsi, un mode appartenant à une bande interdite dans le cas d'un réseau linéaire (qui par conséquent détermine une longueur d'onde) devient propagatif lorsque l'on ajoute dans le réseau une non-linéarité. On peut donc penser que, lorsque plusieurs non-linéarités sont présentes dans le milieu, chacune d'entre elles transforme un mode évanescent en un mode propagatif.

Les théories des fonctions de Green et des perturbations permettent aussi de mettre en évidence la propriété qu'ont les ondes de faible amplitude de se propager dans un milieu désordonné présentant des non-linéarités localisées. Ces deux méthodes réunies donnent aussi accès à la longueur de localisation lorsque celle-ci n'est pas annihilée par la présence d'une ou plusieurs non-linéarités. C'est le cas pour $|\lambda_0| \geq 1$ où le mode évanescent décroît exponentiellement à partir de la non-linéarité, avec la longueur de localisation ξ telle que

$$\frac{\xi}{d} = -\frac{1}{\ln(|\lambda_0| - \sqrt{\lambda_0^2 - 1})}.$$

Le cas des bandes passantes

Les bandes passantes sont définies, dans le cas d'un réseau ordonné, comme des régions du spectre où l'onde se propage sans atténuation. La présence d'une non-linéarité en $x_0 = 0$ modifie la propagation et pour apprécier les changements dûs à la non-linéarité, il faut déterminer le coefficient de transmission en énergie t.

Lorsque la source, située en x_m, émet le signal $S(m)$, les champs Ψ_n en x_n perturbé par la non-linéarité et Φ_n en x_n dans le cas non perturbé se mettent sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} G(m,n,a)S(m) &=& \Psi_n \\ G_0(m,n,a)S(m) &=& \Phi_n. \end{array} \right. \tag{2.21}$$

L'expression de la fonction de Green perturbée est encore

$$G(m,n,a) = G_0(m,n,a) + \frac{G_0(m,0,a)H_0G_0(0,n,a)}{1 - H_0G_0(0,0,a)},$$

ce qui permet d'écrire

$$\Psi_n = \Phi_n + \frac{G_0(m,0,a)\lambda_0|\Psi_0|^2G_0(0,n,a)}{1 - \lambda_0|\Psi_0|^2G_0(0,0,a)}S_m. \tag{2.22}$$

L'expression, en $x_0 = 0$, du champ perturbé par la non-linéarité se met donc sous la forme

$$\Psi_0 = \Phi_0 + \frac{\lambda_0|\Psi_0|G_0(0,0,a)}{1 - \lambda_0|\Psi_0|G_0(0,0,a)}G_0(m,0,a)S_m \tag{2.23}$$

où $G_0(m,0,a)S_m = \Phi_0$ représente l'onde en $x_0 = 0$ dans le cas non perturbé (sans non-linéarité). La valeur du champ en cas de non-linéarité est déterminée en fonction du champ sans non-linéarité :

$$\Psi_0 = \frac{\Phi_0}{1 - \lambda_0 |\Psi_0|^2 G_0(0,0,a)}. \tag{2.24}$$

Ainsi, le coefficient en énergie t, défini comme le rapport de l'énergie de l'onde après la non-linéarité et de l'énergie de l'onde incidente Φ_0 avant la non-linéarité, est donné par

$$t = \frac{|\Psi_0|^2}{|\Phi_0|^2} = |\Psi_0|^2 \tag{2.25}$$

car Φ_n est une onde sinusoïdale de module 1 dont seule la phase varie (elle appartient à une bande passante). Le coefficient t a comme expression :

$$t = \frac{1}{|1 - \lambda_0 |\Psi_0|^2 G_0(0,0,a)|^2} \tag{2.26}$$

et la fonction de Green $G_0(0,0,a)$ est donnée par (voir chapitre 1)

$$G_0(0,0,a) = \frac{-j}{\sqrt{1-a^2}} \text{ avec } a = \cos(qd) \tag{2.27}$$

et où q représente le vecteur d'onde de Bloch du cas ordonné. Le coefficient de transmission t vérifie la relation

$$t = \frac{1}{\left|1 + \frac{j\lambda_0 t}{\sin(qd)}\right|^2} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0^2 t^2}{\sin^2(qd)}}. \tag{2.28}$$

Finalement, cette équation qui permet de déterminer le coefficient de transmission en énergie d'un réseau comportant une non-linéarité en x_0 s'écrit :

$$\lambda_0^2 t^3 + t\sin^2(qd) - \sin^2(qd) = 0. \tag{2.29}$$

C'est cette équation d'ordre 3 qui peut donner lieu à un traitement numérique pour illustrer le comportement du système en présence d'une non-linéarité et montrer l'influence de la présence d'une non-linéarité sur la transparence du réseau.

2.6.2 Discussion et conclusion

L'emploi, dans ces cas particuliers, de la méthode des perturbations peut s'avérer très intéressant pour connaître le comportement général du système et pour définir le régime de propagation. Cette approche permet de montrer qu'une onde évanescente dans le cas linéaire peut se transformer en un mode propagatif en présence d'une non-linéarité dans le réseau. Évidemment il est assez difficile de généraliser ce résultat aux cas de plusieurs non-linéarités.

Néanmoins, la fonction de Green, pour P non -linéarités présentes sur des sites voisins les uns des autres peut être déterminée au moyen de la perturbation correspondant à ces non-linéarités :

$$H_P = \sum_{i=0}^{P-1} \lambda_i |\Psi(x_i)|^2.$$

La fonction de Green du réseau est ensuite donnée par la relation de récurrence suivante :

$$G(m,n,a) = G_{p-1}(m,n,a) + \frac{G_{p-1}(m,p-1,a)\lambda_{p-1}|\Psi(x_{p-1})|^2 G_{p-1}(p-1,n,a)}{1 - \lambda_{p-1}|\Psi(x_{p-1})|^2 G_{p-1}(p-1,p-1,a)}.$$

En s'appuyant sur les résultats trouvés pour une non-linéarité, l'analyse de cette fonction de Green permet de montrer que pour $|\lambda_i| \leq 1$, $\forall i = 1,..,P$, tous les modes (i) sont propagatifs

dans un milieu comportant un nombre fini de non-linéarités. Pour cela, il faut considérer chaque terme $|\lambda_i|$ de la perturbation individuellement et lui appliquer les résultats d'une non-linéarité. Chaque non-linéarité (i) transforme un état évanescent en un mode propagatif et, si ces non-linéarités sont assez nombreuses, il est raisonnable de penser que tous les modes deviendront propagatifs. Au contraire, lorsque $|\lambda_i| \geq 1$, les effets du désordre prennent le dessus sur ceux liés à la présence de non-linéarités et la localisation des modes réapparaît.

Ce raisonnement sous entend qu'une possible interaction entre les sites est négligée ce qui diminue la portée des résultats établis.

2.7 Transparence du milieu aux basses fréquences

L'approximation des grandes longueurs d'onde permet de mettre en évidence le mécanisme par lequel les non-linéarités augmentent la transparence du milieu aux basses fréquences.

La fonction caractérisant la non-linéarité s'écrit :

$$f(x) \sim \alpha\, x^2.$$

où α représente le coefficient de non-linéarité [2]. Le réseau non-linéaire, composé de $(N-1)$ cellules, est caractérisé par N points chargés par des potentiels non-linéaires. Le saut de la discontinuité de la dérivée de la fonction d'onde en x_n s'écrit :

$$\sigma^{nl}(x, |\Psi(x)|) = \sigma_n + \alpha|\Psi(x)|^2, \tag{2.30}$$

et la relation de discontinuité (2.1) à chaque x_n se met donc sous la forme :

$$\frac{d\Psi(x)}{dx}|_{x_n^+} - \frac{d\Psi(x)}{dx}|_{x_n^-} = \sigma_n\Psi(x_n) + \alpha|\Psi^2(x_n)|\Psi(x_n). \tag{2.31}$$

L'utilisation de cette expression, pour $\sigma^{nl}(x, |\Psi(x)|)$ revient à négliger l'éventuelle génération d'harmoniques supérieurs dans le processus de propagation à travers le réseau.

2.7.1 Caractérisation de la transmission

Lorsqu'on utilise l'hypothèse $kd_n \ll 1$ des grandes longueurs d'onde associées à la relation de discontinuité (2.31), l'expression (2.6) de l'opérateur $\{\widehat{\mathbf{T}}_\mathbf{n}\}$ se simplifie. En posant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \phi_n & = & A_n + B_n \\ \xi_n & = & B_n - A_n, \end{array} \right.$$

et compte tenu de l'approximation

$$e^{\pm jkd_n} = 1 \pm ikd_n,$$

les équations d'évolution du mouvement se mettent sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \phi_n & = & \phi_{n-1} - jkd_n\xi_n \\ \xi_n & = & \xi_{n-1} - jkd_n\phi_n - \frac{\sigma_n}{jk}\phi_n - \frac{\alpha}{jk}|\phi_n|^2\phi_n. \end{array} \right. \tag{2.32}$$

En passant à la limite $(kd_n \ll 1)$, les équations couplées

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{d\phi(n)}{dn} & = & -jk\xi(n) \\ \frac{d\xi(n)}{dn} & = & -jk\phi(n) - \frac{\sigma}{jkd}\phi(n) - \frac{\alpha}{jkd}|\phi(n)|^2\phi(n), \end{array} \right. \tag{2.33}$$

[2] Ce coefficient est indépendant de la position.

où d et σ représentent respectivement la valeur moyenne arithmétique de d_n et de σ_n, décrivent la propagation à travers le réseau. Ces relations conduisent à l'équation différentielle du second ordre en n :

$$\begin{array}{rcl} \frac{d^2\phi(n)}{dn^2} & = & (-k^2\phi(n) + \frac{\sigma_n}{d}\phi(n) + \frac{1}{d}\alpha|\phi(n)|^2\phi(n)) \\ & = & -(k^2 - \frac{\sigma}{d} - \frac{\alpha}{d}|\phi(n)|^2)\phi(n). \end{array} \tag{2.34}$$

Pour une solution de la forme $\phi(n) = \phi(N)e^{-j\beta(N-n)d} = Te^{-j\beta(N-n)d}$ où T est l'amplitude de l'onde transmise, on trouve

$$\begin{cases} \beta^2 = \frac{k^2}{d^2} - \frac{\sigma}{d^3} - \frac{\alpha}{d^3}|T|^2 & \text{pour} \quad \alpha \geq 0, \\ \beta^2 = \frac{k^2}{d^2} - \frac{\sigma}{d^3} + \frac{|\alpha|}{d^3}|T|^2 & \text{pour} \quad \alpha \leq 0. \end{cases} \tag{2.35}$$

Dans cette formulation du problème, la transmission dépend essentiellement du signe de β^2 et par conséquent de l'intensité de l'onde transmise [3] par le réseau $|T|^2$. Tant que $\beta^2 \geq 0$, les ondes se propagent librement à travers le réseau. Ainsi, le terme non-linéaire diminue la largeur de la bande passante lorsque $\alpha \geq 0$ (voir la relation (2.35)) et, au contraire, renforce la transparence lorsque $\alpha \leq 0$. La valeur

$$|T| = \sqrt{\frac{k^2 d - \sigma}{\alpha}}$$

caractérise la frontière entre les régimes des ondes propagatives et évanescentes (pour α positif).

Cette étude, certes basée sur l'approximation des grandes longueurs d'onde devant la périodicité du réseau d, démontre analytiquement que la présence de non-linéarités peut engendrer un changement radical de régime de propagation dans un réseau (comportant ou non du désordre). Ces résultats renforcent l'idée d'une compétition entre les effets du désordre et ceux des non-linéarités sur la transmission.

Pour continuer à étudier ce phénomène, une méthode issue de la physique quantique est développée dans la suite de ce chapitre. Cette approche permet de mettre en évidence l'effet du désordre sur la propagation à travers un milieu à non-linéarités localisées grâce à une représentation différente.

2.8 Approche dynamique du problème

2.8.1 Introduction

Cette partie est consacrée à une approche différente du problème, basée sur une étude dynamique du système. Cette approche a été présentée pour la première fois en 1986 par Delyon (Delyon et *al* 1986 [62]) dans un article traitant de la propagation électronique régie par l'équation de Schrödinger dans un milieu non-linéaire avec une modulation périodique. Dans ces travaux, les auteurs analysent le cas d'une non-linéarité cubique (de la forme $f(x) = \alpha x^3$) et n'envisagent pas la présence de désordre dans le milieu unidimensionnel. Ils mettent en évidence les phénomènes de bistabilité et de multistabilité pour une propagation dans un réseau présentant des non-linéarités localisées. Ils définissent un diagramme en intensité, pour présenter les différents résultats, qui a la particularité de posséder un caractère fractal. Ils discutent aussi des possibles applications de cette approche pour des situations en optique, électromagnétisme ou acoustique. D'autre chercheurs ont, par la suite, utilisé et amélioré cette méthode pour analyser la propagation dans des milieux non-linéaires exhibant une périodicité spatiale comme la propagation des électrons dans des matériaux semi-conducteurs non-linéaires unidimensionnels (Grabowski et Hawrylak 1990 [63]) ; d'autres ont, pour leur part, publié des travaux sur la propagation électronique (Wan et Soukoulis 1989 [67] et 1990 [59]) en développant une méthode influencée par

[3] Une autre possibilité est d'exprimer β^2 en fonction de l'intensité de l'onde incidente en $x = x_0$. Les résultats et conclusions sont exactement identiques.

la physique du chaos. La propagation des ondes électromagnétiques dans des structures périodiques comportant des non-linéarités a elle aussi été traitée au moyen de cette nouvelle méthode (Henning et *al* 1994 [65], Li et *al* 1996 [61]).

Cette approche utilise, comme point de départ pour décrire la propagation dans un réseau à non-linéarités localisées, l'équation aux différences finies (2.9) reliant trois sites consécutifs du réseau. Les parties réelles et imaginaires de l'onde sont séparées pour donner naissance à un système de deux équations couplées définies dans l'espace des phases à quatre dimensions (x_{n-1}, x_n, y_{n-1}, y_n) où x et y représentent respectivement les parties réelles et imaginaires. Le flux d'énergie J apparaît comme un invariant du mouvement dans l'espace et son utilisation permet de diviser par deux le nombre de dimensions nécessaires pour décrire la propagation. La figure (2.2) de gauche illustre cette propriété : dans un espace des phases à trois dimensions (x_1, x_2, x_3), l'intersection de la trajectoire avec un plan de coupe, qui est défini généralement grâce à la connaissance d'un invariant, permet de réduire le nombre de dimensions et de rendre l'analyse d'un tel problème plus facile. L'enchevêtrement de la courbe tridimensionnelle ne laisse rien deviner de la dynamique tandis que la coupe de Poincaré indique, dès le premier coup d'œil, que le régime est quasi-périodique. La figure (2.2) de droite offre différents exemples de sections de Poincaré qui sont soit quasi-périodique, soit chaotique[4].

Ainsi, le mouvement est décrit par un système dynamique discret et une "carte" (section de Poincaré) est définie. Elle est caractérisée par deux paramètres de contrôle : le vecteur d'onde k et l'intensité de l'onde incidente. Dans ce plan, les solutions de l'équation de propagation sont représentées par des orbites dont l'analyse, dans notre cas, met en évidence des comportements très intéressants tels que la bistabilité ou la présence de bifurcations engendrant une opacité complète du milieu.

Cette nouvelle manière de décrire le problème est donc développée pour mettre l'accent sur des propriétés qui n'ont pas été détectées par les précédentes études classiques. L'introduction d'un faible désordre dans le milieu est aussi analysée au moyen de cette approche. Les orbites périodiques ou quasi-périodiques, représentant des ondes qui se propagent dans le milieu, sont perturbées par la présence de désordre mais gardent leurs propriétés ce qui permet de penser qu'un faible désordre n'entraîne pas obligatoirement une localisation de toutes les ondes.

Pour cette étude, les non-linéarités sont considérées comme symétriques (terme dépendant du cube de la fonction d'onde) ce qui est indispensable pour utiliser cette approche dynamique. En effet, une non-linéarité non symétrique implique une non conservation du flux d'énergie de l'onde et interdit la mise en oeuvre de cette méthode.

On considère un réseau infini linéaire dans lequel on insère une section non-linéaire de longueur finie. Une onde, incidente au réseau non-linéaire, excite une oscillation dans celui-ci. Cette réponse peut se propager dans le milieu et émerger à l'autre extrémité de la section donnant lieu à une onde transmise. C'est l'existence d'une telle onde transmise qui est étudiée. L'analyse des réponses du milieu permet de mettre en évidence et de comprendre les différents comportements de ce système physique.

2.8.2 Détermination des diagrammes de phases et des sections de Poincaré

2.8.2.1 Les diagrammes de phase

Le problème est décrit par l'équation aux différences finies pour $0 \leq x \leq L$ où les non-linéarités sont de la forme $f(x) = \alpha|x|^2$ et par les conditions aux limites suivantes

$$\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} - 2a_n\Psi_n + \lambda_n|\Psi_n|^2\Psi_n = 0, \tag{2.36}$$

[4]Une solution périodique est représentée dans le plan de coupe par un point car la trajectoire de phase tend vers une orbite fermée, le cycle limite.

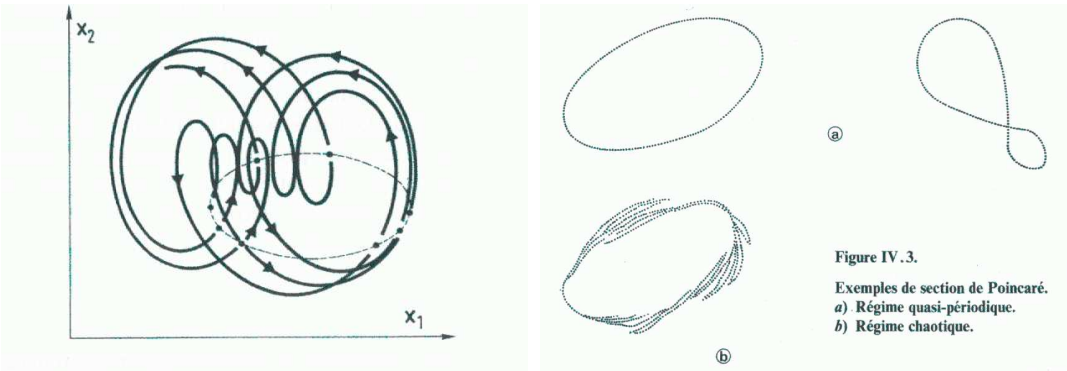

FIG. 2.2 – A gauche : section de Poincaré pour un régime quasi-périodique. Représentation de la projection d'une portion de trajectoire tridimensionnelle sur un plan de coupe (x_1, x_2) et de la section de Poincaré correspondante (pointillés). A droite : exemples de sections de Poincaré. Ces deux figures sont issues du livre de Bergé, Pomeau et Vidal [80].

$$\begin{cases} \Psi_n = R_e e^{jkx} + R_s e^{-jkx} & \text{pour} \quad x \leq 0, \\ \Psi_n = T e^{jk(x-x_N)} & \text{pour} \quad x \geq L. \end{cases} \tag{2.37}$$

R_e, R_s et T représentent respectivement les amplitudes des ondes incidente, réfléchie et transmise et $\lambda_n = -\frac{\alpha}{k}\sin(kd)$ est appelé le coefficient de non-linéarité. Pour satisfaire la conservation de l'énergie totale dans le système, il faut garantir

$$|R_e|^2 = |T|^2 + |R_s|^2.$$

Ainsi, pour étudier la dépendance de l'intensité de l'onde transmise à l'intensité de l'onde incidente, on définit le coefficient de transmission en énergie t suivant :

$$t = \frac{|T|^2}{|R_e|^2}.$$

Ce coefficient est fortement dépendant du nombre d'onde k, du paramètre décrivant la non-linéarité λ_n et de l'intensité de l'onde. L'observation de ce coefficient permet d'analyser le comportement général de la propagation d'une onde à travers un milieu comportant des non-linéarités localisées. Pour cela, la stratégie consiste à fixer la valeur de l'intensité de l'onde transmise et des différents paramètres (k et λ_n) puis de déterminer la valeur de l'onde incidente en utilisant l'équation aux différences finies (2.9). Si les nombreuses itérations (N fois correspondant au nombre de noeuds du réseau non-linéaire est choisi le plus large possible) divergent, l'intensité incidente devient infinie et, par conséquent, le coefficient de transmission est nul : la présence d'une bande interdite est détectée. Les bandes passantes sont définies pour le comportement opposé. Des diagrammes décrivant la propagation peuvent ainsi être construits en fonction du vecteur d'onde k et de l'intensité de l'onde transmise qui mettent en valeur les bandes passantes et interdites dans un milieu non-linéaire. Toutefois, cette description ne permet d'étudier que des propriétés générales et interdit une analyse fine des comportements. Les diagrammes de phase sont tout de même très utiles pour observer les effets des non-linéarités sur la propagation d'un point de vue général et permettent une comparaison rapide avec le cas linéaire correspondant. Pour entrer plus dans les détails des phénomènes internes au milieu et quantifier précisément l'influence des non-linéarités sur la propagation, une étude des sections de Poincaré est proposée.

2.8.2.2 Les sections de Poincaré

Si la fonction d'onde est décomposée à la manière d'un signal temporel, assignant à x(ou n) le rôle du temps tel que $\Psi_n = \psi_n e^{j\theta_n}$, l'équation de propagation d'une onde à travers le milieu

non-linéaire est remplacée par deux équations aux différences couplées. Le problème est donc décrit par un système représentant un espace des phases de dimension quatre[5] donné par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \psi_{n+1}\cos(\Delta\theta_{n+1}) + \psi_{n-1}\cos(\Delta\theta_{n-1}) & = & 2g_n(\psi_n) \\ \psi_{n+1}\sin(\Delta\theta_{n+1}) + \psi_{n-1}\sin(\Delta\theta_{n-1}) & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.38}$$

où $\Delta\theta_n = \theta_n - \theta_{n-1}$ et $g_n(x) = \frac{1}{2}x(\lambda_n x^2 - 2a_n)$. La deuxième équation de ce système fournit un invariant du mouvement J_n qui s'écrit :

$$J_n = \frac{-i}{2}(\Psi^*_{n-1}\Psi_n - \Psi^*_n\Psi_{n-1}) = \psi_n\psi_{n-1}\sin(\Delta\theta_n),$$

et qui a comme sens physique le flux d'énergie de l'onde qui se propage. L'existence de cette invariance permet de réduire le plan de phase de quatre à deux dimensions [6]. Ainsi, en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} v_n = \frac{1}{2}(\Psi^*_n\Psi_{n+1} - \Psi^*_{n+1}\Psi_n - 1), \\ r_n = \frac{1}{2}\lambda_n\psi_n^2, \\ q_n = \frac{v_n}{\psi_n^2} + \frac{1}{2}(-2a_n + \lambda_n\psi_n^2), \end{array} \right.$$

la transmission à travers un milieu non-linéaire est décrit par le système $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} : \left\{ \begin{array}{lcl} r_{n-1} & = & r_n\left(-a_n + r_n + q_n\right)^2 + \frac{(\lambda_n J_n)^2}{r_n}, \\ q_{n-1} & = & -q_n + \left(1 - \frac{r_n}{r_{n-1}}\right)\left(-a_n + r_n + q_n + r_{n-1}\right), \end{array} \right. \tag{2.39}$$

où r_n et q_n représentent les deux dimensions du plan de phase dans lequel la propagation est illustrée. Chaque point dans ce plan est associé à un site n du réseau et le système $\mathcal{H}$ permet, à partir d'une condition initiale, leur calcul. Ce système conserve les aires et il est symétrique, ce qui définit une section de Poincaré (r_n, q_n) dans laquelle chaque onde est représentée par des courbes exhibant ou non une périodicité synonyme de stabilité. La divergence de ces courbes met en évidence, au contraire, le caractère instable du mouvement et permet de repérer les bandes interdites. La connaissance des conditions aux limites du problème Ψ_N et Ψ_{N+1} conduit aux conditions initiales du sytème $\mathcal{H}$ ψ_N et ψ_{N+1} qui donnent accès à l'invariant du mouvement J_n. Il suffit ensuite d'utiliser le système (2.39) pour remonter jusqu'à l'origine ($n = 0$).

2.8.3 Discussion

Généralement, le mouvement des particules est observé dans le plan de Poincaré pour mettre en évidence des comportements dits "chaotiques" [7] ou proches de ceux-la. En effet, il existe des moyens assez simples de détecter l'arrivée plus ou moins iminente du chaos en physique : l'un de ceux-là consiste à observer la présence de bifurcations en fonction de l'intensité de l'onde. Des travaux (Bergé et *al* 1984 [80]) ont montré qu'une succession de bifurcations peut être à l'origine de l'instabilité d'un système et engendrer un comportement chaotique. Dans le cas présent, ces bifurcations sont détectées en observant les "bassins" d'attraction du système dans le plan de Poincaré. Pour repérer ces bassins dans le cas non divergent (quand les calculs divergent, l'onde ne se propage pas dans le réseau), il faut construire dans le plan de Poincaré une orbite pour chaque intensité de l'onde. Les attracteurs apparaîssent nettement et montrent des propriétés périodiques (suivant le nombre de sites attracteurs) qui renseignent sur la stabilité du système : généralement plus la périodicité est grande, plus la stabilité est précaire. Les orbites fermées sont

[5] Les étapes pour réduire l'équation aux différences finies de départ en un système discret à deux dimensions sont bien plus complexes que ce qui est présenté ici. Le lecteur pourra se reporter à l'article de Grabowski pour en prendre connaissance.

[6] Ceci revient à déterminer les intersections des trajectoires de phase (appartenant à un espace des phases de dimension quatre) avec un plan de dimension deux. Ces points d'intersections forment les sections de Poincaré.

[7] Pour plus de détails se reporter, par exemple au livre de Bergé et *al* 1984 [80].

organisées en une structure hiérarchique "d'iles autour d'iles" (Wan et Soukoulis 1989 [67]) et celles-ci, prises ensemble, forment un bassin d'attraction pour une intensité donnée. L'intérêt de cette approche réside dans la facilité avec laquelle l'évolution du mouvement peut être suivie en fonction de l'intensité de l'onde ou, ce qui revient au même, de la non-linéarité. Ainsi, dans le cas de ce système non-linéaire, les changements de comportement liés aux bifurcations successives entraînent le passage d'un système stable et transparent aux ondes vers un système instable et opaque. A l'inverse, pour certaines fréquences, le système peut passer d'une zone instable vers une zone stable (donc propagative) grâce à la présence des non-linéarités.

L'introduction du désordre perturbe évidemment le comportement de l'onde à l'intérieur du réseau non-linéaire. Les nouvelles propriétés du mouvement sont étudiées dans le plan de phase en s'assurant que les invariances sont toujours assumées. Les changements de bassins d'attraction, souvent synonymes d'instabilité dans le cas ordonné, sont très nettement renforcés par la présence de désordre. Mais, dans le cas de faibles désordres, le comportement général du système garde une certaine symétrie, gage de la transparence du milieu.

Toutes ces remarques générales sont observées et discutées dans la partie consacrée aux simulations numériques.

2.9 Conclusion et synthèse

L'introduction de non-linéarités dans un réseau unidimensionnel peut être appréhendée par plusieurs approches différentes et complémentaires :

- Le cas d'un nombre restreint de cellules non-linéaires est abordé avec la théorie des perturbations.
- L'approximation des basses fréquences permet un calcul analytique de la transmission dans un réseau non-linéaire et souligne les effets des non-linéarités sur la propagation.
- Finalement, une description à l'aide d'une approche dynamique, développée dans des travaux de physique théorique, met en évidence le caractère instable [8] de la transmission et permet d'observer des phénomènes ignorés avec les approches précédentes tels que la multistabilité ou l'existence de seuil pour l'amplitude de l'onde à partir duquel aucune transmission n'est possible.

En outre, une méthode fondée sur un formalisme d'opérateurs non-linéaires a été développée afin d'étudier les cas les plus généraux de cohabitation de désordre et de non-linéarités. Cette approche permet de simuler le coefficient de transmission et la longueur de localisation qui sont les deux principaux indicateurs du régime de propagation à travers un réseau. L'effet des non-linéarités, et leurs influences sur les phénomènes dûs au désordre, peuvent ainsi être largement observés et analysés.

Il ressort de l'étude théorique de ce vaste sujet que l'introduction de non-linéarités dans un milieu désordonné peut engendrer d'importants changements dans la transmission. Une compétition entre les effets du désordre et ceux des non-linéarités s'installe et définit la réponse du milieu. Évidemment, même en présence de non-linéarités, un désordre trop important détruit irrémédiablement toute possibilité de transmission. C'est donc ce subtil équilibre entre désordre et non-linéarités qu'il faut étudier pour caractériser la propagation.

La deuxième partie de cette thèse abordera ce problème au moyen d'une analyse exploitant les résultats d'une simulation numérique. Une troisième et dernière partie exposera des résultats expérimentaux.

Bien entendu, plusieurs points obscurs et délicats ont été simplifiés pour éclaircir la compréhension des phénomènes et pour les étudier au moyen d'outils relativement simples. Néanmoins les méthodes développées fournissent des résultats intéressants qui n'apparaîssent pas dans la littérature. Des résultats expérimentaux seront analysés et comparés à ces conclusions pour ef-

[8] Cet aspect est dû à la présence de non-linéarités.

facer le doute légitime que font surgir les différentes simplifications retenues dans ces approches théoriques.

Toutefois, avant d'observer les résultats de la simulation numérique ou de l'expérience, nous exposons une dernière méthode de calcul des coefficients de transmission et de réflexion appelée méthode du "plongement invariant" (invariant imbedding). Elle permet notamment de déterminer exactement les différents coefficients et peut être adaptée à la présence de non-linéarités dans un réseau ordonné ou non.

Chapitre 3

Méthode du "plongement invariant" (Invariant imbedding)

3.1 Introduction

La théorie dite "Invariant Imbedding" s'est développée sur les cinquante dernières années, d'abord comme une méthode pour étudier des problèmes complexes de la propagation de la lumière en astrophysique puis comme un moyen de traiter un grand nombre de phénomènes. Elle s'est depuis étendue à de nombreux champs d'investigation en physique (voir Bellman et Wing 1992 [86]) et elle est souvent utilisée en géophysique. Cependant, bien qu'elle puisse s'appliquer à une large classe de phénomènes, seuls quelques domaines de la physique semblent concernés par cette nouvelle approche dans la littérature. Citons la physique des états solides (condensés), la diffusion de la chaleur dans les glaces de l'antartique (rayonnement thermique) (Klyatskin 1985 [87]), la propagation des ondes dans les océans, la propagation des ondes de Rossby (Klyatskin 1996 [88], Klyatskin et *al* 1998 [89]) ou la propagation de la lumière dans l'atmosphère.

D'un point de vue particulier, cette méthode peut être considérée comme une application de la théorie des perturbations et il semble ainsi qu'elle appartienne à une approche bien connue de la physique. Néanmoins, la quantité perturbée, la structure du système, n'est nullement une variable classique ce qui fait la nouveauté de cette théorie. Ainsi, de nombreux scientifiques fondent de grands espoirs sur cette méthode qui peut , en outre, être appliquée à des phénomènes non-linéaires (Rammal et Doucot 1987 [90, 91]).

Le principe général de ce concept réside dans la description de la propagation à l'aide d'équations vérifiées par les coefficients de réflexion et de transmission. Ces équations peuvent être différentielles dans le cas d'un milieu variant d'une façon continue ou bien elles peuvent prendre la forme de relations de récurrence pour les milieux discrets. Le problème de transmission (problème aux valeurs aux limites) se réduit donc à un problème de Cauchy (valeurs initiales). Autre avantage de cette théorie, elle détermine directement les "observables" (résultats) de la propagation, que sont les coefficients de transmission et de réflexion, sans décrire les phénomènes internes au milieu.

3.2 Application à la propagation des ondes

Ce chapitre traite de l'application de la méthode "Invariant Imbedding" à la propagation des ondes.

Le problème linéaire porte uniquement sur des milieux discrets appellés problèmes à multi-milieux : chaque milieu a une densité et donc une célérité constante ce qui simplifie la méthode

[1]. Le cas non-linéaire est abordé au moyen d'une approximation à de faibles amplitudes ce qui rapproche, dans ce cas là, la méthode "Invariant Imbedding" de celle des perturbations. Le problème du milieu continu est traité dans ce cas non-linéaire et permet de mettre en évidence les perspectives qu'offre cette approche dans des situations complexes.

3.2.1 Milieu linéaire

La méthode du plongement invariant permet, dans le cas du milieu périodiquement ou aléatoirement chargé par un potentiel, d'avoir accès directement aux coefficients de transmission et de réflexion. Avec un potentiel de Kronig-Penney, les équations différentielles qui décrivent la propagation d'une onde dans le milieu (défini dans ce cas là comme un réseau) deviennent des équations aux différences finies. Les coefficients se mettent alors sous la forme d'une somme de termes définissant chacun une réflexion à l'intérieur du milieu. Ainsi, pour un réseau de taille finie, le calcul des coefficients est possible et dépend uniquement des coefficients de réflexion et de transmission de chaque cellule. En outre, les conditions aux limites ne rentrent pas en jeu puisque les coefficients de transmission et de réflexion caractérisent, par définition, le milieu étudié sans prendre en compte les effets de bord.

Il est aussi très important de préciser que toute l'étude présentée dans cette partie n'est valable que dans l'approximation des ondes planes.

3.2.1.1 Cas d'une discontinuité

Pour commencer, un cas très simple est étudié : un milieu unidimensionnel quelconque est séparé en deux parties par une interface en $x = x_n$ (figure 3.1). De nombreuses applications en physique classique sont décrites par ce problème : une corde chargée par un système masse-ressort, un guide d'onde sur lequel une dérivation est fixée, et beaucoup d'autres. Pour x compris

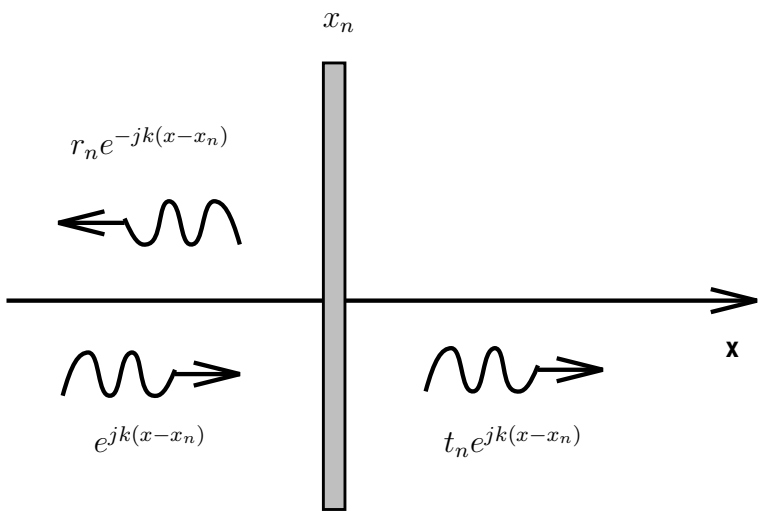

FIG. 3.1 – Schéma simplifié du problème à une interface.

entre $-\infty$ et x_n et entre x_n et $+\infty$, le milieu a comme nombre d'onde k et comme célérité c. En $x = x_n$ la présence de l'interface entraîne une discontinuité de la dérivée de l'onde. La relation qui décrit la discontinuité entre les deux milieux s'écrit :

$$\frac{\Psi(x)}{dx}|_{x_n^+} - \frac{\Psi(x)}{dx}|_{x_n^-} = \sigma_n \Psi(x_n) \tag{3.1}$$

[1] Dans cette étude le milieu est discret mais ce sont les discontinuités qui constituent le changement de "milieu". Il serait plus adéquat d'appeler ce genre de problème un problème à multi-discontinuités.

où σ_n représente l'amplitude du saut de la dérivée de l'onde.

Une onde plane venant de $-\infty$ est incidente à l'interface entre les deux milieux. Une partie de cette onde est réfléchie par l'interface tandis que l'autre partie est transmise. Physiquement, il n'y a aucune raison pour que la partie réfléchie de l'onde subisse d'autres réflexions. Par conséquent, dans la partie gauche du milieu ($x \leq x_n$), l'onde est la somme d'une onde allant vers la droite et d'une onde allant vers la gauche. Au contraire, dans la partie droite ($x \geq x_n$) l'onde ne dépend que d'un terme qui représente une onde se déplaçant vers la droite. Ces considérations s'écrivent :

$$\begin{cases} \Psi(x) = & e^{jk(x-x_n)} + r(x_n)e^{-jk(x-x_n)}, & \text{pour } -\infty \leq x \leq x_n, \\ \Psi(x) = & t(x_n)e^{jk(x-x_n)}, & \text{pour } x_n \leq x \leq +\infty \end{cases} \tag{3.2}$$

où l'amplitude de l'onde incidente est unitaire et où $r(x_n)$ et $t(x_n)$ représentent respectivement le coefficient de réflexion et de transmission de l'interface en $x = x_n$.

Le but de cette étude est de déterminer le coefficient de transmission et de réflexion de l'interface. Pour cela, la relation de discontinuité (3.1) est utilisée ainsi que la continuité de la fonction d'onde à l'interface. Cette équation peut s'écrire

$$jkt(x_n) - jk + jkr(x_n) = \sigma_n t(x_n),$$

dans laquelle le coefficient de réflexion est remplacé par

$$r(x_n) = 1 - t(x_n),$$

trouvé grâce à la relation de continuité de la fonction d'onde en $x = x_n$. Il devient très simple d'en déduire les deux coefficients recherchés :

$$t(x_n) = \frac{2jk}{2jk - \sigma_n} \text{ et } r(x_n) = \frac{\sigma_n}{2jk - \sigma_n}.$$

Ces coefficients représentent donc la réflexion et la transmission d'une interface. Alors lorsqu'une onde plane rencontre cette interface, il suffit de multiplier son amplitude par les coefficients de transmission et de réflexion pour connaître sa partie transmise et réflechie.

3.2.1.2 Problème à plusieurs discontinuités

La réflexion et la transmission d'un réseau composé de N interfaces étudiées précédemment sont déterminées à partir de la réflexion et la transmission de chacune d'entre elles. Intuitivement, l'on peut comprendre que la transmission et la réflexion d'un réseau tiennent compte des multiples réflexions internes à celui-ci.

Ce réseau est composé d'un milieu (célérité c et nombre d'onde k), dont les caractéristiques restent constantes, et qui comprend en x_0, x_1, x_2, $\ldots, x_N$, N interfaces quelconques (figure 3.2).

Une onde incidente $e^{-jk(x-x_N)}$ d'amplitude unitaire venant de la droite rentre en contact avec le réseau à l'interface $x = x_n$. Il faut maintenant déterminer la partie réfléchie et transmise de cette onde pour connaître les différents coefficients. Pour cela, les coefficients de transmission t_N et de réflexion r_N du réseau composé de N cellules sont supposés connus. Si l'on augmente la taille du système en ajoutant une cellule au réseau telle que $x_N \leq x \leq x_{N+1}$, les nouveaux coefficients t_{N+1} et r_{N+1} peuvent être déterminés en fonction de t_N et r_N, supposés connus. Puisque le cas de deux milieux est résolu, il suffit ensuite de rajouter autant de "couches" à $N = 1$ que le réseau ne comporte de cellules. Une relation de récurrence entre les coefficients est ainsi définie et le problème aux conditions limites devient un problème aux conditions initiales portant directement sur les coefficients de transmission et de réflexion du milieu. La suite de cette section explicite les différentes étapes pour obtenir cette relation.

Une onde de la forme $e^{-jk(x-x_{N+1})}$ est incidente à un réseau composé de $N+1$ cellules. La fonction d'onde pour $x \leq x_0$ est

$$\Psi(x) = T(x_{N+1})e^{-jk(x-x_0)} = T_{N+1}e^{-jk(x-x_0)},$$

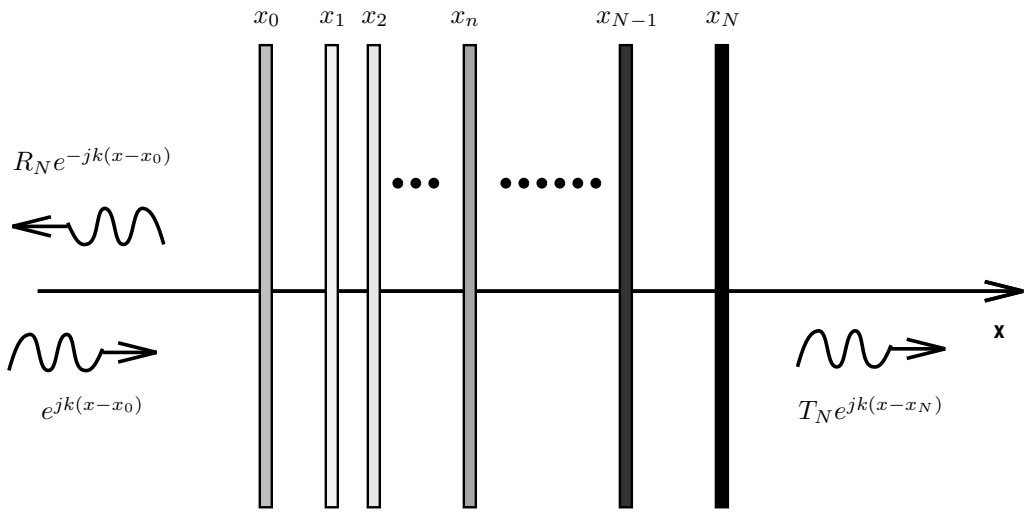

FIG. 3.2 – Schéma simplifié du problème à plusieurs interfaces.

et celle pour $x \geq x_{N+1}$ s'écrit

$$\Psi(x) = e^{-jk(x-x_{N+1})} + R_{N+1} e^{jk(x-x_{N+1})}.$$

L'onde incidente qui arrive sur l'interface $x = x_{N+1}$ possède une partie réfléchie et une partie transmise. La partie réfléchie contribue immédiatement à R_{N+1} et peut être calculée en utilisant le coefficient de réflexion de la $N+1^{\text{ième}}$ cellule. La portion transmise est déterminée, pour sa part, par le coefficient de transmission de cette même cellule. Donc l'onde incidente à l'interface en $x = x_N$ est

$$t_{N+1} e^{-jk(x_N - x_{N+1})}$$

où $t_{N+1} = t(x_{N+1})$ est le coefficient de transmission de la $(N+1)^{\text{ième}}$ interface. Cette expression donne l'intensité de la source vue par le milieu compris entre $-\infty$ et x_N. Ce milieu répond en réfléchissant une partie de cette onde :

$$t_{N+1} e^{-jk(x_N - x_{N+1})} R_N.$$

Ainsi, l'onde rejoignant $x = x_{N+1}$ peut s'écrire

$$t_{N+1} e^{-jk(x_N - x_{N+1})} e^{+jk(x_{N+1} - x_N)} R_N.$$

De même, il y a une portion réfléchie vers $-\infty$ et une portion transmise dans le milieu à droite de $x = x_{N+1}$. Ce dernier phénomène contribue lui aussi directement à l'onde réfléchie par le réseau et se met sous la forme

$$t_{N+1}^2 e^{+2jk(d_{N+1})} R_N.$$

La portion réfléchie retourne vers l'interface placée en $x = x_N$ et une partie de cette onde contribue elle aussi, après de multiples réflexions et transmissions, à l'onde totale réfléchie. Ce terme s'écrit

$$t_{N+1}^2 r_{N+1} e^{+4jk(d_{N+1})} R_N^2.$$

Cette procédure continue indéfiniment pour prendre en compte toutes les réflexions. La réflexion totale en $x = x_{N+1}$ devient finalement

$$R_{N+1} = r_{N+1} + t_{N+1}^2 \sum_{m=0}^{+\infty} e^{2j(m+1)kd_{N+1}} r_{N+1}^m R_N^{m+1}. \tag{3.3}$$

Cette série est convergente et se met sous la forme plus simple :

$$R_{N+1} = r_{N+1} + t_{N+1}^2 \frac{e^{2jkd_{N+1}} R_N}{1 + r_{N+1} e^{2jkd_{N+1}} R_N}. \tag{3.4}$$

Il est important de remarquer que toutes les réflexions à l'intérieur du réseau ont été prises en compte avec cette méthode et qu'aucune approximation n'a été faite [2]. Évidemment cette méthode permet aussi de déterminer le coefficient de transmission T_{N+1} du réseau. Le même raisonnement en s'attachant à la partie transmise conduit à

$$T_{N+1} = t_{N+1} + \frac{e^{2jkd_{N+1}} T_N}{1 + r_{N+1} e^{2jkd_{N+1}} R_N}. \tag{3.5}$$

Ainsi, puisque t_0 et r_0 sont connus, ces deux expressions (3.4) et (3.5) permettent de déterminer le coefficient de réflexion et de transmission pour n'importe quel réseau de taille quelconque.

3.2.2 Milieu non-linéaires

Cette section, consacrée à l'application de la méthode dite "Invariant Imbedding" dans le cas d'un milieu non-linéaire, reprend les principales idées développées dans les articles de R. Rammal et B. Doucot [90, 91]. Cette approche est exposée ici pour le cas d'un milieu continu, unidimensionnel, non-linéaire et désordonné. Seules les premières et importantes étapes de l'étude sont décrites pour montrer les possibilités les plus intéressantes de cette méthode. Nous nous contenterons donc de définir les coefficients de transmission et de réflexion dans le cas non linéaire ainsi que les équations différentielles qu'ils doivent vérifier.

Nous considérons un milieu unidimensionnel de longueur L dans lequel règne un potentiel continu, réel et régulier ou aléatoire. Ce système est décrit par l'équation non-linéaire suivante :

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = (\sigma(x) + f(|\Psi(x,t)|^2))\Psi(x,t), \tag{3.6}$$

où $f(x)$, qui représente les non-linéarités dans le milieu, dépend de l'intensité de l'onde. Seul le régime stationnaire est pris en compte, ce qui équivaut à l'étude de la propagation de la fréquence fondamentale. On cherche donc une solution de la forme :

$$\Psi(x,t) = \Psi(x) e^{j\omega t} \tag{3.7}$$

qui permet de réécrire la relation (3.6) en

$$\frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + k^2 (1 + \eta(x, |\Psi(x)|^2))\Psi(x) = 0, \tag{3.8}$$

où

$$\eta(x, |\Psi(x)|^2) = -(\sigma(x) + f(|\Psi(x)|^2))/k^2.$$

Une onde plane $\Psi_0(x) = Ae^{-jk(x-L)}$, incidente sur le milieu par la droite, est considérée. Ainsi, la solution de l'équation (3.8) peut être présentée sous la forme $\Psi(x) = Au(x)$ où $u(x)$ vérifie une équation similaire. A gauche et à droite du système, l'onde se met sous la forme :

$$\begin{cases} u(x) = e^{-jk(x-L)} + R(L,w) e^{jk(x-L)}, & x \geq L \\ u(x) = T(L,w) e^{-jkx} & x \leq 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

où $R(L,w)$ et $T(L,w)$ définissent respectivement les coefficients complexes de réflexion et de transmission dans le cas d'un milieu non-linéaire pour une intensité $w = |A|^2$ et pour une

[2] Ce n'est pas le cas avec la méthode de comptage des ondelettes où une partie seulement des réflexions internes est considérée et où la "couche" rajoutée au milieu initial est supposée petite.

longueur donnée L. Ainsi, L et w représentent les paramètres de "plongement" permettant de passer d'un problème aux valeurs aux limites à un problème aux valeurs initiales. Comme dans le cas linéaire, l'équation (3.6) peut être transformée en une équation intégrale (dépendant de l'intensité)

$$u(x) = e^{-jk(x-L)} + \frac{jk}{2}\int_0^L e^{jk|x-x'|}\eta(x, wI(x'))u(x', w)\mathrm{dx} \tag{3.10}$$

où le premier terme représente la propagation libre à travers le milieu et où le deuxième terme correspond aux réflexions multiples internes au système. La même approche que dans le cas linéaire est utilisée pour déterminer les différents coefficients : on fait varier l'épaisseur du milieu de dL et l'on calcule le coefficient de réflexion (par exemple) $R(L+dL, w)$ en fonction de $R(L, w)$. Cette approche permet d'obtenir, pour le coefficient de transmission, grâce à l'approximation $e^{jkdx} \sim 1 + jkdx$ la relation suivante :

$$\frac{dT(L,w)}{dL} = ikT + \frac{ik}{2}\eta(L, wI(L))(1+R)T + w\frac{dT}{dw}\frac{ik}{2}\eta(L, wI(L))(R - R^*), \tag{3.11}$$

avec la condition limite $T(L = 0, w) = 1$. L'intensité $I(L)$ est donnée par $I(L) = |u(L)|^2 = (1 + R)(1 + R^*)$ et la limite $w = 0$ permet de retrouver le cas linéaire où le coefficient de réflexion vérifie une équation de Riccati. Ainsi, dans le cas non-linéaire, les coefficients vérifient une équation aux dérivées partielles qui peut être appréhendée comme une infinité d'équations différentielles alors que pour le cas linéaire, seule une équation différentielle est obtenue. Ceci constitue la grande différence entre les deux régimes et peut s'expliquer par l'existence de deux paramètres de "plongement" dans le cas non-linéaire à l'inverse du cas linéaire où seule la longueur L entre en jeu. On peut donc assimiler le cas d'un milieu non-linéaire au problème de transmission d'un milieu comportant plusieurs canaux qui communiquent entre eux. Cette idée constitue une "piste" sérieuse pour les futurs travaux sur ce type de propagation.

Pour leur part, Rammal et Doucot séparent les solutions en deux catégories distinctes :
- la transmission à sortie fixée,
- la transmission à entrée fixée.

Ils montrent l'influence des non-linéarités de type $f(x) = \alpha x^2$ sur la transmission à travers un milieu désordonné. Pour une amplitude de sortie fixée, la décroissance exponentielle du cas linéaire ($T^2 \sim exp(-L/\xi)$) se transforme en une décroissance en loi de puissance qui dépend de l'importance de la non-linéarité (à travers le coefficient α).

Cette approche doit pouvoir être appliquée à la propagation des ondes dans un milieu discret comportant du désordre et des non-linéarités localisées. Ce qui constitue, sans nul doute, une perspective très intéressante.

3.3 Conclusion et synthèse

Cette méthode dite "Invariant Imbedding" est tout à fait satisfaisante pour simuler (ou calculer) la transmission et donc la propagation d'une onde mécanique à travers n'importe quel milieu qu'il soit linéaire, non-linéaire ou bien encore qu'il comporte ou non du désordre. Cette approche est d'ailleurs utilisée dans toutes les simulations en régime linéaire de cette étude et nous verrons que les résultats sont très encourageants. L'avantage que présente cette méthode réside dans le fait que toutes les multiples réflexions à l'intérieur du milieu sont prises en compte dans le calcul des coefficients et que des quantités directement "observables" sont déterminées ce qui facilite grandement la comparaison avec des résultats expérimentaux.

L'approche de l'"Invariant Imbedding" peut aussi être appliquée à d'autre genre de propagation d'ondes mécaniques telles que la propagation des ondes dans les milieux stratifiés (géophysique) ou la propagation de vibrations dans des structures comportant des inhomogénéités (renforts ou autre) que l'on rencontre en aéronautique.

Quelques travaux montrent que cette méthode est aussi envisageable dans le cas de propagation dans des milieux non-linéaires pour de faibles amplitudes. Cet aspect est extrêmement important et laisse présager un grand avenir à cette approche qui pourrait permettre de déterminer directement les coefficients de transmission et de réflexion de milieux non-linéaires. Malheureusement, pour notre étude, nous n'avons pu mettre en œuvre cette application que dans le cas d'un régime de propagation linéaire.

La partie suivante concerne l'étude, au moyen de simulations numériques, d'un cas particulier de propagation d'ondes mécaniques dans un réseau ordonné ou désordonné comportant des non-linéarités.

Deuxième partie

Etude numérique

Chapitre 4

Introduction

Cette partie est consacrée à une étude numérique de la propagation d'une onde mécanique à travers un réseau composé d'une corde vibrante chargée par des systèmes masse-ressort (bille-ressort). Le milieu est supposé infini et anéchoïque. Les notions développées dans la partie théorique sont appliquées à ce cas de propagation à travers un réseau ordonné, désordonné et/ou non-linéaire au moyen de simulations numériques ou de calculs analytiques.

Le choix d'une telle application a été guidé par la possibilité de concevoir un dispositif expérimental permettant des comparaisons entre des mesures et des modèles ou simulations numériques. Malheureusement, cet espoir ne s'est pas concrétisé (voir la partie expérimentale) mais les simulations ont pu être menées et les résultats n'en sont pas moins intéressants.

Dans un premier temps, le cas ordonné linéaire est étudié pour "valider" la simulation numérique, en la comparant aux résultats analytiques obtenus grâce à la théorie de Bloch. Le désordre est introduit dans le réseau au travers de deux grandeurs distinctes que sont la masse de la bille de chaque site et la longueur des cellules du réseau. Les effets du désordre sont analysés en observant le coefficient de transmission du réseau. Il apparaît d'ailleurs de grandes différences entre les désordres, et l'on observe leurs différentes influences sur la transmission.

Pour le cas non-linéaire, nous avons choisi d'inclure les non-linéarités dans le modèle de potentiel de chaque ressort. Ainsi, leur caractère localisé ne peut être contesté. Comme exposé dans la partie théorique, la non-linéarité de chaque cellule est représentée par un terme additif au cas linéaire dépendant de l'intensité de l'onde qui se propage. Pour cette application, les non-linéarités sont toutes identiques dans le réseau (le désordre de non-linéarité n'est pas prévu). Ce choix semble largement envisageable d'un point de vue expérimental en associant deux ressorts pour chaque site et en s'intéressant à la vibration de la corde dans un plan perpendiculaire à celui formé par les ressorts.

Tout d'abord, le cas ordonné est observé grâce à la construction d'un "diagramme de phase" résumant les deux régimes de propagation possibles (propagatif et évanescent). Une nette influence des non-linéarités est mise en évidence. L'arrivée du désordre est ensuite analysée et l'on montre, en déterminant la longueur de localisation, qu'il existe une compétition entre les effets du désordre et ceux des non-linéarités.

Finalement, nous proposons les résultats d'une approche dynamique, décrite théoriquement dans la première partie. Trois cas distincts sont envisagés, qui permettent de résumer les différentes situations. Le premier illustre les effets des non-linéarités sur une onde appartenant à une bande passante du cas ordonné linéaire, en insistant sur la présence d'un phénomène de multistabilité. Le cas d'une onde qui appartient à une bande interdite du cas linéaire et qui se propage à travers le réseau grâce aux non-linéarités est ensuite mis en évidence. Le phénomène de multistabilité est là aussi présent et différentes propriétés d'un régime propagatif sont signalées telles que leurs quasi-périodicités et des possibles bifurcations entraînant un changement de régime de transmission. Puis, un très faible désordre est introduit dans ce cas de figure, et son effet sur ces propriétés est analysé.

Chapitre 5

Équation générale et formalismes utilisés

5.1 Équation de propagation

Nous considérons une corde infinie unidimensionnelle homogène de densité ρ et soumise à une tension uniforme T_c. A chaque point x_n, cette corde est chargée par une masse M_n attachée à un ressort de raideur k_n (figure (5.1)).

Nous nous intéressons à la propagation d'une onde transversale dans le plan vertical. L'équation des ondes pour une corde vibrante simple est donnée par :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0, \tag{5.1}$$

où $y(x,t)$ représente le déplacement transverse et $c^2 = \frac{T_c}{\rho}$.

Les non-linéarités sont introduites dans le système par l'intermédiaire du potentiel dynamique associé à chaque ressort. Ce potentiel dépend de l'intensité de la vibration de la masse et est défini par :

$$V_n(x_n,t) = \frac{1}{2}k_n y^2(x_n,t) + \frac{1}{4}\alpha_n k_n y^4(x_n,t) + 0(y^5(x,t)), \tag{5.2}$$

où α_n décrit la force de la $n^{\text{ième}}$ non-linéarité. Le potentiel est donc symétrique et le second terme caractérisant le comportement non-linéaire illustre l'anharmonicité du ressort.

L'aspect dynamique du système masse-ressort ainsi défini est décrit par la relation

$$\frac{M_n}{T_c}\frac{\partial^2 y(x_n,t)}{\partial t^2} + \frac{k_n}{T_c}\left[y(x_n,t) + \alpha_n y^3(x_n,t)\right] = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\mid_{x=x_n^+} - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\mid_{x=x_n^-} \tag{5.3}$$

qui constitue l'expression de la discontinuité de la dérivée $\partial y/\partial x$ à chaque point du réseau.

L'équation de propagation du déplacement transversal de la corde à travers le réseau est donc donnée par :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_n)\left[\frac{M_n}{T_c}\frac{\partial^2 y(x_n,t)}{\partial t^2} + \frac{k_n}{T_c}(1+\alpha_n y^2(x,t))y(x,t)\right]. \tag{5.4}$$

Les solutions de cette équation sont considérées comme des ondes harmoniques (planes) entre deux discontinuités que l'on peut mettre sous la forme

$$y(x,t) = y(x)e^{j\omega t},$$

où ω est la pulsation de l'onde.

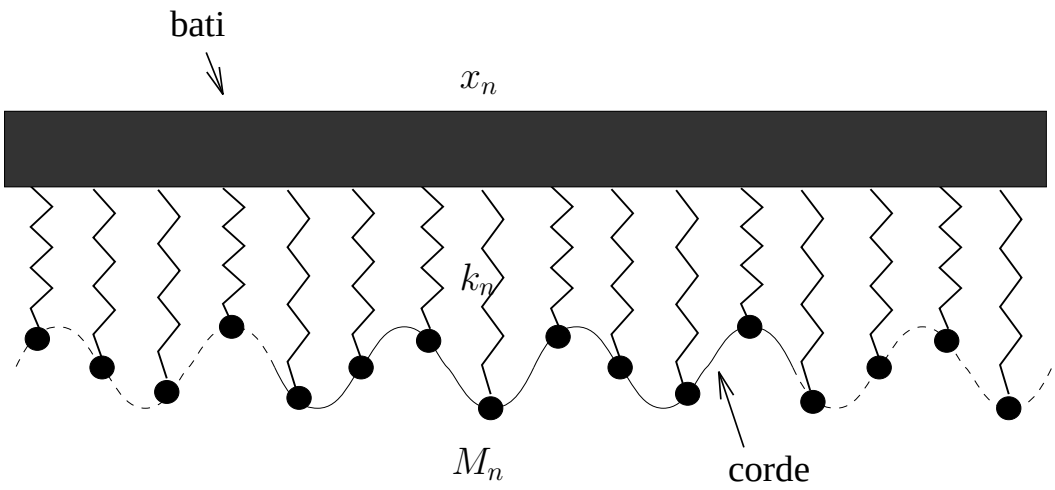

FIG. 5.1 – Schéma du dispositif étudié.

Pour étudier le comportement de ces solutions (de l'équation (5.4)), l'approximation RWA (Rotating Wave Approximation [92]) est utilisée. Elle consiste à ne garder qu'une seule composante fréquentielle dans la dépendance temporelle ce qui revient à négliger la possible présence d'harmoniques supérieurs. Pour cela, il faut linéariser $\cos^3(\omega t)$ tel que :

$$\cos^3(\omega t) \simeq \frac{3}{4}\cos(\omega t). \tag{5.5}$$

L'équation (5.4) devient alors :

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}y(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_n)\sigma_n y(x). \tag{5.6}$$

où

$$\sigma_n = -\frac{1}{d_n}\left[-\frac{\overline{K}^2}{D_n} + C_n(1 + \frac{3}{4}\alpha_n|y(x)|^2)\right]. \tag{5.7}$$

Le vecteur d'onde $K = \omega/c$ et la valeur moyenne arithmétique de la distance entre deux sites consécutifs $d_n = x_{n+1} - x_n$, notée $\overline{d}$, forment la fréquence adimensionnée $\overline{K} = K\overline{d}$. $C_n = \frac{k_n d_n}{M_n}$ et $D_n = \frac{d_n \rho}{M_n}$ représentent les paramètres physiques adimensionnés du système (réseau).

De même que dans l'étude théorique, le potentiel est de la forme Kronig-Penney (somme de fonction delta) et agit comme une infinité de sources secondaires pour la vibration transversale.

5.2 Formalismes

Le formalisme des matrices de transmission est utilisé pour résoudre ce problème. Tout d'abord, le déplacement $y(x)$ est séparé en une onde aller et une onde retour, puis un opérateur non-linéaire $\{\widehat{\mathbf{T}}_\mathbf{n}\}$ est défini grâce à la continuité du déplacement et à la discontinuité de la dérivée. Ainsi, une relation non-linéaire, reliant les ondes aller et retour de deux sites consécutifs, est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} A_n & = & a_{n-1} + \frac{1}{2j\overline{K}}\left[-\frac{\overline{K}^2}{D_n} + C_n(1 + \frac{3}{4}\alpha_n|a_{n-1} + b_{n-1}|^2)\right])(a_{n-1} + b_{n-1}) \\ B_n & = & b_{n-1} - \frac{1}{2j\overline{K}}\left[-\frac{\overline{K}^2}{D_n} + C_n(1 + \frac{3}{4}\alpha_n|a_{n-1} + b_{n-1}|^2)\right])(a_{n-1} + b_{n-1}) \end{array}\right. \tag{5.8}$$

où

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n e^{jKd_{n+1}} \\ B_n e^{jKd_{n+1}} \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

La propagation à travers un réseau unidimensionnel, constitué d'une corde vibrante chargée par N systèmes masse-ressort peut ainsi être mise sous la forme d'un produit d'opérateurs non-linéaires $\{\widehat{\mathbf{T}}_\mathbf{n}\}$:

$$\begin{pmatrix} A_N \\ B_N \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{N} \{\widehat{\mathbf{T}}_\mathbf{i}\} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

où le vecteur $(A_0 \ B_0)^t$ détermine l'onde incidente dans le réseau et constitue les conditions initiales.

Le formalisme des "matrices de transfert" peut aussi être utilisé et la propagation de l'onde à travers le réseau est décrite par le système suivant :

$$\begin{cases} Y_{n+1} + Y_{n-1} - 2a_n Y_n + \lambda_n |Y_n|^2 Y_n = 0, & \text{pour} \quad 0 \leq x \leq x_N, \\ Y_n = R_e e^{jKx} + R_s e^{-jKx}, & \text{pour} \quad x \leq 0, \\ Y_n = T e^{jK(x-x_N)}, & \text{pour} \quad x \geq x_N, \end{cases} \tag{5.11}$$

où R_e, R_s et T représentent respectivement les amplitudes des ondes incidente, réflechie et transmise par le réseau et où a_n, λ_n sont donnés par :

$$a_n = \cos(\overline{K}) + \frac{1}{2\overline{K}} \left[C_n - \frac{\overline{K}^2}{D_n} \right] \sin(\overline{K}) \text{ et } \lambda_n = -\frac{3C_n}{4} \alpha_n \frac{\sin(\overline{K})}{\overline{K}}. \tag{5.12}$$

Le calcul numérique du coefficient de transmission utilise l'un ou l'autre de ces formalismes (voir la première partie théorique de ce travail) mais pour le cas linéaire, la méthode dite "Invariant Imbedding" peut aussi être appliquée.

Dans un premier temps, une approche qualitative peut être faite, qui met en lumière plusieurs points intéressants. Le désordre, suivant s'il est introduit par l'intermédiaire des masses ou des distances entre les sites, n'a pas les mêmes effets sur la propagation à travers le réseau. En effet, les paramètres C_n et D_n dépendent de ces désordres et caractérisent l'influence de chacun : les distances d_n interviennent dans les deux paramètres alors que la masse des billes n'est présente que dans C_n ce qui implique des effets plus importants, sur la transmission, du désordre de distance (dit géométrique) que du désordre de masse (dit paramétrique). En outre, les non-linéarités sont atténuées par une fonction sinusoïdale de la fréquence adimensionnée (voir λ_n dans la relation (5.12)) ce qui laisse présager une influence sur les non-linéarités de la fréquence de l'onde incidente. De même, les effets non-linéaires seront fortement subordonnés au désordre présent dans le réseau puisque λ_n dépend, à la fois, de la distribution des masses et des distances. Pour finir, le signe des non-linéarités apparaît d'une grande importance sur la transmission du réseau et il est fonction, à la fois, du signe de α_n et de la fréquence de l'onde.

Chapitre 6

Résultats numériques

6.1 Introduction

Les résultats présentés dans cette partie sont le fruit de simulations basées sur les méthodes discutées dans la partie théorique de ce travail. Pour le cas linéaire (avec ou sans désordre), l'approche "Invariant Imbedding" est utilisée lorsque les calculs analytiques sont impossibles (lorsque un désordre continûment distribué est présent). Cette méthode permet d'obtenir directement le coefficient de transmission ce qui lui confère l'avantage de ne pas dépendre des limites de calculs de l'ordinateur. Néanmoins, les résultats sont strictement identiques qu'avec une méthode basée sur un formalisme matriciel.

Quand les non-linéarités sont présentes dans le réseau, le formalisme des matrices de transfert ou de transmission est exploité et une description dynamique du système est introduite pour illustrer les effets des non-linéarités en présence de désordre.

L'étude numérique permet d'observer plusieurs grandeurs caractéristiques décrivant les phénomènes liés à la propagation dans le réseau. Ainsi, le coefficient de transmission et la longueur de localisation sont déterminés pour la transmission dans un réseau linéaire. Dans le cas non-linéaire, en plus de ces deux grandeurs, un diagramme de phase et les sections de Poincaré sont définis et illustrent, de façon claire, l'influence des non-linéarités sur la transmission.

Les résultats numériques sont donc présentés en plusieurs parties distinctes. Tout d'abord, les cas linéaires ordonné et désordonné sont étudiés en observant les effets des différents désordres sur la propagation. Ensuite, les non-linéarités sont introduites, avec et sans désordre afin de rendre compte de la compétition qu'il existe entre les conséquences du désordre et des non-linéarités.

Les calculs ont été menés en utilisant les quantités physiques, décrivant le réseau, suivantes : le nombre de sites est de 500 ce qui correspond à une longueur du milieu de 50 m puisque la distance moyenne $\overline{d}$ entre les billes est de 0.1 m. La densité de la corde est de 5 kg/m. La raideur des ressorts et la valeur moyenne de la masse des billes sont respectivement de 10 N/m et de 0.1 kg.

6.2 Propagation linéaire

6.2.1 Réseau ordonné

Le cas ordonné (tous les sites sont identiques) présenté sur la figure (6.1) illustre sans équivoque, le phénomène de bandes apparaîssant lors de la propagation d'une onde dans un réseau. La relation de dispersion ($\cos(qd)$), l'exposant de Lyapunov et le coefficient de transmission sont, tous les trois, tracés en fonction de la fréquence adimensionnée. Les bandes passantes correspondent à un coefficient de transmission proche de 1, à un exposant de Lyapunov pratiquement nul et à des valeurs de la relation de dispersion comprises entre -1 et 1. Le cas contraire détermine la position d'une bande interdite. La concordance entre les trois méthodes de calculs

est tout à fait satisfaisante. Ainsi, les résultats numériques issus des formalismes matriciels sont validés par le calcul analytique de la relation de dispersion.

Les bandes interdites sont causées par la périodicité du réseau alliée aux résonances des systèmes masse-ressort. La largeur de ces bandes dépend à la fois du domaine de fréquences de l'onde et des paramètres du réseau. Nous pouvons voir que les bandes passantes apparaîssent symétriques les unes par rapport aux autres et semblent se rapprocher lorsque la fréquence augmente. Le calcul analytique de la position des bandes est d'ailleurs possible : les séparations entre les différents régimes apparaît lorsque

$$\cos(qd) = \pm 1 \tag{6.1}$$

qui s'écrit, en posant $\tan(\theta) = \frac{-1}{2Kd}(-\frac{(Kd)^2}{D_n} + C_n)$,

$$\cos(Kd) - \tan(\theta)\sin(Kd) = \pm 1. \tag{6.2}$$

Finalement, cette équation se met sous la forme

$$\cos(Kd + \theta) = \pm\cos(\theta). \tag{6.3}$$

Les solutions sont $Kd = n\pi$ ou $Kd = n\pi - 2\theta$. Ainsi, les bandes passantes sont déterminées par

$$n\pi \leq Kd \leq (n+1)\pi - 2\theta,$$

et les bandes interdites par

$$n\pi - 2\theta \leq Kd \leq n\pi.$$

Il apparaît donc que les bornes de chaque bande ne dépendent pas de la même façon des valeurs des masses des billes et de la distance entre celles-ci. Le bord supérieur des bandes interdites est déterminé exclusivement par la valeur de la distance inter site. En revanche, la borne inférieure est liée à la fois à la distance, à la masse et à la fréquence. Ainsi, les propriétés observées lors des simulations sont confirmées par ces résultats analytiques où la largeur des bandes interdites 2θ augmente avec la fréquence.

En outre, l'observation de l'exposant de Lyapunov permet de mettre en évidence des aspects différents de la transmission suivant les bandes passantes. La limite de cet exposant varie en fonction de l'emplacement de la bande : $\gamma \approx 5.10^{-4}$ pour la première et $\gamma \approx 5.10^{-3}$ pour la seconde. La longueur de localisation (inverse de cet exposant) est donc dépendante de la fréquence et diminue avec celle-ci dans les bandes passantes ce qui signifie que les interférences constructives ont un effet plus importants aux basses fréquences. Cet aspect de la propagation n'est pas forcément évident et permet, par la suite, de comprendre les différences d'influence du désordre.

6.2.2 Réseau désordonné

Pour introduire un désordre continûment distribué dans le réseau, nous utilisons une distribution normale pour choisir chaque valeur de la masse ou de la distance entre les sites, autour d'une valeur moyenne et avec un écart type donnés. Chaque désordre est donc décrit par sa valeur moyenne et, surtout, la valeur de son écart type.

Les effets du désordre sur la transmission à travers un réseau sont étudiés au moyen de deux exemples distincts. Dans le premier, illustré par la figure (6.2), un désordre paramétrique portant sur la masse des billes et décrit par un écart type $1/\epsilon = 1$, est introduit dans le milieu. Son influence sur le coefficient de transmission se manifeste par une diminution de la largeur des bandes passantes. Le réseau devient moins transparent et la structure de bandes dans le domaine spectral est détruite.

Les mêmes effets sont visibles sur la figure (6.3) où les résultats de la simulation pour un désordre sur les distances entre les billes (géométrique) sont présentés. Dans cet exemple, l'écart

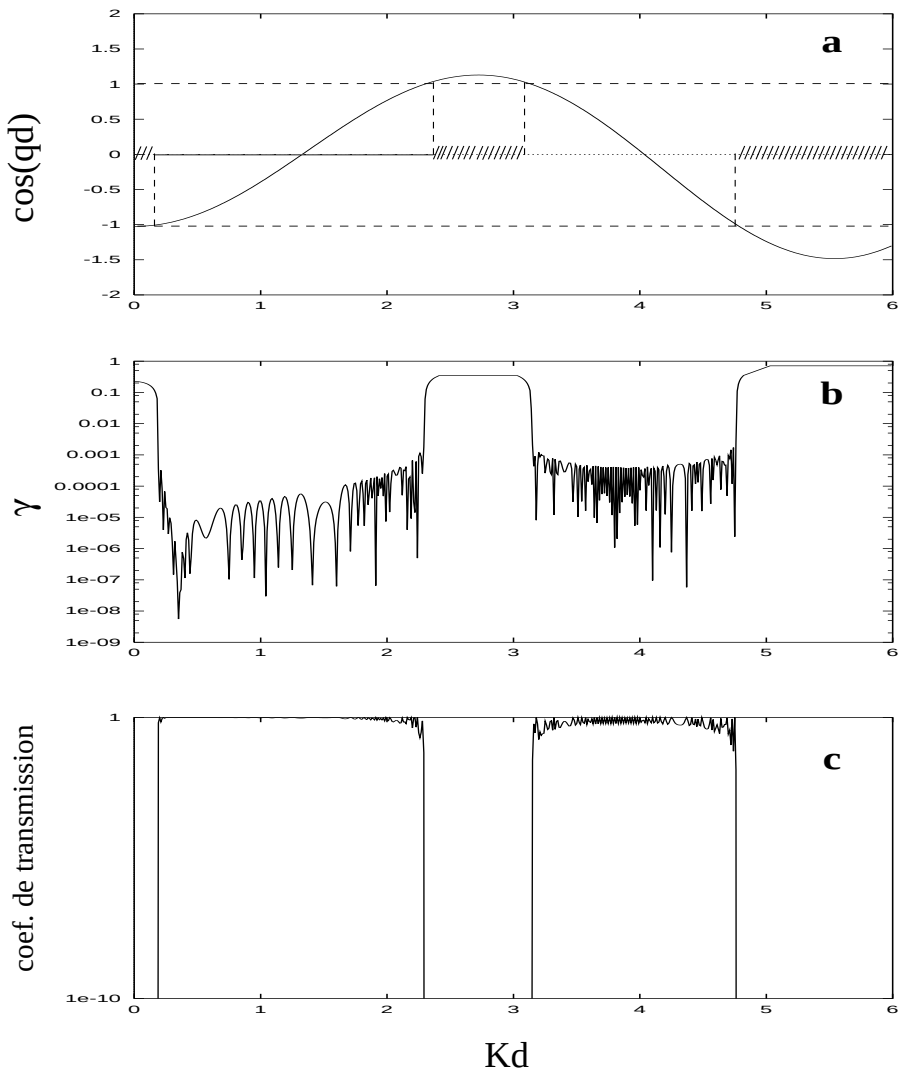

FIG. 6.1 – (a) Relation de dispersion des ondes de Bloch pour un réseau ordonné. (b) Exposant de Lyapunov en fonction de la fréquence pour un réseau ordonné. (c) Coefficient de transmission pour un réseau ordonné.

type de la distribution normale est $1/\epsilon = 0.1$, ce qui décrit un désordre de plus faible importance que dans le premier cas.

Les conséquences générales de l'introduction d'hétérogénéités dans le réseau sont identiques suivant le type de désordre : l'opacité du milieu est renforcée ce qui se traduit par une augmentation de la largeur des bandes interdites. En revanche, les effets quantitatifs de la présence de désordre sont assez différents. Lorsque le désordre porte sur les valeurs des masses, les bandes passantes ne sont perturbées que par leur côté droit, et les suites sur la transmission sont équivalentes à l'introduction d'un désordre géométrique 10 fois plus faible. Le désordre géométrique modifie, quant à lui, les deux bords des bandes passantes. Ceci peut s'expliquer grâce à l'observation des calculs des largeurs de bande dans le cas ordonné : les bandes interdites sont délimitées, d'un côté par une valeur dépendante de toutes les caractéristiques physiques du réseau, alors que pour le bord gauche, cette frontière ne dépend que de la distance entre les billes. De plus, l'influence du désordre géométrique est d'autant plus forte que la distance intersite d_n apparaît dans toutes les constantes adimensionnées (C_n et D_n) du système. Cet aspect de la transmission à travers un réseau désordonné peut être illustré par un cas particulier : le désordre paramétrique ne modifie pas les distances entre les billes ; il existe donc toujours un ensemble dénombrable d'ondes dont la fréquence est donnée par la relation $n\lambda/2 = d$, qui se propagent librement, sans être perturbées par les hétérogénéités, dans le réseau. Ces fréquences correspondent aux bords gauches de toutes les bandes passantes. Cette propriété n'existe plus lors de la présence d'un désordre sur les distances intersites. Pour confirmer les différences d'effets entre les deux sortes de désordre, la figure (6.4) permet d'observer les conséquences dévastatrices de l'introduction de désordre géométrique décrit par $\epsilon = 5$.

Enfin, il est aussi très intéressant de noter que le désordre détruit moins la transmission pour les basses fréquences. Ceci peut s'expliquer en observant la longueur de localisation du cas ordonné dans la première bande passante : sa valeur est bien supérieure ($\simeq 10^5$) que dans les autres bandes passantes ($\simeq 10^3$), ce qui implique un désordre d'une plus grande force pour rendre le réseau opaque aux basses fréquences. Il apparaît donc que, pour un désordre donné, les basses fréquences seront toujours beaucoup moins touchées par le phénomène de localisation.

Il est possible de tracer le comportement spatial du coefficient de transmission à l'intérieur du réseau pour une fréquence et un désordre donnés. Pour cela, on définit un réseau désordonné et on calcule, pour chaque site, la partie transmise de l'onde incidente. Ce comportement du coefficient de transmission en fonction de la longueur du réseau désordonné est exposé sur la figure (6.5) pour des valeurs typiques de la fréquence lorsqu'un désordre sur les masses est introduit. Cette illustration du comportement spatial de la transmission permet de confirmer le lien exponentiel qu'il existe entre le coefficient de transmission et la longueur de localisation. Les fréquences choisies $Kd = 2.32$, $Kd = 2.33$, $Kd = 2.35$ et $Kd = 2.4$ sont situées dans une bande passante pour le cas ordonné et la comparaison de ces différentes courbes met en évidence la dépendance de la longueur de localisation à la fréquence : elle décroît lorsque la valeur de la fréquence se rapproche d'une bande interdite d'un réseau ordonné. Ainsi, les effets du désordre sont plus destructeurs à l'intérieur d'une bande interdite que sur ses bords, même si le résultat sur la transmission finale est identique.

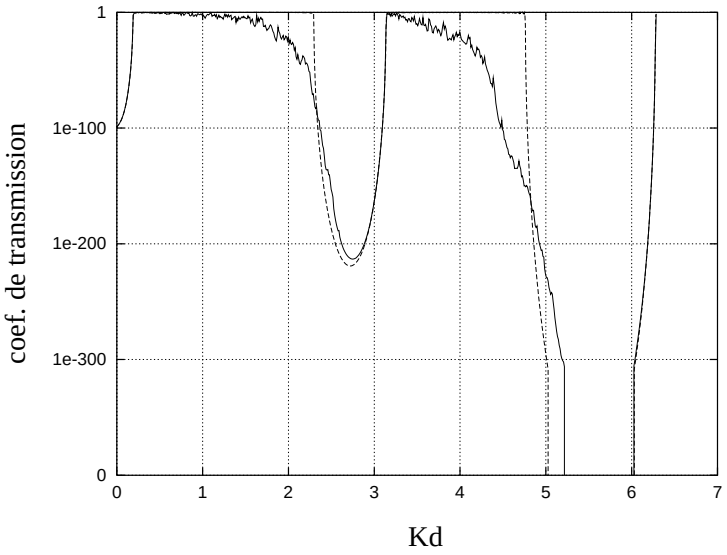

FIG. 6.2 – Coefficient de transmission d'un réseau ordonné (ligne pointillée) et d'un réseau comportant un désordre de masse décrit par $\epsilon = 1$ (ligne continue).

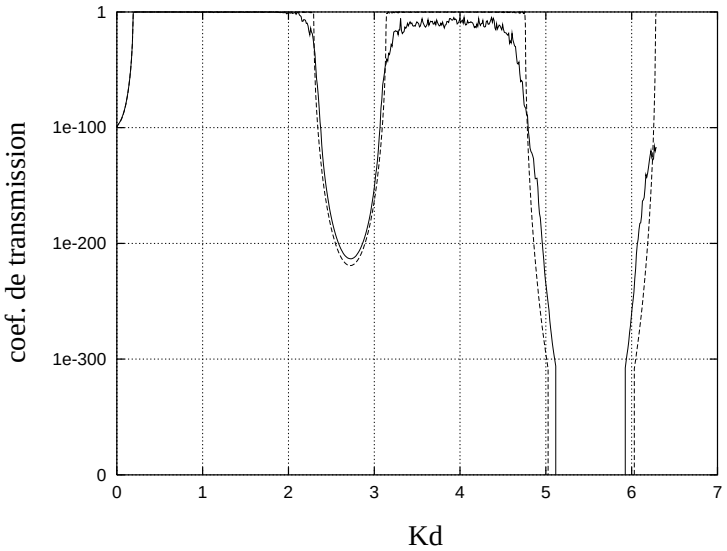

FIG. 6.3 – Coefficient de transmission d'un réseau ordonné (ligne pointillée) et d'un réseau comportant un désordre de distance décrit par $\epsilon = 10$ (ligne continue).

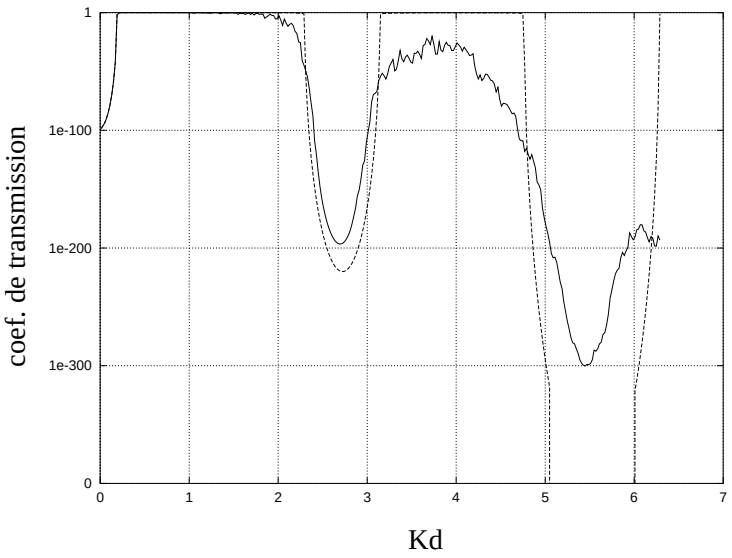

FIG. 6.4 – Coefficient de transmission d'un réseau ordonné (ligne pointillée) et d'un réseau comportant un désordre de distance décrit par $\epsilon = 5$ (ligne continue).

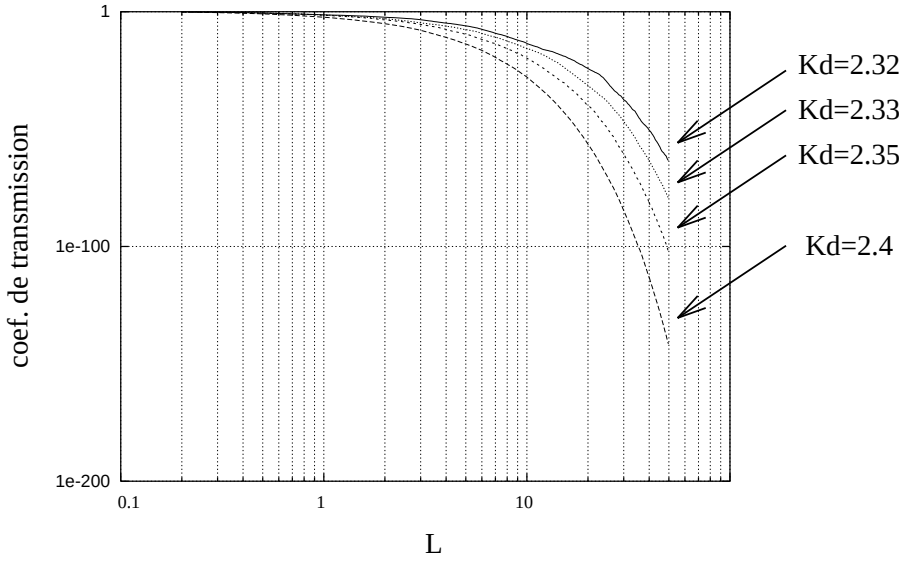

FIG. 6.5 – Coefficient de transmission d'un réseau comportant un désordre de masse ($\epsilon = 1$) en fonction de la taille du réseau.

6.3 Propagation non-linéaire

Dans cette simulation numérique de la propagation d'une onde de vibration transverse à travers un réseau comportant des non-linéarités localisées et/ou du désordre, nous considérons que les potentiels de chaque site contiennent un terme non-linéaire et que le coefficient des non-linéarités α est identique pour toutes les cellules (il ne dépend de la position dans le réseau).

6.3.1 Diagramme de phase

6.3.1.1 Définition

Dans le cas non-linéaire, une grandeur supplémentaire fait son apparition dans les paramètres à prendre en compte lors de l'analyse des résultats. L'amplitude de l'onde incidente ou transmise par le réseau joue le rôle d'une nouvelle dimension pour l'espace dans lequel la transmission est décrite. Le cas linéaire admet une description dans un plan formé par les fréquences et le coefficient de transmission, alors que l'introduction de non-linéarités oblige l'ajout d'une troisième grandeur (amplitude de l'onde). Nous avons choisi la quantité $|\lambda|T^2$ pour variable indépendante car, comme explicité dans la partie théorique, l'intensité de l'onde transmise T^2 est fixée et le formalisme "matriciel" permet de calculer l'onde incidente correspondante pour déterminer le coefficient de transmission. Lorsque le réseau est ordonné, cette quantité ($|\lambda|T^2$) ne varie pas suivant la position de l'onde. En revanche, pour des milieux désordonnés nous utilisons la valeur moyenne arithmétique de λ_n notée $\overline{\lambda}$ pour que la variable utilisée reste indépendante. Le choix de cette quantité apparaît tout à fait naturellement lors de la mise en place de la simulation car les influences de l'intensité de l'onde transmise et de $\overline{\lambda}$ sont tout à fait similaires sur la transmission.

La notion de diagramme de phase [1] est donc introduite pour décrire la propagation dans un réseau non-linéaire. Nous avons choisi une représentation à deux dimensions dans l'espace constitué par l'intensité ($|\lambda|T^2$) et les fréquences. Pour construire ce diagramme, le coefficient de transmission est déterminé puis comparé à une valeur seuil pour obtenir le régime de la propagation. Lorsque la transmission est possible (coefficient de transmission supérieur à la valeur seuil), un point noir est placé dans le plan intensité-fréquence. A l'inverse, quand le réseau est opaque aux ondes, un point blanc est utilisé.

Donc, pour obtenir le diagramme de phase, il faut préciser l'amplitude de l'onde transmise T^2, le coefficient des non-linéarités α puis calculer, à l'aide de l'opérateur non-linéaire défini dans l'étude théorique, l'intensité de l'onde incidente correspondante. Ainsi, le coefficient de transmission est connu et sa comparaison avec une valeur seuil permet de déterminer le régime de la propagation.

6.3.1.2 Réseaux ordonnés

Les figures (6.6) et (6.7) fournissent les résultats de ces calculs pour deux valeurs seuil différentes (10^{-10} et 0.6) du coefficient de transmission et pour des coefficients de non-linéarités positifs. Ces deux diagrammes représentent le cas d'un réseau régulier et permettent d'illustrer les effets des non-linéarités sur la transmission. A première vue, la présence des non-linéarités détruit la structure de bandes du cas linéaire. Seule la première bande interdite est toujours présente et augmente avec l'amplitude. En ce qui concerne les deux autres, elles disparaîssent complètement sauf pour des valeurs de l'intensité très faibles. Les deux diagrammes présentent les mêmes propriétés générales et la valeur du seuil n'a d'effet que sur la limite faible intensité où le cas linéaire n'est retrouvé que pour un seuil assez grand (0.6).

La largeur des bandes passantes rétrécit avec l'augmentation de l'amplitude de l'onde et finit par disparaître pour une intensité très forte (au dessus de $|\lambda|T^2 = 3$ qui correspond à la zone B). Ainsi, seule une amplitude qui appartient à la zone A engendre une forte augmentation

[1] Le terme de phase doit être compris comme la phase de la propagation, c'est à dire propagative ou évanescente.

de la transparence du milieu en faisant disparaître les deuxième et troisième bandes interdites. Néanmoins, le diagramme met en évidence des "trous" dans la transmission pour des valeurs de la fréquence appartenant sans distinction à des bandes passantes ou interdites du cas linéaire. Les figures (6.8) et (6.9) précisent ces propos en illustrant ce phénomène pour des fréquences appartenant à une bande passante ($Kd = 2.1$) et à une bande interdite ($Kd = 5$) du cas linéaire. Ce comportement de multistabilité s'exprime par l'existence de zones de stabilité, synonyme de transparence, succédant à des régions d'instabilité qui interdisent toute propagation. Dans le cas de fréquences appartenant à des bandes passantes en linéaire, les non-linéarités entraînent des "trous" dans le coefficient de transmission (entre 1.1 et 1.55) et pour des bandes interdites, elles permettent d'augmenter la transparence (entre 0 et 1.5 et entre 2.45 et 2.7) ou de l'interdire (entre 1.5 et 2.45 et pour des valeurs de $|\lambda|T^2$ supérieures à 2.7) successivement.

En outre, la comparaison des résultats de la simulation et de calculs analytiques est possible pour l'approximation basses fréquences. Dans la partie théorique, nous avons étudié le cas non-linéaire pour un réseau ordonné en utilisant l'approximation des grandes longueurs d'ondes. La frontière entre le régime propagatif et évanescent a été déterminée analytiquement et la figure (6.10) montre les résultats de ce calcul pour une valeur positive de α. De même, les résultats de la simulation pour $\alpha \leq 0$ sont présentés sur la figure (6.11). Le comportement général, aux basses fréquences, d'un réseau ordonné comportant des non-linéarités localisées est prédit par la théorie. La transparence d'un tel milieu est, suivant le signe des non-linéarités, soit diminuée ($\alpha \geq 0$), soit augmentée ($\alpha \leq 0$), par la présence de celles-ci.

Ainsi, l'importance du signe de la non-linéarité est démontrée et il apparaît que, pour déterminer les effets de l'introduction de non-linéarités, le signe de la valeur moyenne du produit $\overline{a\lambda}$, où a est donné par la relation (5.12) dans le cas ordonné, est d'une grande utilité. Pour les trois premières bandes passantes et interdites, une loi peut être avancée : pour les valeurs de la fréquence qui vérifient $\overline{a\lambda} \geq 0$, le comportement général du système tend vers un régime propagatif, alors que dans le cas contraire, l'opacité du milieu prend le dessus. Cette loi est vérifiée dans les deux cas présentés pour cette étude.

Donc, l'influence des non-linéarités sur la transmission à travers un réseau ordonné a clairement été mise en évidence par ces résultats analytiques et numériques. La transparence du milieu dépend fortement, à la fois, de l'amplitude de l'onde se propageant, du signe des non-linéarités et de la fréquence de l'onde. Une relation, apparemment simple, semble lier ces trois grandeurs et déterminer les différents régimes lorsque l'intensité des effets non-linéaires n'est pas trop élevée et d'autres phénomènes, comme la multistabilité ou le caractère fractal de ces diagrammes sont visibles grâce à cette simulation.

6.3.1.3 Réseaux désordonnés

L'influence des non-linéarités prend donc largement le dessus sur les effets de périodicité du réseau lorsque la fréquence et le signe des non-linéarités sont adéquats et il devient intéressant d'observer les effets de l'introduction du désordre dans un tel système. Les figures (6.12) et (6.13) présentent les cas d'un désordre paramétrique et géométrique d'écart type 0.1. La différence d'influence entre ces deux types de désordre est évidente : le désordre géométrique a, à l'instar du cas linéaire, un effet beaucoup plus important et dévastateur que le désordre paramétrique. Dans les deux cas, la deuxième bande interdite est largement atténuée par la présence de non-linéarités et la transmission, en général, augmente. Malgré cela, le désordre détruit la structure du cas linéaire en s'attaquant, d'abord, aux fréquences élevées (le désordre géométrique interdit toute propagation pour les ondes dont la fréquence adimensionnée est supérieure à 3). La compétition existe bel et bien entre le désordre et les non-linéarités dans les zones fréquentielles où celles-ci aident la propagation des ondes. Ainsi, pour des désordres de faible importance, le régime de transmission est dicté par les non-linéarités qui prennent le dessus sur tous les autres effets (figure (6.12)). Au contraire, lorsque le désordre est trop important, le milieu reste opaque et les non-linéarités n'y changent rien. Évidemment, les non-linéarités peuvent avoir un effet inverse

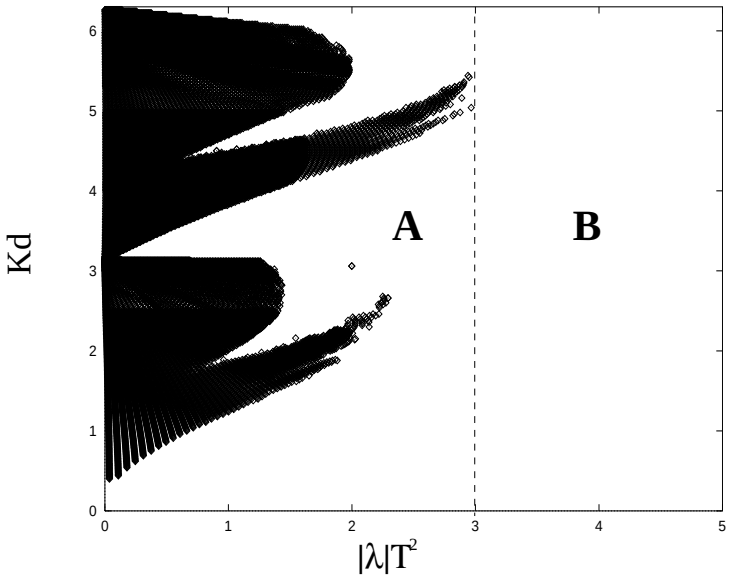

FIG. 6.6 – Diagramme de phase d'un réseau ordonné avec une valeur seuil pour le coefficient de transmission de 10^{-10} et pour des valeurs positives de α. Les parties noire et blanche correspondent respectivement à un régime propagatif et évanescent.

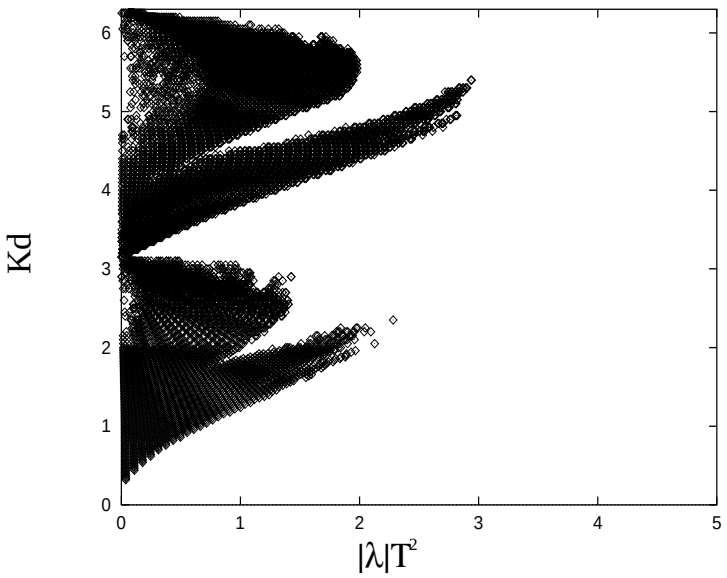

FIG. 6.7 – Diagramme de phase d'un réseau ordonné avec une valeur seuil pour le coefficient de transmission de 0.6 et pour des valeurs positives de α.

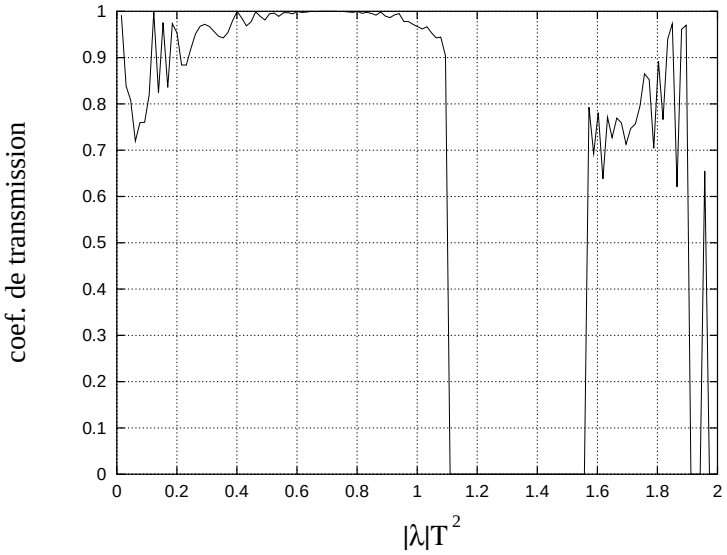

FIG. 6.8 – Coefficient de transmission d'un réseau ordonné en fonction de l'intensité des non-linéarités pour une valeur $Kd = 2.1$ appartenant à une bande passante du cas linéaire.

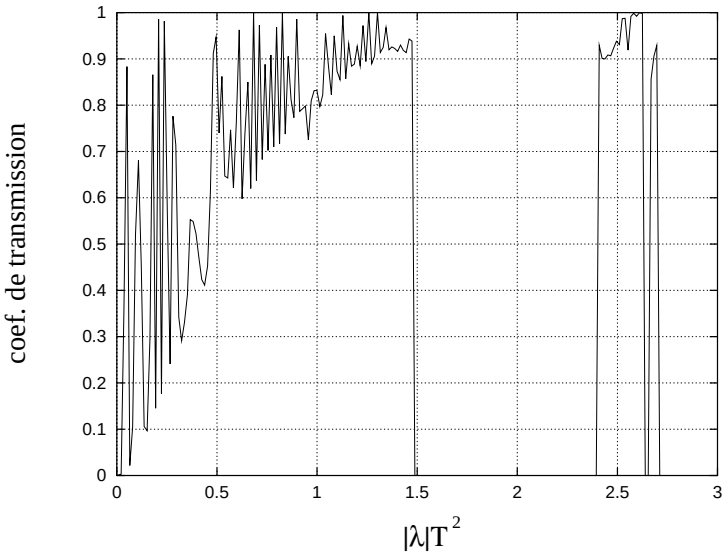

FIG. 6.9 – Coefficient de transmission d'un réseau ordonné en fonction de l'intensité des non-linéarités pour une valeur $Kd = 5$ appartenant à une bande interdite du cas linéaire.

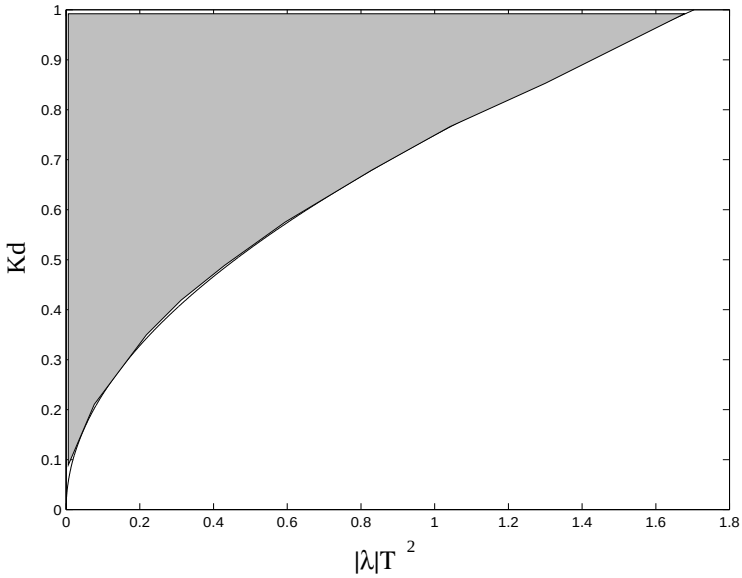

FIG. 6.10 – Frontière entre le régime propagatif et évanescent pour un réseau ordonné. La partie grisée représente le régime propagatif.

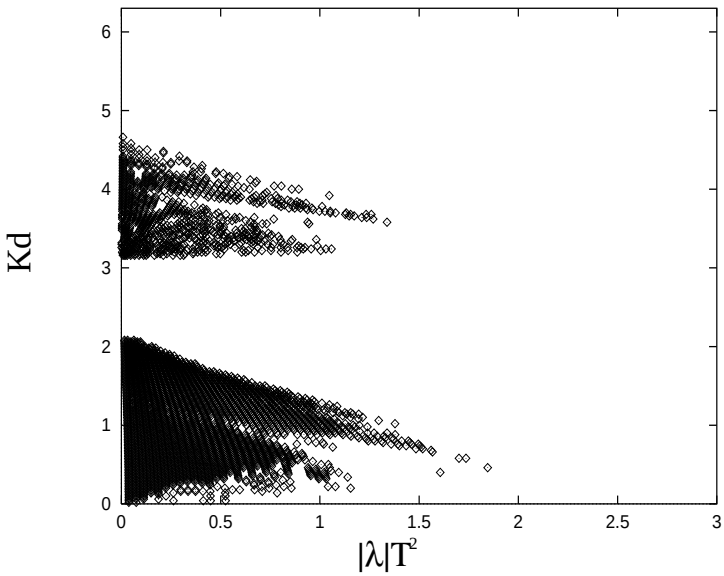

FIG. 6.11 – Diagramme de phase d'un réseau ordonné avec une valeur seuil pour le coefficient de transmission de 0.6 et pour des valeurs négatives de α.

et diminuer la transparence du milieu et l'ajout de désordre pour ces fréquences intensifie le phénomène.

L'influence des non-linéarités sur la transmision à travers un réseau comportant un désordre de faible intensité est donc démontrée. L'aspect fractal des diagrammes de phase est d'ailleurs préservé ce qui gage de l'influence du comportement non-linéaire (figure (6.12)). Par ailleurs, la loi développée dans la partie consacrée au cas du réseau ordonné semble toujours de mise en présence du désordre.

Pour confirmer l'effet des non-linéarités sur la transmission et surtout sur la localisation des ondes, nous avons tracé le comportement spatial du coefficient de transmission dans un réseau comportant un désordre sur les masses ($\epsilon = 10$). La figure (6.14) montre les résultats pour trois valeurs de la non-linéarité. La décroissance exponentielle, présente dans le cas linéaire, n'apparaît plus lorsque le réseau comporte des non-linéarités. La localisation de l'onde est "cassée" et le comportement non-linéaire des résonateurs permet la transmission à travers le réseau. La loi reliant le coefficient de transmission et la longueur de localisation est devenue une loi de puissance qui peut se mettre sous la forme (Cota et *al* 1995 [58]) :

$$|\mathcal{T}| \sim L^{1/\xi}$$

où L et ξ représentent respectivement la longueur du réseau et la longueur de localisation. En outre, la transparence augmente avec l'intensité puisque le coefficient de transmission se rapproche de la valeur unitaire pour les grandes amplitudes ($\alpha = 10$).

Cette dernière figure confirme l'effet non négligeable que présente l'ajout de non-linéarités dans un réseau désordonné. Leur présence agit comme un facteur de délocalisation lorsque la fréquence de l'onde et le signe des non-linéarités sont appropriés.

Malgré cette remarque, l'intensité du désordre joue le rôle le plus important et elle représente le premier facteur à prendre en compte lors d'une analyse. La présence d'un fort désordre (écart type important) empêche la propagation et localise toutes les ondes. Seul le cas d'un désordre d'intensité faible permet aux non-linéarités de jouer un rôle sur la transmission.

Néanmoins, il est dommageable que la seule grandeur à notre disposition pour déterminer le régime de propagation en présence ou non de non-linéarités et de désordre soit le coefficient de transmission. En effet, cette grandeur ne permet d'appréhender que sa transmission finale et non le comportement de l'onde à l'intérieur du réseau. L'influence de l'introduction du désordre ou des non-linéarités ne peut être analysée que d'une façon globale et les phénomènes physiques qui en découlent sont invisibles ou difficilement observables. C'est le cas de la multistabilité qui apparaît lorsque le comportement non-linéaire est pris en compte. De même, les effets du désordre dans les zones stables (propagatives) ou instables (évanescentes) ne peuvent être déterminés à l'intérieur du réseau.

C'est pour répondre à ces questions qu'une analyse fondée sur une approche dynamique du système a été menée. La description de la propagation dans un plan de phase, par l'intermédiaire des sections de Poincaré, donne accès au comportement de l'onde à l'intérieur du réseau et permet d'observer les effets induits par le désordre.

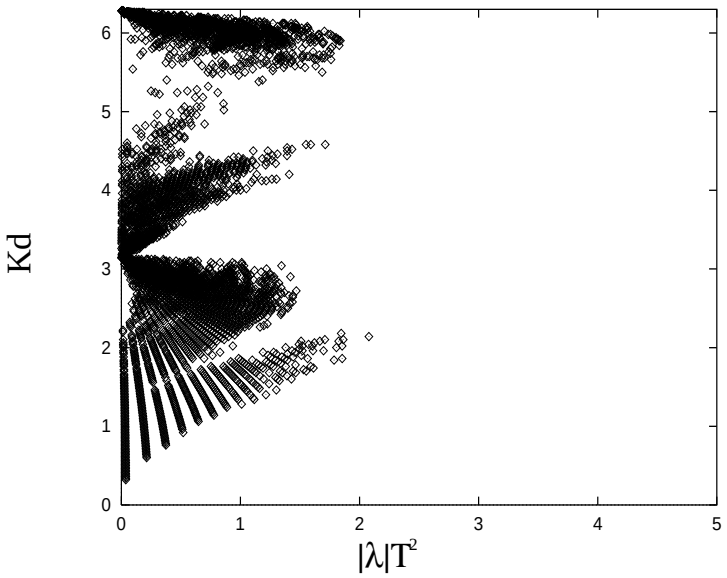

FIG. 6.12 – Diagramme de phase d'un réseau comportant un désordre de masse d'écart type 0.1 avec une valeur seuil pour le coefficient de transmission de 0.6 et pour des valeurs positives de α.

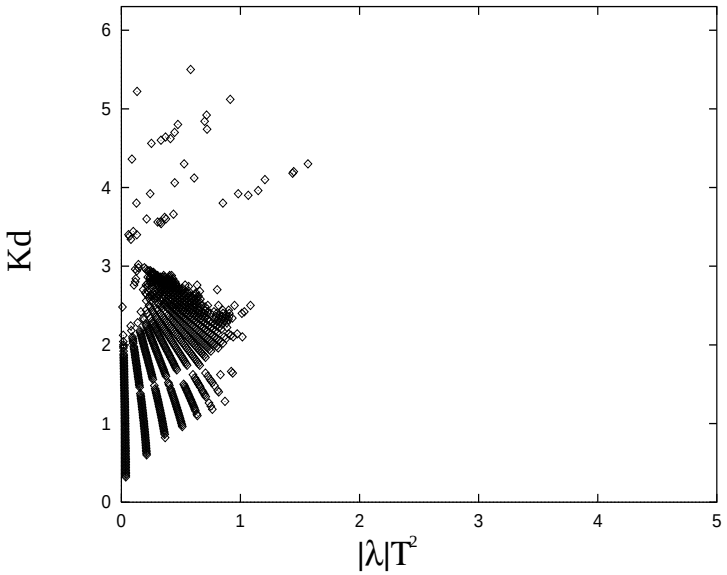

FIG. 6.13 – Diagramme de phase d'un réseau comportant un désordre de distance d'écart type 0.1 avec une valeur seuil pour le coefficient de transmission de 0.6 et pour des valeurs positives de α.

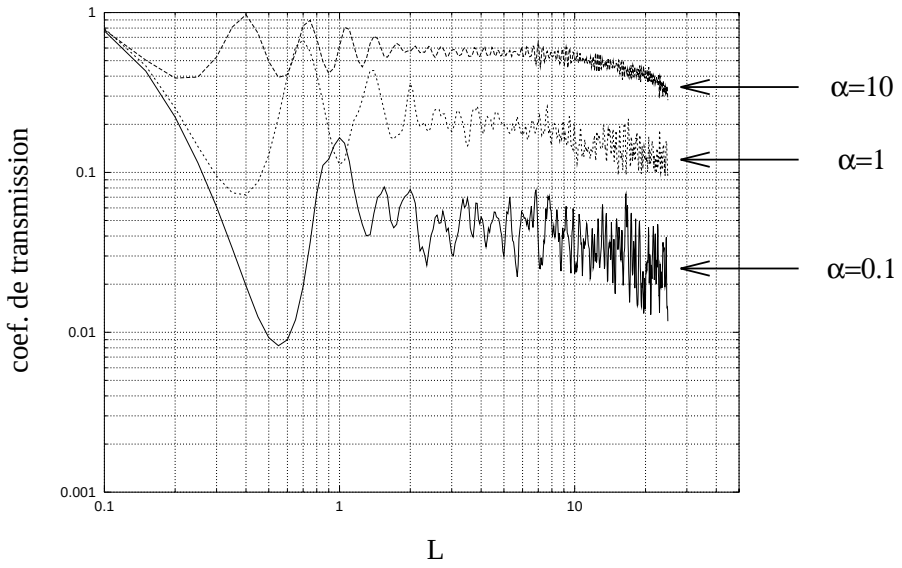

FIG. 6.14 – Coefficient de transmission en fonction de la longueur du réseau pour un réseau comportant un désordre de masse ($\epsilon = 10$), pour des valeurs du coefficient des non-linéarités de 0.1, 1 et 10 et pour une valeur de $Kd = 2.4$ appartenant à une bande interdite du cas linéaire.

6.3.2 Section de Poincaré

Toutes les représentations présentées dans ce paragraphe sont issues des calculs explicités dans la partie théorique consacrée à l'étude dynamique du système. Le système $\mathcal{H}$ (système 2.39) est utilisé pour construire les sections de Poincaré pour deux exemples distincts de propagation. Le premier traite d'une onde dont la fréquence appartient à une bande passante du cas linéaire et montre les effets de la présence des non-linéarités. Le deuxième étudie le cas d'une onde appartenant à une bande interdite du cas linéaire et illustre les effets de l'injection d'un désordre faible dans le réseau. Les phénomènes de bistabilité et de multistabilité sont clairement mis en évidence et des bifurcations entraînant un changement de régime de propagation sont signalées.

La figure (6.15) présente le résultat pour une onde se propageant dans un réseau ordonné avec une fréquence $Kd = 4.21$ (bande passante du cas linéaire). Les courbes ou orbites (lorsqu'elles sont fermées sur elles-mêmes) sont obtenues pour différentes valeurs de $|\lambda|T^2$ et représentent chacune la propagation d'une onde à travers le milieu. Pour de faibles intensités, les courbes à gauche de la figure sont fermées ce qui témoigne d'un comportement périodique ou quasi-périodique synonyme de propagation. A partir d'une valeur de $|\lambda|T^2 \simeq 0.7$, ces orbites manifestent un comportement instable et n'affichent plus de périodicité (les points sont repartis aléatoirement). Cette zone ($0.7 \leq |\lambda|T^2 \leq 0.9$) correspond à un "trou" dans la transmission et représente un régime évanescent. Puis, les courbes retrouvent un comportement périodique avec une période double (deux bassins d'attractions sont présents et sont signalés par des flèches) ce qui témoige de l'existence d'une bifurcation lors de la zone instable de la propagation située entre les deux zones propagatives. Cette bifurcation a permis, après un bref intermède instable, de ramener le régime de propagation vers une région stable. Le doublement de la période est le gage d'un tel phénomène (Bergé et *al* [80]) et permet de souligner le changement de comportement du système. Finalement, la transmission devient instable et l'opacité du système reprend le dessus inexorablement. Le phénomène décrit par cette figure montre qu'une région stable dans le cas linéaire peut devenir instable et donc non propagative en présence de non-linéarités lorsque l'intensité devient grande. Elle rejoint la figure (6.8) qui illustre le même phénomène pour une fréquence différente. Mais la description à l'aide des sections de Poincaré possède une dimension supplémentaire qui est d'illustrer les phénomènes internes au réseau. De plus, le doublement de la période des sections de Poincaré prévient de l'éminente instablité du régime de propagation car une succession de bifurcations (illustrées par des changements de période) est généralement synonyme de l'arrivée d'un zone d'instabilité.

La figure (6.16a) illustre, pour sa part, le cas d'une onde appartenant à une bande interdite en linéaire ($Kd = 2.5$). La présence des non-linéarités permet, à l'inverse de l'exemple précédent, de transformer des orbites divergentes (en linéaire) en des courbes fermées et d'engendrer une possible propagation. Les orbites périodiques stables de période unitaire sont entourées de courbes présentant une périodicité quatre fois plus grande. Ce changement brusque séparé par un "trou" dans la transmission précède généralement une perte irrémédiable de la stabilité qui interdit toute propagation. On remarque en étudiant d'autres exemples que plus le changement de période est important, plus le régime de propagation suivant est chaotique et instable. De nombreuses études montrent que la succession de plusieurs bifurcations conduit, dans la plupart des cas, à une perte de la stabilité pour le système et à une opacité complète dans le cas que nous étudions.

L'introduction d'un faible désordre de masse (d'écart type $1/\epsilon = 0.01$) dans le réseau engendre, comme le souligne la figure (6.16b), un étalement des courbes autour de leurs valeurs dans le cas ordonné. La structure est toujours visible mais elle est rendue floue par la présence du désordre. Ainsi, la transmission est perturbée mais n'est pas impossible. Ce phénomène rejoint notre première analyse qui concluait à une possible transmission dans les bandes interdites grâce aux non-linéarités lorsque l'importance du désordre n'est pas trop grande. L'illustration au moyen des sections de Poincaré témoigne du caractère perturbatoire que représente un faible désordre sur le cas ordonné ce qui permet de diriger les recherches futures vers ce type de raisonnement. En outre, nous avons observé, au moyen de la simulation développée, que les orbites, dans le

cas d'un faible désordre, perdaient beaucoup plus facilement leur stabilité lors d'un changement d'intensité. Cette remarque nous encourage donc à ne jamais négliger le rôle, même s'il est très faible, de la présence de désordre dans un milieu quel qu'il soit.

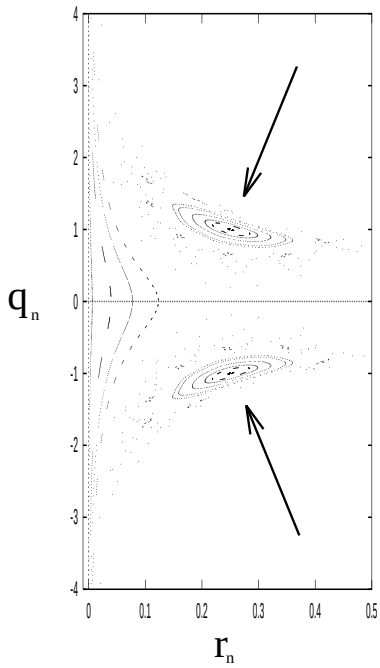

FIG. 6.15 – Sections de Poincaré de la propagation à travers un réseau ordonné pour une fréquence $Kd = 4.21$ et obtenues pour différentes valeurs de $|\lambda|T^2$.

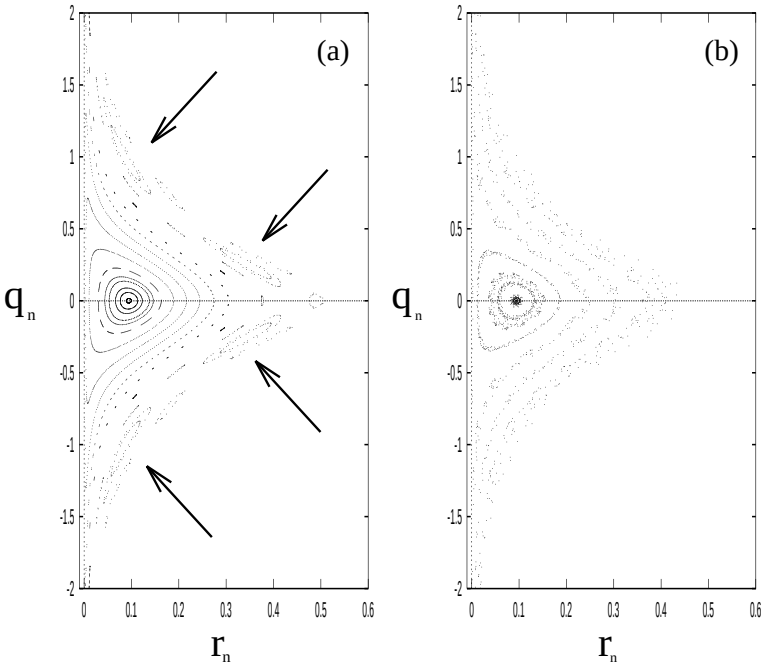

FIG. 6.16 – (a) Sections de Poincaré de la propagation à travers un réseau ordonné pour une fréquence $Kd = 2.5$. (b) Sections de Poincaré de la propagation à travers un réseau faiblement désordonné pour une fréquence $Kd = 2.5$.

Chapitre 7

Conclusion

Cette étude numérique a mis en évidence plusieurs aspects très intéressants de la propagation dans les réseaux. Lorsque le cas linéaire est traité, la simulation et l'analyse du coefficient de transmission permettent de différencier plusieurs sortes de désordre qui ont des effets, certes similaires, mais assez éloignés en terme d'importance. Le désordre sur les masses (paramétrique) augmente l'opacité du milieu mais de façon bien moindre (à importance égale) que le désordre sur les distances (géométrique). La longueur de localisation illustre aussi ce phénomène, et la dépendance exponentielle du coefficient de transmission à cette longueur est clairement montrée. La localisation d'Anderson se manifeste par la diminution des largeurs des bandes passantes du cas ordonné qui suivant l'importance du désordre peuvent disparaître (les hautes fréquences sont touchées en priorité).

Quand des non-linéarités localisées sont présentes à tous les noeuds du réseau, la transmission du milieu en est fortement changée. La transparence, pour un réseau ordonné, est largement renforcée dans certaines plages de fréquence et de nombreuses bandes interdites disparaîssent. Suivant l'amplitude des ondes, le coefficient de transmission fait apparaître plusieurs régimes propagatifs avec des propriétés différentes. Ce phénomène est illutré grâce à la détermination des sections de Poincaré qui exhibent des mouvements quasi-périodiques ayant des périodes différentes suivant l'amplitude des vibrations. Ce type de cas apparaît pour une fréquence qui appartient à une bande interdite du cas linéaire : cette onde se propage, aidée par la présence des non-linéarités. L'apparition du désordre dans ce genre de réseau, affaiblit l'influence des non-linéarités sur la transmission et les propriétés soulignées dans le cas ordonné semblent disparaître. Quoi qu'il en soit, une compétition entre les effets du désordre et ceux des non-linéarités est engagée : la localisation d'Anderson, lorsque le désordre n'a pas une trop grande importance, est largement diminuée par les non-linéarités. L'observation de la dépendance du coefficient de transmission à la longueur de localisation en témoigne : une loi de puissance semble lier les deux grandeurs ce qui démontre une faible localisation. En revanche, lorsque le désordre est trop important, la localisation reprend le dessus et l'opacité du milieu est renforcée quelle que soit l'amplitude de l'onde.

Pour parfaire cette étude "théorique" de l'influence des non-linéarités localisées sur la transmission à travers un réseau comportant ou non du désordre, nous proposons dans la partie suivante d'étudier expérimentalement la propagation d'une onde acoustique à travers un réseau, composé d'un tube chargé par des résonateurs de Helmholtz. Les résonateurs présentent des propriétés non-linéaires lorsque l'amplitude de l'onde est importante. Les résultats expérimentaux illustrent les effets de ces non-linéarités sur la transmission et montrent leurs influences sur la localisation.

Troisième partie

Etude expérimentale

Chapitre 8

Introduction

L'étude expérimentale de la propagation dans des réseaux unidimensionnels a fait l'objet depuis de nombreuses années d'un certain nombre d'articles traitant tour à tour de la propagation d'ondes électroniques, d'ondes acoustiques, d'ondes mécaniques (par exemple, propagation dans les cristaux ou le long d'une corde vibrante), d'ondes électromagnétiques et finalement d'ondes lumineuses. En effet, de nombreux phénomènes physiques peuvent s'expliquer en terme de localisation (notamment en physique quantique, voir Thouless 1974 [55]). C'est le cas, par exemple, de la conductivité dans les semi-conducteurs (Voisin et *al* [93]) ou de la transition isolant-métal dans les fines couches métalliques (Thomas 1986 [94]). Les particules qui occupent des états localisés (on parle d'états localisés en physique quantique) sont restreintes à des régions bornées de l'espace. Elles ne peuvent donc pas contribuer au transport à la température $T = 0$ K (zéro absolu) quand les différents couplages sont négligeables. En conséquence, si il n'y a que des états localisés, le système est isolant (la conductivité est nulle). A l'inverse, quand l'énergie appartient à une région où les fonctions d'onde sont étendues, la conductivité est non nulle et le système devient conducteur. En physique quantique, d'autres sujets d'étude comme la transition de Anderson (Thomas 1986 [94]), la fluctuation de la conductance, la faible localisation ou l'existence d'états localisés en présence d'un champ magnétique, sont aussi abordés en terme de localisation.

De même, les ondes classiques, comme les ondes électromagnétiques (van Albada et *al* 1991 [95], Das Sarma et *al* 1986 [96]), les ondes acoustiques (Cowan et *al* 1998 [97], Macon et *al* 1991 [98], Depollier et *al* 1986 [23]) ou les ondes mécaniques (Ibrahim 1987 [99], Santos et *al* 1990 [100], Hodges et Woodhouse 1983 [101]), exhibent de nouveaux comportements liés à la localisation (Soukoulis et *al* 1994 [102]). Les expériences sur la diffusion de la lumière (voir van Albada et *al* 1991 [103] et les références dans Economou 1990 [104]) ont montré l'existence de la localisation pour les ondes classiques. Ainsi, les ondes de surface sur l'eau, diffractées par une assemblée de diffuseurs (figure 8.1), subissent les effets de ce phénomène (Lindelof et *al* 1986 [105]). La propagation à travers un réseau acoustique formé d'un tube chargé par des résonateurs a aussi été étudiée expérimentalement (Depollier et *al* 1986 [23]). Et, de nombreux articles abordant la propagation le long d'une corde chargée par des masses et qui mettent clairement en évidence le phénomène de localisation sont apparus dans la littérature (Hodges et Woodhouse 1983 [101], Shanker et *al* 1985 [106], He et Maynard 1986 [107], Santos et *al* 1990 [100], Parmley et *al* 1995 [108]).

Cette partie s'inscrit dans la continuité de tous ces travaux puisque qu'elle est consacrée à une analyse expérimentale de la propagation des ondes dans des réseaux unidimensionnels comportant du désordre et/ou des non-linéarités. Mais, à l'inverse de la propagation dans les milieux désordonnés, l'étude expérimentale de l'influence des non-linéarités sur la propagation dans les réseaux n'est pas courante dans la littérature et de nombreuses interrogations restent encore sans réponse. Seuls quelques articles abordent la possible présence de non-linéarités dans un milieu désordonné de façon expérimentale.

Par exemple, la propagation d'une onde le long d'une corde chargée par des masses a été étu-

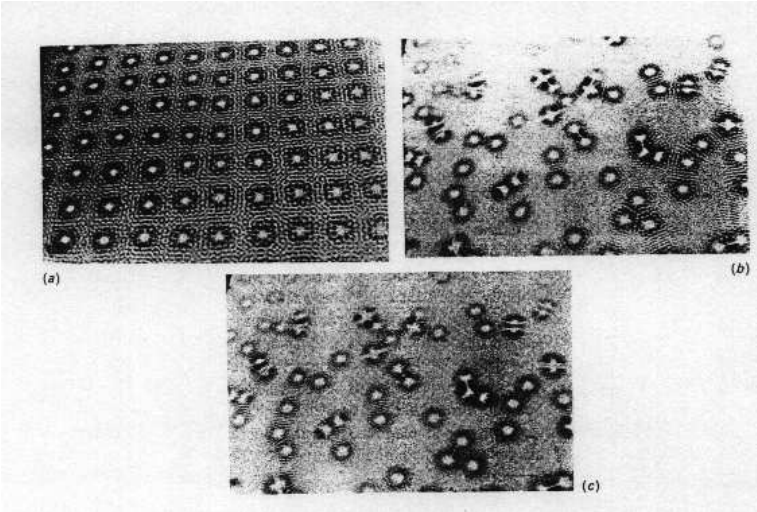

FIG. 8.1 – Exemple de localisation à 2 dimensions. Diffusion d'une onde de surface sur l'eau par une assemblée de diffuseurs placés régulièrement ou aléatoirement (Lindelof et *al* 1986 [105]).

diée en tenant compte du comportement non-linéaire des vibrations (McKenna et *al* 1992 [109]). De même, la propagation des ondes de surface non-linéaires sur un film d'Hélium superfluide (Mc Kenna et *al* 1994 [110], Hopkins et *al* 1996 [111]) a fait l'objet de travaux expérimentaux. Les conclusions sont identiques : la présence de non-linéarités n'influence ni même n'atténue la localisation due au désordre du milieu. Récemment, ces mêmes sujets ont été abordés de façon différente en séparant deux sortes de propagation : le cas de la propagation d'une fréquence sinusoïdale pure ou le cas d'une "impulsion" non-linéaire (Hopkins et *al* 1998 [3]). Toutefois, les thèses prédisant la survie de la localisation à la présence de non-linéarités dans le milieu sont confortées par ces études.

Malgré ces résultats, quelques travaux prédisent théoriquement que l'influence des non-linéarités peut être un facteur de délocalisation (Cota et *al* 1995 [58], Kivshar et *al* 1990 [2]) et une étude expérimentale de la propagation d'ondes électromagnétiques dans un billard chaotique a montré une déviation de la localisation sous l'influence de non-linéarités (Kudrolli et *al* 1995 [112]).

En traitant le cas de la propagation d'une fréquence sinusoïdale pure, ce travail expérimental essaie d'apporter des réponses claires et précises pour valider l'étude théorique sur laquelle sont basées les différentes méthodes de résolution développées dans la partie théorique.

Nous avons choisi d'étudier la propagation d'une onde acoustique à travers un réseau formé d'un tube chargé par des résonateurs de Helmholtz. Les résonateurs de Helmholtz sont caractérisés par un comportement fortement non-linéaire autour de leur fréquence de résonance. Un modèle analytique a été développé pour prendre en compte, dans les résultats théoriques, ces non-linéarités et le comportement non-linéaire d'un résonateur est mis en évidence expérimentalement. Les non-linéarités ne sont donc pas présentes tout au long du spectre et seul un petit domaine de fréquences (autour de la résonance de Helmholtz) subit leur influence. Nous nous contenterons d'étudier le comportement de la transmission à travers un réseau désordonné sur cette plage de fréquences. Les résultats de cette étude expérimentale pourront ainsi être confrontés aux conclusions des analyses théoriques s'appuyant, pour certaines, sur une simulation numérique.

Par ailleurs, une méthode de traitement de signal, basée sur une analyse temps-fréquence (transformée de Fourier à court terme et distribution de Wigner-Ville), a été développée et son application est mise en œuvre pour étudier la propagation acoustique dans les réseaux. Elle permet de mettre en évidence la dispersion d'un tel milieu et de mesurer la vitesse de propagation de l'onde à l'intérieur du réseau. De plus, le comportement non-linéaire des résonateurs est

explicitement mis en évidence grâce à cette approche.

Les résultats des différentes expériences sont comparés avec la théorie pour valider celle-ci et faire ressortir les phénomènes physiques principaux mis en jeu dans ce type de propagation. Enfin, l'influence des non-linéarités sur la localisation est abordée au moyen d'une mesure de la longueur de localisation dans le cas non-linéaire : il est clairement montré que la présence de non-linéarités dans le réseau atténue les effets du désordre lorsque celui-ci n'est pas trop important. Donc, la compétition entre les effets des non-linéarités et ceux du désordre est mise en évidence expérimentalement.

Chapitre 9

Description du dispositif expérimental et des méthodes de traitement des données

9.1 Le dispositif expérimental

9.1.1 Introduction

Plusieurs solutions peuvent être envisagées pour appréhender expérimentalement les phénomènes de localisation pour les ondes classiques. Notre choix initial a porté sur l'étude de la propagation d'une onde transversale le long d'une corde chargée par des systèmes masse-ressort car cette solution a l'avantage d'être facile à mettre en oeuvre et de rejoindre le cas théorique traité dans la deuxième partie. Les non-linéarités d'une telle propagation ne sont pas apparues de la forme attendue (la forme cubique de la non-linéarité d'un ressort n'est pas évidente) mais ce problème peut facilement être contourné[1]. En revanche, une source de vibrations très robuste est indispensable pour atteindre le régime suffisant ce qui n'était pas envisageable dans le cadre de ce travail [2]. Cette solution a pourtant été mise en œuvre mais un autre inconvénient s'est révélé lors de son utilisation : comment détecter avec précision les mouvements de la corde ?

Plusieurs dispositifs ont été alors développés pour résoudre ce problème et différents détecteurs testés :

- microphone capacitif basé sur l'induction que génère le mouvement de la corde dans un champ électrique,
- vibromètre laser dont l'avantage est de permettre un accès direct au champ de déplacement de la corde
- capteur optique mis au point pour cette étude qui utilise une cellule photovoltaïque capable de générer un courant proportionnel à la zone éclairée.

L'utilisation d'un microphone capacitif a donné des résultats encourageants. Mais ce système fournit un signal proportionnel à la vitesse de vibration de la corde et non à son déplacement. Ainsi, lors d'une propagation dans un régime non-linéaire, le déplacement de la corde qui est une grandeur indispensable pour cette étude, ne peut être déterminé expérimentalement. Par ailleurs, un problème lié à la dynamique du signal est très vite apparu et a semblé insurmontable : plus la fréquence est élevée, plus la vibration de la corde est petite ce qui empêche la comparaison de deux zones spectrales distinctes. En effet, les limites dynamiques des capteurs sont très vite atteintes et malgré l'utilisation de trois sortes de capteurs, les résultats n'ont jamais été satisfaisants. Les inconvénients étaient donc trop nombreux pour espérer obtenir des résultats comparables à la

[1] L'association de deux ressorts engendre une force qui dépend du cube de l'amplitude des vibrations.

[2] De nombreux autres détails tels que le mouvement non plan de la corde pour de fortes amplitudes n'ont pas permis une étude approfondie de cette expérience.

simulation, c'est pourquoi une approche expérimentale différente a été choisie.

La deuxième solution fut d'étudier la propagation d'une onde acoustique à travers un tube chargé par des résonateurs. Cette solution a l'avantage d'utiliser le savoir faire du laboratoire de l'université du Maine en ce qui concerne la propagation acoustique et d'avoir, en partie, été mise en oeuvre pour une autre étude sur la propagation dans des réseaux désordonnés dans ce même laboratoire (Depollier 1989 [54]). De plus, le signal pertinent pour cette étude est directement accessible grâce à un microphone (mesurant la pression) et la comparaison avec les résultats théoriques est simple et immédiate. Bien entendu, certains inconvénients technologiques (tels que la possibilité de fuites acoustiques ou le nombre important de résonateurs) entraînent une mise en oeuvre délicate mais largement envisageable. En outre, cette étude porte sur l'influence des non-linéarités sur la localisation de Anderson et la possibilité de disposer d'intensités importantes est indispensable. Les moyens dont dispose le laboratoire proposent des solutions à ce problème (une source à forts niveaux a spécialement été conçue dans le laboratoire pour ce type de recherche).

9.1.2 Description du dispositif

9.1.2.1 Le tube

Le dispositif expérimental utilisé se compose d'un tube de Plexiglas de 8 m de long, de diamètre intérieur 5 cm et d'épaisseur 5 mm. Tous les 10 cm, un résonateur est placé en dérivation sur ce tube pour former un réseau sur une longueur de 6 m (60 résonateurs). La fréquence de coupure d'un tel tube est

$$f_c = \frac{\gamma_{01} c}{2\pi r_0} \simeq 4000 \text{ Hz},$$

où $\gamma_{01} = 1.84$ est le premier zéro de la dérivée de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre un. Les fréquences des ondes étudiées ne dépassent pas 2500 Hz ce qui permet de considérer la propagation d'ondes planes entre deux dérivations. Ainsi, le formalisme matriciel peut être utilisé pour décrire la transmission à travers le réseau. La fréquence de résonance du premier mode de vibration du tube "in vacuo" se situe aux alentours de 50 Hz [3] ce qui ne gêne pas les mesures puisqu'elles ne débutent qu'à partir de 100 Hz. Le tube se termine par une sortie dite "anéchoïque" constituée d'un bouchon de mousse qui empêche, pour des petites longueurs d'onde, une réflexion totale.

9.1.2.2 Les dérivations

Chaque dérivation est un résonateur de Helmholtz, constitué d'un col de 2 cm de long et de 5 mm de diamètre et d'un volume cylindrique de hauteur maximum 16.5 cm et de diamètre 5 cm (figure (9.1)). La hauteur des volumes est réglable grâce à un piston permettant d'avoir à disposition 60 résonateurs intrinsèquement différents. Le désordre est introduit par cet intermédiaire dans le réseau : chaque hauteur est tirée au moyen d'un programme informatique en utilisant une distribution normale, elle est ensuite reproduite expérimentalement (l'écart type et la valeur moyenne sont connus). Les fréquences de résonance d'un tel résonateur sont nombreuses. La première est due à la résonance de Helmholtz qui est donnée par la relation (en approximation linéaire) :

$$f_0 = \frac{s_d c^2}{2\pi V_0 L}$$

où c, s_d, V_0 et L sont respectivement la vitesse du son, la section du col, le volume de la cavité cylindrique et la longueur du col. Cette résonance se situe, pour un volume maximum correspondant à une hauteur de 16.5 cm, autour de 300 Hz. Une deuxième résonance, qui apparaît vers 1200 Hz, est le résultat de la présence d'une cavité cylindrique dans le système constituant le résonateur (pour plus de détails, se reporter à l'étude expérimentale d'un résonateur).

[3] Cette valeur a été obtenue à partir des travaux de W. Soedel (Soedel 1980 [113]) avec des conditions aux limites du type appuyé-appuyé.

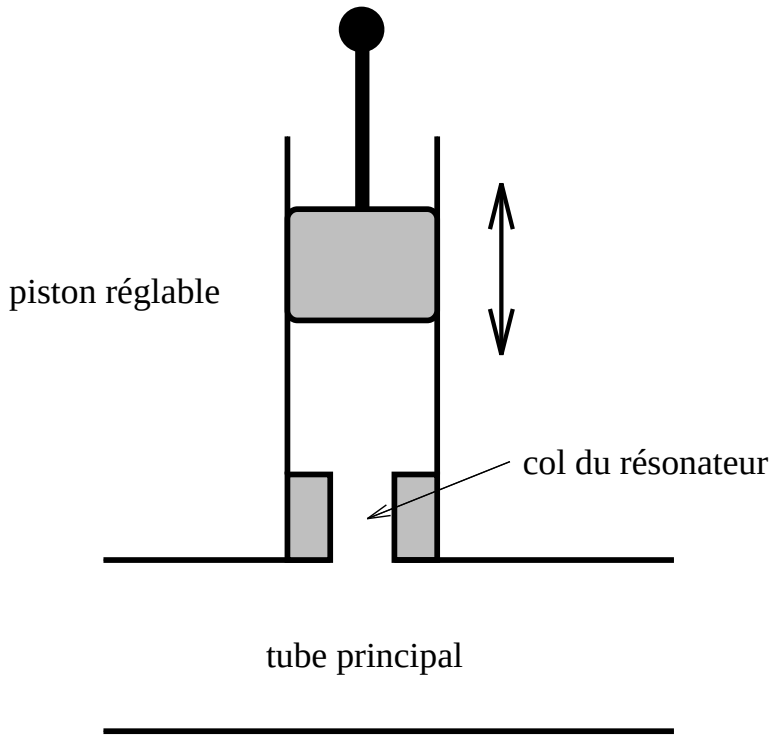

FIG. 9.1 – Schéma du résonateur de Helmholtz dont le volume peut être ajusté suivant les besoins de l'expérience.

9.1.2.3 La source

A une des extrémités, une source est fixée au tube en évitant le plus soigneusement possible les fuites acoustiques et les transmissions de vibrations solidiennes (un morceau de caoutchouc sert de gaine entre la source et le tube). Plusieurs sources acoustiques sont à disposition suivant l'étude qui est menée :

- une source à bas niveaux pour des signaux linéaires
- une source à forts niveaux pour mettre en évidence les non-linéarités.

Cette dernière, spécialement conçue pour un banc de mesure du laboratoire de l'université du Maine, est capable de générer un signal sinusoïdal d'un niveau supérieur à 120 dB sur la bande de fréquence 40 Hz-1000 Hz et supérieur à 145 dB sur la bande de fréquence 40 Hz-500 Hz.

9.1.2.4 Les microphones

Des microphones différents sont utilisés lors de l'étude expérimentale :

- des microphones Brüel et Kjaer (1/4 de pouce) ou PCB 116B pour la mise en évidence des effets non-linéaires car ils supportent des niveaux très élevés [4] (jusqu'à 160 dB)
- des microphones Sennheiser KE4 qui, grâce à leur petite taille, sont introduits dans le tube pour y mesurer le champ acoustique sans trop le perturber.

Pour effectuer des mesures précises du champ acoustique à l'intérieur du tube (les microphones KE4 sont très pratiques mais sont d'une précision tout à fait relative), deux porte-microphones à chaque extrémité du réseau sont utilisés. Ils se composent d'un trou taraudé, permettant de visser le microphone et d'éviter les fuites, et d'une cavité cylindrique de diamètre 1.4 cm et de hauteur 8 mm, fermée en sa partie supérieure par la membrane du microphone. Un canal, long de 3 mm et de diamètre 2 mm relie le tube principal à cette cavité ce qui constitue un résonateur de Helmholtz dont la fréquence de résonance se situe autour de 10 kHz, de telle sorte que son effet

[4] Il faut noter que les microphones BK, à la différence des PCB 116B, peuvent mesurer des signaux de faible intensité (60 dB) et sont donc les plus souvent utilisés.

reste négligeable aux fréquences utilisées. Ce dispositif évite de perturber le champ à l'intérieur du tube et permet un équilibrage des pressions entre le tube et le microphone. Par ailleurs, ces porte-microphones sont amovibles pour permettre un réglage de leurs positions lors de la mesure. Ceci constitue un élément très important pour la mesure des coefficients de transmission.

9.1.2.5 Le système d'acquisition

La source et chaque microphone sont reliés à un système d'acquisition de type H.P. 3566/67 A piloté par un PC (voir figure (9.2)). Cet appareil est un analyseur multivoies (6 voies) et permet, grâce à un logiciel de traitement par FFT (Fast Fourier Transform), d'obtenir les fonctions de transfert entre les différents microphones. Cet analyseur pilote la source alimentée par un signal de type sinus dont la fréquence varie par pas fixe dans une bande de choisie (sinus glissant linéaire). Ainsi, il est possible d'obtenir, lorsque quatre microphones sont utilisés (c'est le maximum dans cette étude), trois fonctions de transfert sur une plage de fréquence quelconque. Ce système est utilisé pour déterminer le coefficient de transmission du réseau dans le cas linéaire.

Pour l'étude de la propagation en régime non-linéaire, le dispositif pour déterminer les coefficients de transmission et de réflexion ne peut être utilisé (la notion de fonction de transfert n'a pas de sens en régime non-linéaire). Une autre dispositif d'acquisition est mis en place, qui permet de prendre en considération l'énergie de l'onde initiale (fondamental) transférée sur des harmoniques supérieurs par les non-linéarités. Le signal source utilisé est un sinus pur qui génère une réponse du système pour chaque fréquence. Afin de simplifier l'étude, nous avons choisi de travailler avec un "sinus glissant" ou une "impulsion" qui, alliés avec un traitement numérique du signal, permet de déterminer l'énergie de l'onde acoustique en fonction de la fréquence et du temps.

Les méthodes de traitement du signal utilisées sont explicitées dans la section suivante. Les résultats de ce traitement sont ensuite analysés dans le plan temps-fréquence où des grandeurs pertinentes sont isolées. Le matériel informatique pour ces mesures est composé d'une machine Concurrent Computer Corporation (Maxion) de grosse capacité pouvant stocker les fichiers temporels. Un programme informatique a été développé au laboratoire, dans le cadre d'une autre étude, par J. Picaut pour obtenir des signaux temporels synchrones entre eux et avec la source. Pour cette étude, seuls deux microphones sont nécessaires et ils sont disposés dans les porte-microphones situés de part et d'autre du réseau. Les signaux temporels de chaque microphone sont ensuite traités grâce à un programme écrit en Fortran et utilisant des procédures ILS développé par J. C. Valière.

9.2 Mesure des coefficients de transmission et de réflexion

De nombreuses procédures expérimentales permettent d'accéder aux paramètres caractéristiques des biportes acoustiques. Pour plus de détails, l'article de M. Abom résume, de façon exhaustive, le travail effectué dans ce domaine de recherche (voir Abom 1991 [114]). Dans un premier temps, quelques explications théoriques sont nécessaires pour aborder la méthode expérimentale en elle-même. La mesure de différentes grandeurs nécessaires est ensuite explicitée et les incertitudes correpondantes sont calculées.

9.2.1 Calcul des coefficients de transmission et de réflexion

Un biporte acoustique est un système quelconque placé entre deux tuyaux droits dans lesquels se propagent des ondes planes. Les deux quantités p^+ et p^- (pression des ondes aller et retour) caractérisent l'état acoustique dans chacun des tubes. Ainsi, l'élément entre ces deux tubes peut être décrit par une relation matricielle liant les pressions des ondes "entrant" dans le biporte aux

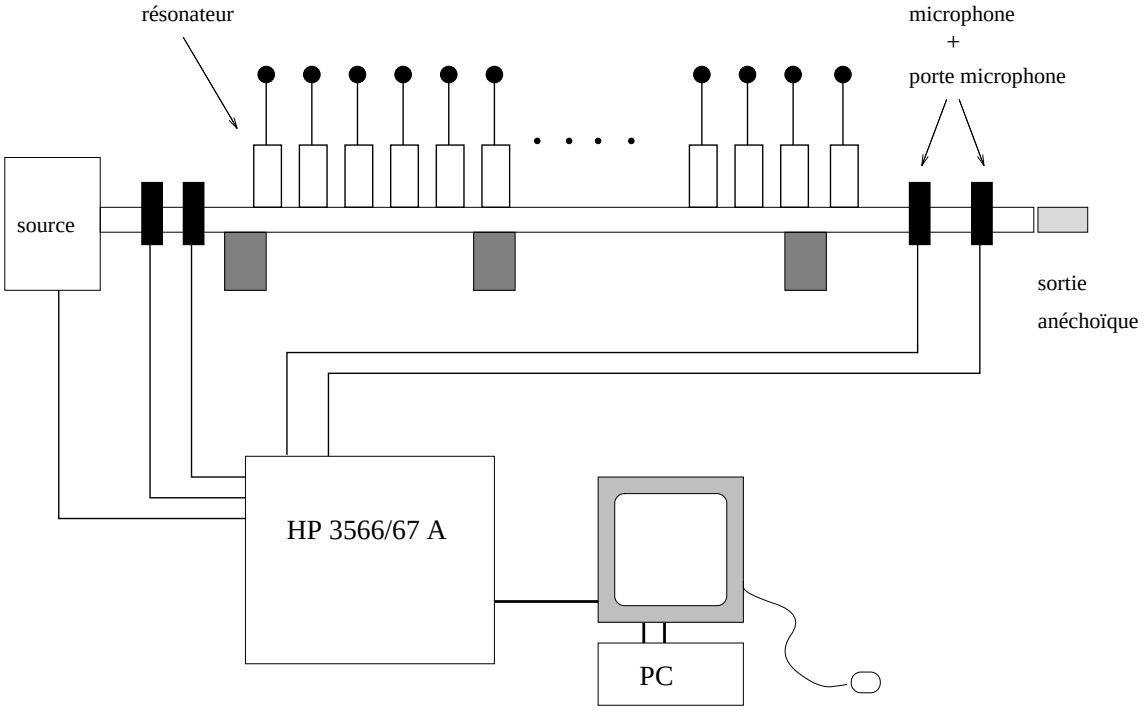

FIG. 9.2 – Dispositif expérimental pour déterminer les coefficients de transmission et de réflexion du réseau.

ondes "sortant" du biporte :

$$\begin{bmatrix} p_2^+ \\ p_1^- \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} p_1^+ \\ p_2^- \end{bmatrix} \tag{9.1}$$

où les indices 1 et 2 désignent respectivement l'entrée et la sortie du biporte et où S est une matrice 2x2 appelée matrice de transfert. Les coefficients de cette matrice dépendent de la géométrie du biporte, de la fréquence acoustique et éventuellement d'autres grandeurs (par exemple de l'écoulement).

Le système étudié est représenté sur la figure (9.3). Le biporte acoustique constitué dans notre cas par le réseau est placé entre deux guides d'onde droits comprenant chacun deux capteurs de pression. Les pressions des ondes aller et retour sont définies respectivement par p_1^+ et p_1^- en amont du réseau et p_2^+ et p_2^- en aval.

Dans le domaine fréquentiel, la pression en tout point d'abscisse x_{11} (amont du biporte) s'écrit :

$$p(x_{11}) = p_1^+(e^{jkx_{11}} + R_1 e^{-jkx_{11}})$$

où $R_1 = p_1^-/p_1^+$ est le coefficient de réflexion en amont du sytème ($x_{11} = 0$). De même, pour tout point x_{22} situé en aval du réseau, la pression est donnée par :

$$p(x_{22}) = p_2^+(e^{jkx_{22}} + \frac{1}{R_2} e^{-jkx_{22}})$$

où $R_2 = p_2^+/p_2^-$ est défini comme le coefficient de réflexion en pression en aval du système ($x_{22} = 0$). Le coefficient de transmission anéchoïque, noté T^+, défini comme le rapport des ondes de pression aller en aval et en amont du système, lorsque la terminaison est supposée parfaitement anéchoïque (aucune onde de pression retour n'est présente dans la partie aval) s'écrit :

$$T^+ = \frac{p_2^+}{p_1^+}, \text{ quand } p_2^- = 0.$$

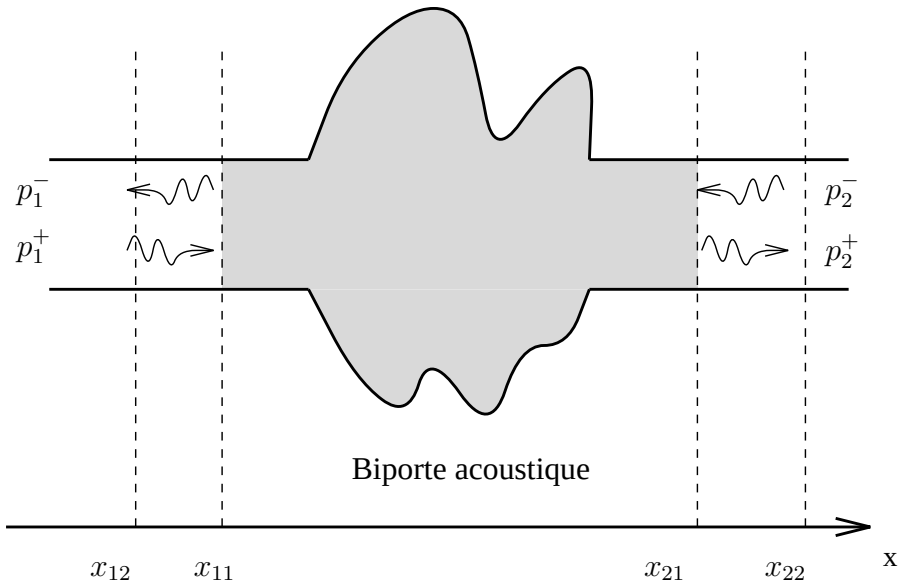

FIG. 9.3 – Description schématique d'un biporte acoustique

De même, le coefficient de réflexion R^+ peut être exprimé sous la forme suivante :

$$R^+ = \frac{p_1^-}{p_1^+}, \text{ quand } p_2^- = 0.$$

Les coefficients "inverses" (obtenus par renversement des ondes) sont, de la même manière, définis pour un biporte quelconque par

$$T^- = \frac{p_1^-}{p_2^-}, \text{ quand } p_1^+ = 0 \text{ et } R^- = \frac{p_2^+}{p_2^-}, \text{ quand } p_1^+ = 0.$$

Ces coefficients, dont l'interprétation physique demeure simple, sont aussi les éléments de la matrice de transfert et permettent d'écrire la relation matricielle (9.1) sous la forme

$$\begin{bmatrix} p_2^+ \\ p_1^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^+ & R^- \\ R^+ & T^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^+ \\ p_2^- \end{bmatrix}. \tag{9.2}$$

En normalisant cette expression par p_1^+, la propagation à travers le biporte est décrite par la relation

$$\begin{bmatrix} T_{12} \\ R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^+ & R^- \\ R^+ & T^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ T_{12}/R_2 \end{bmatrix}, \tag{9.3}$$

dans laquelle les différents paramètres sont définis par :

$$R_1 = \frac{p_1^-}{p_1^+},\ R_2 = \frac{p_2^+}{p_2^-},\ T_{12} = \frac{p_2^+}{p_1^+},$$

et où T_{12} est le cœfficient de transmission entre l'aval et l'amont du biporte.

Lorsque le biporte est utilisé dans le cadre de l'acoustique linéaire, il possède des propriétés liées à sa géométrie et aux conditions expérimentales. Ainsi, dans ce travail, le réseau est supposé symétrique et réciproque ce qui entraîne les relations :

$$R^+ = R^- = R \text{ et } T^+ = T^- = T.$$

Le biporte est donc caractérisé par deux grandeurs à déterminer. La relation (9.3) devient

$$\begin{bmatrix} T_{12} \\ R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & R \\ R & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ T_{12}/R_2 \end{bmatrix}. \tag{9.4}$$

Trois mesures, permettant de calculer R_1, R_2 et T_{12} suffisent donc à décrire complètement le comportement du système. Les coefficients de réflexion et de transmission du biporte sont alors donnés par :

$$T = \frac{T_{12}(1 - R_1/R_2)}{1 - T_{12}^2/R_2^2}, \text{ et } R = \frac{(R_1 - T_{12}^2/R_2)}{1 - T_{12}^2/R_2^2}. \tag{9.5}$$

9.2.2 Mesure des fonctions de transfert

La caractérisation du biporte repose, donc, sur la séparation des pressions des ondes aller et retour. A ce jour, la méthode des fonctions de transfert est la plus efficace (pour plus de détails, se reporter aux articles de Seybert et Ross 1977 [115] et Seybert et Soenarko 1981 [116]) pour effectuer ce travail [5]. Cette méthode appelée "méthode à deux microphones" utilise comme son nom l'indique deux microphones qui permettent de déterminer le coefficient de réflexion à l'entrée du biporte R_1 à partir de la fonction de transfert $H_{21}^1 = p_1(x_{12})/p_1(x_{11})$ entre les deux microphones situés en x_{12} et en x_{11} (en amont du système). Grâce à sa définition, R_1 prend la forme suivante :

$$R_1 = \frac{H_{21}^1 e^{jkx_{11}} - e^{jkx_{12}}}{e^{-jkx_{12}} - H_{21}^1 e^{-jkx_{11}}}. \tag{9.6}$$

De la même manière, R_2 s'exprime à partir de la fonction de transfert $H_{21}^2 = p_2(x_{22})/p_2(x_{21})$ entre deux microphones situés en aval du réseau :

$$R_2 = \frac{H_{21}^2 e^{-jkx_{21}} - e^{-jkx_{22}}}{e^{jkx_{22}} - H_{21}^2 e^{jkx_{21}}}. \tag{9.7}$$

Finalement, le coefficient de transmission T_{12} est déterminé à partir de la fonction de transfert $H_{11}^{21} = p_2(x_{21})/p_1(x_{11})$ et s'écrit :

$$T_{12} = H_{11}^{21} \frac{e^{jkx_{11}} + R_1 e^{-jkx_{11}}}{e^{jkx_{21}} + 1/R_2 e^{-jkx_{21}}}. \tag{9.8}$$

Ainsi, les trois inconnues permettant de décrire complètement le système se déduisent de la mesure des trois fonctions de transfert entre deux capteurs situés en amont et deux capteurs situés en aval du réseau. La relation (9.5) suffit ensuite pour déterminer expérimentalement les valeurs des coefficients de transmission et de réflexion du biporte.

9.2.3 Calcul des incertitudes de mesure

Afin de minimiser les erreurs sur les grandeurs mesurées, on doit choisir des fréquences telles que les erreurs de mesure des fonctions de transfert dH_{ij} correspondent à une erreur minimale sur le coefficient de réflexion ou de transmission.

Les variations des coefficients de réflexion en fonction de celles de la fonction de transfert sont données par la valeur de la dérivée de $R_{i,j}$ par rapport à H_{ij} qui s'écrit

$$\frac{dR_{1,2}}{dH_{ij}} = \frac{(e^{-jkx_j} + R_{1,2} e^{jkx_j})^2}{2j \sin k(x_j - x_i)}. \tag{9.9}$$

Cette expression montre que, quelle que soit la valeur des coefficients, l'erreur commise sur R est maximale quand

$$\sin k(x_j - x_i) = 0,$$

c'est à dire pour les fréquences f

$$f = \frac{nc}{2\Delta x_{ij}} \text{ avec n entier.} \tag{9.10}$$

[5] Elle est, généralement, utilisée pour déterminer les coefficients de réflexion en pression des discontinuités dans les guides d'onde, à partir de la mesure des pressions en deux points distincts du guide.

Ainsi, les coefficients sont les moins sensibles aux erreurs de mesure lorsque les fréquences utilisées sont telles que :

$$\Delta x_{ij} = \frac{(2n+1)\lambda}{4}, \tag{9.11}$$

soit

$$f = \frac{(2n+1)c}{4\Delta x_{ij}}. \tag{9.12}$$

Généralement, pour résoudre les problèmes d'incertitude de mesure liés à l'écartement des microphones, trois microphones ou plus sont utilisés de part et d'autre du biporte. Les mesures sont alors surdéterminées (Pachebat [117] et Ajello [118]) et les coefficients sont obtenus en exploitant les fonctions de transfert bénéficiant des incertitudes les plus faibles. Dans ce travail, il n'a pas été possible d'utiliser plus de deux microphones de chaque coté ce qui pose des problèmes importants autour de la valeur de la fréquence correspondant au double de la distance intermicrophonique. Des erreurs importantes apparaîssent dans cette zone spectrale. De même, plus la distance entre microphones est petite, plus la précision des calculs des coefficients à basse fréquence est fine. Toutes ces remarques sur les paramètres montrent l'impossibilité, dans cette étude, d'annuler les erreurs de mesure. Il est aussi possible d'améliorer notablement les mesures en disposant d'une sortie anéchoïque la plus performante possible. La sortie utilisée n'est pas très efficace pour les basses fréquences mais possède un rendement tout à fait acceptable pour des fréquences au dessus de 1000 Hz.

Remarque

Plusieurs études précédent ce travail ont été menées au laboratoire d'acoustique de l'Université du Maine dans le cadre de thèses. Au cours de l'une d'elles on a developpé un banc à écoulement (Ajello 1998 [118]) et mis en place la technique de mesure des coefficients de transmission et de réflexion. La deuxième a utilisé cette technique et l'a mise en œuvre dans un cadre où des non-linéarités étaient présentes (Pachebat 1998 [117]). L'utilisation de cette méthode dans notre étude a été, bien évidemment, fortement influencée par ces travaux ainsi que les différents calculs nécessaires à l'obtention des grandeurs désirées.

9.3 Techniques de traitement de signal

9.3.1 Introduction

Cette section est consacrée à l'étude de techniques de traitement numérique pour analyser et caractériser le comportement du système acoustique. L'emploi de ces méthodes permet la mise en évidence des non-linéarités présentes dans le système. Plusieurs techniques sont disponibles pour illustrer les comportements non-linéaires et non stationnaires d'un système. Généralement, le signal expérimental (dans notre cas la pression acoustique) est la seule grandeur dont on dispose. Ce signal représente l'évolution d'une grandeur en fonction du temps et contient toutes les informations utiles à la caractérisation du système qui l'a produit. Les techniques décrites dans cette section permettent d'illustrer ces informations de manière claire en utilisant diverses représentations du signal : temporelle, fréquentielle ou conjointe temps-fréquence. Ainsi, la compréhension des phénomènes physiques présents est facilitée.

La technique "classique", basée sur la transformée de Fourier, fournit une représentation fréquentielle du signal décomposé sur l'ensemble des fréquences. Mais cette méthode n'est pas adaptée à des systèmes non stationnaires dont les caractéristiques spectrales varient au cours du temps. Aussi, d'autres techniques ont été développées pour traiter le cas de signaux non stationnaires et la notion de spectre instantané est utilisée (Ville 1948 [119]) définissant la fréquence instantanée (FI) d'un signal pour suivre l'évolution de son contenu spectral en fonction du temps.

Cette grandeur est donnée par :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}[arg(z_x(t))], \tag{9.13}$$

où $z_x(t)$ représente le signal analytique associé au signal réel $x(t)$ et est défini par (Gabor 1946 [120])

$$z_x(t) = x(t) + j\mathrm{H}[x(t)].$$

où $\mathrm{H}[x(t)]$ est la transformée de Hilbert de $x(t)$. Cette définition peut se comprendre en étudiant le cas d'un signal stationnaire $y(t)$ décrit par

$$y(t) = Ae^{j\omega t}$$

où A représente l'amplitude (indépendante du temps). La fréquence f d'un tel signal est définie par

$$f = \frac{1}{2\pi j}\frac{d}{dt}[arg(y(t))].$$

Pour sa part, un signal non stationnaire $x(t)$ se met sous la forme

$$x(t) = A(t)e^{j\phi(t)}$$

où l'amplitude dépendante du temps $A(t)$ varie lentement et où $\phi(t)$ représente la phase qui, elle, a des variations beaucoup plus rapides. Par analogie avec le cas stationnaire, la notion de fréquence instantanée liée aux variations de la phase est développée et permet d'obtenir la relation (9.13). Par conséquent, les variations lentes de l'amplitude sont négligées. Cette notion théorique a permis l'élaboration de méthodes d'estimation de la fréquence instantanée permettant la caractérisation de signaux non stationnaires.

Deux méthodes, la transformée de Fourier à court terme (TFCT) et la distribution de Wigner-Ville (DWV), sont utilisées dans cette étude et permettent des représentations temps-fréquence du signal. Grâce à ces techniques, l'analyse du comportement à la fois temporel et fréquentiel du signal devient possible et la caractérisation des phénomènes non-linéaires beaucoup plus aisée.

9.3.2 La transformée de Fourier à court terme

La transformée de Fourier à court terme repose sur un principe d'analyse dit "classique" qui est la transformation de Fourier TF $X(f)$ définie par :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt, \tag{9.14}$$

où $x(t)$ représente le signal réel et f la fréquence. L'analyse consiste à décomposer le signal sur une base de signaux monochromatiques de fréquences différentes. L'amplitude de chaque fréquence f est donnée par la valeur de $X(f)$ correspondante. De par sa définition, la TF ne permet pas l'analyse des signaux non stationnaires puisque le temps n'intervient pas dans l'expression de $X(f)$. Ainsi, le moment d'apparition de chaque fréquence contenue dans le signal ne peut être connu en utilisant cette méthode "classique". Néanmoins, cette approche peut être adaptée aux cas non stationnaires en tronquant le signal réel par une fenêtre temporelle de durée finie autour d'une date. Cette technique, appelée transformation de Fourier à court terme, est définie pour un temps t_0 et s'écrit :

$$X(f, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h_\tau(t - t_0)e^{-j2\pi ft}dt, \tag{9.15}$$

où $h_\tau(t - t_0)$ est la fenêtre temporelle centrée sur t_0 et de longueur τ : c'est la TF d'un signal de durée finie autour de t_0. La fréquence instantanée FI est déterminée en détectant la fréquence

d'amplitude maximum à chaque temps t_0. Cette estimation n'est correcte que lorsque les caractéristiques spectrales du signal évoluent peu sur la durée de la fenêtre temporelle τ. Pour l'analyse de signaux fortement non stationnaires, cette méthode engendre un certain nombre de difficultés parmi lesquelles une médiocre précision fréquentielle. Une forte non stationnarité oblige la réduction de la taille de la fenêtre temporelle et entraîne une imprécision dans la détection de la FI due au principe d'incertitude. En effet, la troncature du signal par une fenêtre temporelle correspond à une convolution par un sinus cardinal dont la largeur est inversement proportionnelle à la longueur de la fenêtre.

9.3.3 La distribution de Wigner-Ville

L'analyse conjointe temps-fréquence permet de suivre l'évolution temporelle des caractéristiques d'un signal non stationnaire. La fréquence instantanée, interprétée comme la fréquence moyenne d'un signal à un instant donné, est l'une de ces caractéristiques et elle est capable de suivre les changements dans le spectre du signal. Les approches temps-fréquence fournissent une représentation énergétique du signal dans le plan temps-fréquence et permettent donc une estimation de cette fréquence instantanée. La distribution de Wigner-Ville fait partie de ces techniques et a été adaptée au traitement du signal par Ville (Flandrin 1993 [121]) à partir des travaux de Wigner en mécanique quantique.

La distribution de Wigner-Ville est une transformation bilinéaire définie par :

$$W_x(f,t) = \int_{-\infty}^{\infty} z_x(t+\frac{\tau}{2}) z_x^*(t-\frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \tag{9.16}$$

où $z_x(t)$ est le signal analytique associé au signal réel $x(t)$. Cette transformation est une fonction à deux variables définie dans le plan temps-fréquence et donne une présentation de l'énergie dans ce plan. Néanmoins, elle ne permet pas d'accéder à la fréquence instantanée directement. Celle-ci est donnée par le premier moment de la distribution mais cette méthode apparaît extrêmement sensible au bruit et longue en temps de calcul (Valeau 1999 [122]). La localisation énergétique dans le plan temps-fréquence est optimale pour une modulation linéaire du signal mais, pour une modulation arbitraire, des interférences dues aux termes quadratiques apparaîssent autour de la loi de localisation de l'énergie et compliquent fortement l'analyse. Ainsi, la détection de la fréquence instantanée devient difficile. Pour remédier à ces problèmes, on tente de se rapprocher d'une modulation linéaire du signal en introduisant une fenêtre temporelle dans le calcul de la distribution de Wigner-Ville. La pseudo distribution de Wigner-Ville est définie par :

$$PW_x(f,t) = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|^2 z_x(t+\frac{\tau}{2}) z_x^*(t-\frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \tag{9.17}$$

où $h(\tau)$ est une fenêtre temporelle de longueur τ. La fréquence instantanée se détermine en recherchant la fréquence d'amplitude maximum sur chaque fenêtre et en l'associant au temps t. Les mêmes restrictions que pour la TFTC apparaîssent et une limite est rencontrée pour des signaux fortement non stationnaires. Ainsi, un juste compromis doit être trouvé entre la taille de la fenêtre et la précision fréquentielle.

9.3.4 Conclusion

L'application de ces deux méthodes sur des signaux caractérisant la propagation dans un réseau acoustique a été entreprise dans la suite de ce travail. Les non-linéarités sont clairement mises en évidence pour de fortes intensités sonores. La dispersion d'un tel milieu est montrée expérimentalement et une détermination de la vitesse de groupe de l'onde acoustique en fonction de la fréquence est obtenue. En outre, l'étude des effets des non-linéarités sur la localisation dans les réseaux est abordée et des notions énergétiques caractérisant la transmission sont développées à partir de résultats expérimentaux. Tous ces résultats sont exposés dans la partie consacrée à l'étude expérimentale de la propagation dans les réseaux acoustiques.

Chapitre 10

Le résonateur de Helmholtz : théorie et expérience

10.1 Introduction

Le résonateur de Helmholtz a, depuis de nombreuses années, suscité un grand intérêt dans le domaine des recherches en acoustique (Ingard 1953 [123]). Parallèlement, les effets non-linéaires d'un orifice ont toujours été étudié (Ingard et Labate 1950 [124], Ingard 1970 [125], Cummings 1986 [126], Thurston et *al* 1957 [127]) ce qui a permis, entre autres, le développement de modèles non-linéaires pour le résonateur de Helmholtz (Ingard 1953 [123], Bies et Wilson 1957 [128]). Depuis, de nombreuses études sont apparues dans la littérature sur la prise en compte des non-linéarités dans le comportement des résonateurs en général (Cummings et Eversman 1983 [129], Gusev 1984 [130], Zaikin et Rudenko 1996 [131], Ilinskii et *al* 1998 [132]) et des résonateurs de Helmholtz en particulier (Innes et Grighton 1989 [133], Rudenko et Khirnykh 1990 [134], Boullosa et Orduña-Bustamante 1992 [135], Balin et *al* 1993 [136]). Ce sont ces comportements non-linéaires qui ont orienté notre choix pour la présence de résonateurs de Helmholtz dans le réseau acoustique.

Ce chapitre est consacré à l'étude du comportement non-linéaire des résonateurs de Helmholtz qui forment le réseau acoustique. Les impédances d'entrée linéaire et "non-linéaire" de ces résonateurs sont caractérisées et une évaluation expérimentale permet de vérifier notre modèle.

10.2 Description du résonateur

Le dispositif expérimental (décrit dans le chapitre 2) met en œuvre des dérivations qui sont des résonateurs de Helmholtz (figure 10.1). Ces résonateurs sont constitués d'un petit tube de section s_c et de longueur l_c faisant office de col du résonateur et d'un plus grand tube de section s_V et de longueur l_V bouché à l'autre bout par un piston réglable. Ce dernier tube représente le volume du résonateur de Helmholtz V_0 et il est supposé beaucoup plus grand que le volume du col du résonateur. Ces dérivations possèdent une fréquence de résonance de Helmholtz mais aussi d'autres résonances dues aux différentes longueurs présentes dans le dispositif. La résonance produite par le col n'est pas considérée dans les résultats présentés car elle apparaît à haute fréquence.

10.3 Modèle non-linéaire du résonateur de Helmholtz

Le modèle décrit dans cette étude est basé sur un article de Boullosa et Orduña-Bustamante (Boullosa et Orduña-Bustamante 1992 [135]). La notion d'impédance (ou admittance) "non-linéaire" est développée en utilisant la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la

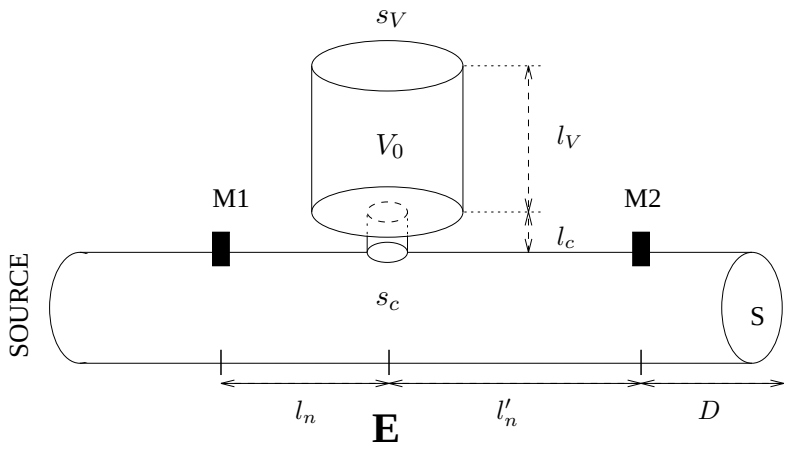

FIG. 10.1 – Description du dispositif expérimental utilisé.

masse d'air jugée incompressible du col du résonateur. Cette notion définie une admittance "non-linéaire" qui apparaît comme une correction du cas linéaire et qui dépend de l'amplitude de la pression dans le tube principal. Donc, dans un premier temps, il faut mettre en évidence le caractère non-linéaire de la force élastique produite par la cavité du résonateur.

10.3.1 Utilisation des propriétés élastiques de l'air

Le résonateur de Helmholtz étudié est décrit par la figure (10.1). Quand les dimensions du résonateur sont beaucoup plus petites que la longueur d'onde, deux hypothèses peuvent être faites :

- (a) la pression à l'intérieur du résonateur est uniforme ;
- (b) la portion d'air du col se déplace en phase comme un piston.

Grâce à ces remarques, un modèle simple de résonateur de Helmholtz est formulé : l'air compris dans le col est un simple piston de masse m et le volume d'air de la cavité contribue au mouvement de cette masse comme un ressort restituant une force appliquée au piston (voir figure (10.2)). Les forces dissipatives peuvent être prises en compte mais ce n'est pas le cas dans ce modèle. En revanche, elles apparaîssent dans le calcul de l'admittance d'entrée linéaire du résonateur.

Les propriétés élastiques du ressort représentant l'air de la cavité sont calculées à partir de l'équation des procédés thermodynamiques apparaissant dans l'air. Si la fréquence est assez basse pour que les phénomènes mis en jeu soient isothermes, la loi de Laplace adiabatique est

$$P = P_0 \left\{ \frac{V_0}{V} \right\}^{\gamma}$$

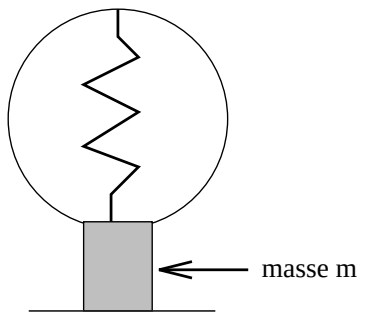

FIG. 10.2 – Analogie mécanique du comportement d'un résonateur de Helmholtz.

où P_0 et V_0 sont respectivement les valeurs de référence de la pression atmosphérique et du volume de la cavité, et $\gamma = C_p/C_v$ le rapport des chaleurs spécifiques ($\gamma = 1.4$).

La variation de pression par rapport à la pression absolue due au petit déplacement x de la masse d'air du col vers l'extérieur du résonateur est

$$\frac{\Delta P}{P_0} = -\left[\gamma\frac{s_c x}{V_0} - \frac{\gamma(\gamma+1)}{2}\frac{s_c x^2}{V_0} + o(x^3)\right]. \tag{10.1}$$

De cette relation, la force causée par l'air de la cavité sur le piston du col est donnée par

$$F_{res} = \Delta P s_c = -\frac{\rho c^2 s_c^2}{V_0}[x - \alpha x^2 + o(x^3)] \tag{10.2}$$

où la loi thermodynamique pour un gaz parfait $P_0 = \frac{\rho c^2}{\gamma}$ a été utilisée, où $\alpha = \frac{1}{2}(\gamma+1)\zeta$ avec $\zeta = \frac{s_c}{V_0}$. Pour les amplitudes importantes des déplacements dans le col, cette force n'est pas linéaire en x et plusieurs constantes sont nécessaires pour décrire le comportement du résonateur de Helmholtz.

10.3.2 Détermination de l'admittance d'entrée du résonateur

Grâce à la relation fondamentale de la dynamique appliquée au déplacement de la masse d'air du col soumis à une force extérieure $f_e(t)$ et en négligeant les frottements, on obtient l'équation du mouvement de la masse d'air m :

$$\ddot{x} + \omega_0^2[x - \alpha x^2 + o(x^2)] = \frac{f_e(t)}{m} \tag{10.3}$$

où $\omega_0^2 = \frac{s_c c^2}{V_0 l'_c}$ est la fréquence de résonance du résonateur de Helmholtz. l'_c représente la longueur corrigée du col du résonateur. Les corrections sont dues au rayonnement de ce col dans la cavité du résonateur et dans le tube principal. La force extérieure est reliée à la pression P dans le tube par la relation

$$\frac{f_e(t)}{m} = \frac{P}{\rho l'_c}e^{j\omega t}$$

et des solutions harmoniques sont cherchées (de la forme $e^{j\omega t}$). La relation (10.3) devient

$$j\omega\dot{x} + \omega_0^2(1 - \alpha\frac{\dot{x}}{j\omega})\frac{\dot{x}}{j\omega} = \frac{P}{\rho l'_c}. \tag{10.4}$$

L'impédance d'entrée du résonateur est définie comme le rapport de la pression sur la vitesse à l'entrée du résonateur. En posant $v = \dot{x}$, dans le cas linéaire ($\alpha = 0$), cette impédance est donnée par :

$$Z_l = j\omega\rho l'_c(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})$$

et dépend de la fréquence de l'onde se propageant dans le guide principal. En revanche, dans le cas non-linéaire ($\alpha \neq 0$), l'impédance d'entrée "non-linéaire" Z_{nl} du résonateur s'exprime en fonction de l'impédance linéaire et de la pression à l'entrée du résonateur :

$$Z_{nl} = Z_l + \alpha\rho l'_c\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\frac{P}{Z_l}. \tag{10.5}$$

Le second terme peut être vu comme une correction à l'impédance linéaire. Il dépend de l'amplitude de l'onde de pression à l'intérieur du tube principal et d'un coefficient de non-linéarité α. L'admittance d'entrée "non-linéaire" du résonateur définie par

$$Y_{nl} = 1/Z_{nl}$$

s'écrit

$$Y_{nl} = Y_l \left\{ \frac{1}{1 + \alpha \rho l'_c \frac{\omega_0^2}{\omega^2} Y_l^2 P} \right\}. \tag{10.6}$$

Cette expression non-linéaire de l'admittance d'entrée dépend de la valeur du coefficient α de la non-linéarité. Si $\zeta \ll 1$ ce qui correspond à un volume V_0 grand, le comportement du résonateur est linéaire et son admittance pourra être approximée à l'admittance linéaire Y_l. De même, si la fréquence de l'onde est beaucoup plus grande que la fréquence de résonance de Helmholtz, le terme non-linéaire est encore négligeable. Donc, seul le cas de la fréquence de l'onde proche de la fréquence de résonance alliée à une valeur de ζ non nulle implique un comportement non-linéaire du résonateur. Ainsi, l'étude des effets non-linéaires se limitera à une plage de fréquences autour de la fréquence de résonance de Helmholtz.

Pour être tout à fait complet dans la détermination de l'admittance d'entrée du résonateur de Helmholtz, on doit encore déterminer la valeur de cette admittance dans un cas linéaire en y incluant les pertes visco-thermiques. Pour cela, la valeur de la correction du col doit être calculée. La méthode des matrices de propagation à l'intérieur du résonateur semble être la plus fiable et cette approche est décrite dans la suite de ce travail. Mais tout d'abord, les effets des non-linéarités sont quantifiés au moyen d'un calcul analytique permettant de déterminer la fréquence de résonance lorsque les non-linéarités sont prises en compte.

10.3.3 Effet des non-linéarités sur la fréquence de résonance

Pour déterminer la fréquence de résonance d'une cavité quelconque, il suffit d'annuler son impédance d'entrée ou, de manière équivalente, de rendre infinie son admittance d'entrée. Pour cela, on utilise l'expression approchée de l'admittance d'entrée linéaire d'un résonateur de Helmholtz et on calcule la fréquence de résonance en fonction du coefficient de non-linéarité α et de l'amplitude de l'onde de pression.

On a établi plus haut l'expression de l'admittance "non-linéaire" :

$$Y_{nl} = Y_l \left\{ \frac{1}{1 + \alpha \rho l'_c \frac{\omega_0^2}{\omega^2} Y_l^2 P} \right\}, \tag{10.7}$$

où Y_l est donnée par son expression approchée

$$Y_l = \frac{1}{j\omega \rho l'_c} \frac{1}{(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})}. \tag{10.8}$$

Ainsi, Y_{nl} peut se mettre sous la forme :

$$Y_{nl} = \frac{1}{1/Y_l + \alpha \rho l'_c \frac{\omega_0^2}{\omega^2} Y_l P}. \tag{10.9}$$

La pulsation correspondant à la fréquence de résonance prenant en compte les effets non-linéaires ω_{res}^{nl} est trouvée en annulant le dénominateur. Après quelques manipulations algébriques, l'équation s'écrit :

$$\left[(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}) - \sqrt{\frac{\alpha}{\rho l'_c}} \frac{\omega_0}{\omega^2} \sqrt{P} \right] \left[(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}) + \sqrt{\frac{\alpha}{\rho l'_c}} \frac{\omega_0}{\omega^2} \sqrt{P} \right] = 0, \tag{10.10}$$

dont les deux solutions possibles pour la valeur de la pulsation ω_{res}^{nl} sont :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \omega_{res1}^{nl} & = & \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{\alpha P}{\rho l'_c}}}, \\ \omega_{res2}^{nl} & = & \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{\alpha P}{\rho l'_c}}}. \end{array} \right. \tag{10.11}$$

Ces deux solutions doivent être confrontées aux résultats expérimentaux pour connaître celle qui possède un sens physique. A priori, on peut s'attendre à une fréquence de résonance plus faible que le cas linéaire puisque la non-linéarité ajoute un terme de volume (raideur) à la cavité. Ces remarques seront reprises lors de la section consacrée aux résultats expérimentaux.

10.4 Calcul de l'impédance d'entrée linéaire d'un résonateur de Helmholtz

Le résonateur de Helmholtz est composé de deux tubes de section intérieure et de longueur différentes (figure (10.1)). Les impédances caractéristiques de ces deux tubes sont respectivement Z_c et Z_V pour le col (indice c) et le volume de la cavité (indice V). Le résonateur est branché au point E sur un tube de section S dans lequel se propage l'onde de pression. La pression et le débit sont donc P_E et U_E au point d'intersection entre le tube et la dérivation.

Pour déterminer l'impédance d'entrée du résonateur, on utilise la notion de matrice de propagation qui met en relation la pression et le débit en deux points d'un guide d'onde. Les pertes visco-thermiques sont calculées grâce à la théorie de Kirchoff et sont prises en compte dans le modèle par l'intermédiaire des impédances caractéristiques. Mais tout d'abord, on étudie le cas sans dissipation.

10.4.1 Cas sans perte

La matrice de propagation sans perte dans un tube de section S et de longueur L entre le point D et F s'écrit :

$$\begin{pmatrix} P_F \\ U_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kL) & jZ\sin(kL) \\ \frac{j}{Z_c}\sin(kL) & \cos(kL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_D \\ U_D \end{pmatrix}, \tag{10.12}$$

où P représente la pression, U le débit et $Z = \frac{\rho c}{S}$. Le résonateur est construit avec deux guides circulaires dont l'un est fermé à son extrémité. Les conditions aux limites (extrémité du résonateur) sont donc connues : le débit sur la paroi est nul et la pression est notée P. La matrice (pression débit)^t à l'entrée du résonateur (point E) s'exprime en fonction de ces conditions aux limites sous la forme :

$$\begin{pmatrix} P_E \\ U_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kl_c) & jZ_c\sin(kl_c) \\ \frac{j}{Z_c}\sin(kl_c) & \cos(kl_c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & jZ_ck(\Delta l) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(kl_V) & jZ_V\sin(kl_V) \\ \frac{j}{Z_V}\sin(kl_V) & \cos(kl_V) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10.13}$$

où la première matrice à gauche du second membre représente la propagation dans le col du résonateur, la deuxième les discontinuités de section entre le col et la cavité et entre le col et le tube principal, et la troisième la propagation dans la cavité du résonateur. L'impédance d'entrée du résonateur définie comme le rapport entre la pression et la vitesse au point E est donnée par

$$Z_l = \frac{1}{j}\left[\frac{\cos(kl_c)\cos(kl_V) - \frac{Z_c}{Z_V}k(\Delta l)\cos(kl_c)\sin(kl_V) - \frac{Z_c}{Z_V}\sin(kl_c)\sin(kl_V)}{\frac{1}{Z_c}\cos(kl_V)\sin(kl_c) - \frac{1}{Z_V}k(\Delta l)\sin(kl_c)\sin(kl_V) + \frac{1}{Z_V}\cos(kl_c)\sin(kl_V)}\right], \tag{10.14}$$

où Δl représente la longueur ajoutée au col du résonateur due aux discontinuités des sections. Le raccordement des modes supérieurs entre le col et le guide principal implique une correction de longueur Δl_c pour la partie du col débouchant sur le tube donnée par (Dubos et *al* 1999 [137]) :

$$\Delta l_c = \frac{8\pi}{3}(1 - 0.227\epsilon - 1.28\epsilon^2 - 1.5\epsilon^3 - 0.834\epsilon^4)r_c, \tag{10.15}$$

où $\epsilon = \frac{s_c}{S}$ est le rapport des sections du col et du tube principal et r_c le rayon du col. Du coté de la cavité du résonateur, la correction de longueur Δl_V est calculée en approximant le mouvement

de la masse d'air du col à un piston plan dans un écran infini et s'écrit :

$$\Delta l_V = \frac{8}{3\pi} r_c. \tag{10.16}$$

La correction de longueur totale Δl est approximée par la somme de ces deux longueurs ajoutées même si, en toute rigueur, l'interaction des modes supérieurs doit être prise en compte.

10.4.2 Cas avec pertes

Les pertes visco-thermiques survenant lors de la propagation dans les différents tubes sont très bien modélisées par la théorie de Kirchoff. La description de la propagation se fait sous forme de ligne de transmission, avec pour grandeurs caractéristiques la pression acoustique et le débit acoustique. Les caractéristiques de la ligne sont :

$$\begin{aligned} Z_v &= \tfrac{j\omega\rho}{S}\left[1+\tfrac{\sqrt{2}}{r_v}(1-j)\right], \\ Y_t &= \tfrac{j\omega S}{\rho c^2}\left[1+(\gamma-1)\tfrac{\sqrt{2}}{r_t}(1-j)\right], \end{aligned} \tag{10.17}$$

où Z_v est l'impédance linéique en série, Y_t l'admittance linéique en série, S la section du tube de rayon r et

$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ est le rapport des chaleurs spécifiques,

$r_v = r(\frac{\omega\rho}{\mu})^{1/2}$ où μ est le coefficient de viscosité de l'air,

$r_t = r(\frac{\omega\rho C_p}{\lambda})^{1/2}$ où λ est la conductivité thermique de l'air.

Dans ce cas, la constante de propagation Γ et son impédance caractéristique Z_c sont données par :

$$\begin{aligned} \Gamma &= (Z_v Y_t)^{1/2}, \\ Z_c &= (\tfrac{Z_v}{Y_t})^{1/2}. \end{aligned} \tag{10.18}$$

Les pertes visqueuses sont prises en compte dans l'impédance linéique en série et les pertes thermiques dans l'admittance linéique en série. La relation matricielle entre l'entrée et l'extrémité fermée du résonateur prend la forme :

$$\begin{pmatrix} P_E \\ U_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\Gamma_c l_c) & Z_{cc}\sinh(\Gamma_c l_c) \\ \frac{1}{Z_{cc}}\sinh(\Gamma_c l_c) & \cosh(\Gamma_c l_c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Z_{cc}\Gamma_c(\Delta l) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(\Gamma_V l_V) & Z_{cV}\sinh(\Gamma_V l_V) \\ \frac{1}{Z_{cV}}\sinh(\Gamma_V l_V) & \cosh(\Gamma_V l_V) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{10.19}$$

dans laquelle les indices c et V sont reliés respectivement au col et au volume de la cavité du résonateur. Le calcul de l'admittance d'entrée avec pertes se fait de la même façon que dans le cas où les pertes ne sont pas prises en compte.

10.5 Résultats expérimentaux

Cette section est consacrée à la comparaison de résultats expérimentaux et des résultats de la simulation numérique correspondante. La simulation numérique est basée sur la méthode matricielle développée dans la première partie théorique de ce travail. Les équations sont rappelées brièvement puis l'approche expérimentale est décrite. Finalement, les résultats sont comparés et des corrections sont apportées au modèle pour améliorer son efficacité.

10.5.1 Équations et approche expérimentale

La méthode des matrices de transmission est utilisée pour la simulation numérique et la propagation est décrite à partir des conditions en bout de tube puisque ce sont les seules que l'on maîtrise. Deux conditions aux limites différentes sont abordées :

- la condition tube fermé où le débit acoustique est nul,
- la condition tube ouvert où la pression acoustique est nulle.

Le système reliant les amplitudes des ondes aller et retour de chaque coté d'une dérivation est donné par :

$$\begin{cases} A_{n+1} &= \left(1-\frac{\sigma_n}{2jk}\right)A_n e^{jk(l_n+l'_n)} - \left(\frac{\sigma_n}{2jk}\right)B_n e^{-jk(l_n-l'_n)} \\ B_{n+1} &= \left(1+\frac{\sigma_n}{2jk}\right)B_n e^{-jk(l_n+l'_n)} + \left(\frac{\sigma_n}{2jk}\right)A_n e^{jk(l_n-l'_n)} \end{cases} \tag{10.20}$$

où $\sigma_n = -j\omega\rho\frac{s_c}{S}Y_{nl}$ et l_n et l'_n représentent respectivement les distances à gauche et à droite du résonateur (figure (10.1)). Les amplitudes de l'onde aux points x_{n+1} et x_n s'écrivent respectivement $(A_{n+1}\, B_{n+1})^t$ et $(A_n\, B_n)^t$. Pour pouvoir utiliser ces relations, l'impédance de la terminaison du tube est ramenée au niveau du point de mesure x_{n+1}. Le vecteur pression-débit $(\mathrm{P\ U})^t$ donne la pression en x_{n+1} en fonction de la pression et du débit acoustique au niveau de la terminaison :

$$P(x_{n+1}) = \cos(kD)P_{term} + jZ_c\sin(kD)U_{term} \tag{10.21}$$

où D est la distance séparant le point x_{n+1} de la terminaison et où Z_c est l'impédance caractéristique du guide d'onde. Après quelques manipulations algébriques, les amplitudes des ondes aller et retour en x_{n+1} sont déterminées et sont reliées par :

- $B_{n+1} = -A_{n+1}[\frac{1+\cot(kD)}{j\cot(kD)-1}]$ lorsque le tube est fermé,
- $B_{n+1} = A_{n+1}[\frac{1+j\tan(kD)}{j\tan(kD)-1}]$ lorsque le tube est ouvert.

Il est important de remarquer que, pour le cas du tube ouvert, la distance D doit être corrigée pour prendre en compte les effets du rayonnement vers l'extérieur.

La fonction de transfert entre le point situé après le résonateur et celui situé avant est déterminée en fixant l'amplitude de la pression au point x_{n+1}. Cette fonction de transfert est donc définie par :

$$H = \frac{P(x_{n+1})}{P(x_n)} = \frac{A_{n+1}+B_{n+1}}{A_n+B_n}. \tag{10.22}$$

Les différentes longueurs l_n et l'_n séparant les microphones sont intégrées dans les relations (10.20) et les amplitudes sont relevées au point x_{n+1}.

Remarque

Des études expérimentales de résonateurs de Helmholtz, en régime linéaire et quelques fois non-linéaire, ont déjà été présentées dans la littérature (Selamet et Radavich 1999 [138], Boullosa et Orduña-Bustamante 1992 [135]). En ce qui concerne les travaux en régime linéaire, les comparaisons proposées entre résultats expérimentaux et modèles théoriques, mettent en évidence de légères différences sur la valeur des fréquences de résonance. Dans la plupart des cas, cet écart ne dépasse pas quelques hertz (Selamet et Radavich 1999 [138]). Dans l'étude présentée, les fréquences de résonance déterminées au moyen du modèle analytique correspondent aux valeurs expérimentales pour le régime linéaire. Pour obtenir ces résultats, nous avons utilisé une valeur de la correction de longueur, due aux discontinuités de section, donnée par :

$$\Delta l = (0.6+0.8)r_c.$$

10.5.2 Résultats

10.5.2.1 Fonction de transfert linéaire d'un résonateur de Helmholtz

Ce paragraphe est consacré à la validation de la simulation numérique de la fonction de transfert entre deux points situés de part et d'autre du résonateur dans l'approximation linéaire. Plusieurs cas sont testés et comparés aux résultats expérimentaux.

Le résonateur étudié dans ce paragraphe est composé d'une cavité de hauteur $l_V = 11.5$ cm et les différentes distances sont : $l_n = 10$ cm, $l'_n = 10$ cm et $D = 10$ cm. La figure (10.3) représente la comparaison de la simulation et de l'expérience pour le cas d'un tube principal ouvert à son extrémité. Très peu de différences sont observées pour la position des différents pics de résonance ou d'anti-résonance sur l'axe des fréquences. A part pour les fréquences élevées où les différentes approximations utilisées dans la simulation atteignent leurs limites de validité (notamment les corrections de longueur dues aux impédances de rayonnement), les résultats de la simulation sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. En ce qui concerne les amplitudes de ces pics, en revanche, une nette surévaluation est mise en évidence. Ceci est dû au fait que le modèle ne prend pas en compte les pertes visco-thermiques. En outre, il n'est pas exclu que des fuites dans l'expérience puissent être une des causes de cet écart.

La première résonance du résonateur de Helmholtz se situe autour de 400 Hz et est très bien prédite par la simulation autant pour l'amplitude que pour la position. La présence du résonateur entraîne aussi une deuxième résonance autour de 1600 Hz causée par le tube faisant office de cavité principale du résonateur de Helmholtz. D'autres résonances, plus élevées, sont le résultat de la présence du résonateur mais leurs valeurs ne permettent pas de les faire figurer sur ce graphe.

Pour finir, nous avons choisi de comparer les résultats expérimentaux et de la simulation numérique pour un tube ouvert sans dérivation (figure (10.4)). L'écart en amplitude est toujours présent et ne change pas par rapport au cas du résonateur en dérivation. Cette comparaison confirme la justesse de la méthode des matrices de transfert utilisée dans la simulation numérique. En outre, la parfaite adéquation qui existe entre le calcul analytique et la simulation numérique de la fonction de transfert pour une dérivation branchée sur le tube principal entérine le choix d'utiliser l'approche matricielle pour simuler la propagation dans un réseau.

Les figures (10.5) et (10.6) proposent les phases déroulées des fonctions de transfert étudiées précédemment. Leur comparaison permet d'illustrer l'effet de la présence du résonateur de Helmholtz sur la propagation à l'intérieur du tube. La première résonance du résonateur décale la première résonance du tube (déphasage de π lorsqu'une résonance est présente) d'une cinquantaine de Hertz. Quant à la deuxième résonance (dûe à la cavité du résonateur), elle apparaît aussi autour de 1600 Hz sur la phase de la fonction de transfert.

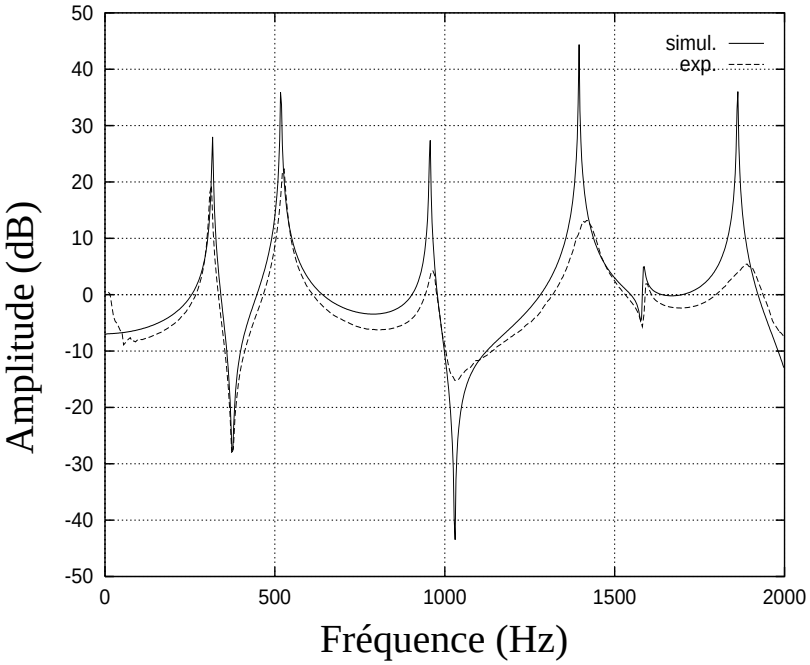

FIG. 10.3 – Comparaison de l'amplitude de la fonction de transfert simulée et expérimentale pour un résonateur de Helmholtz avec un tube ouvert.

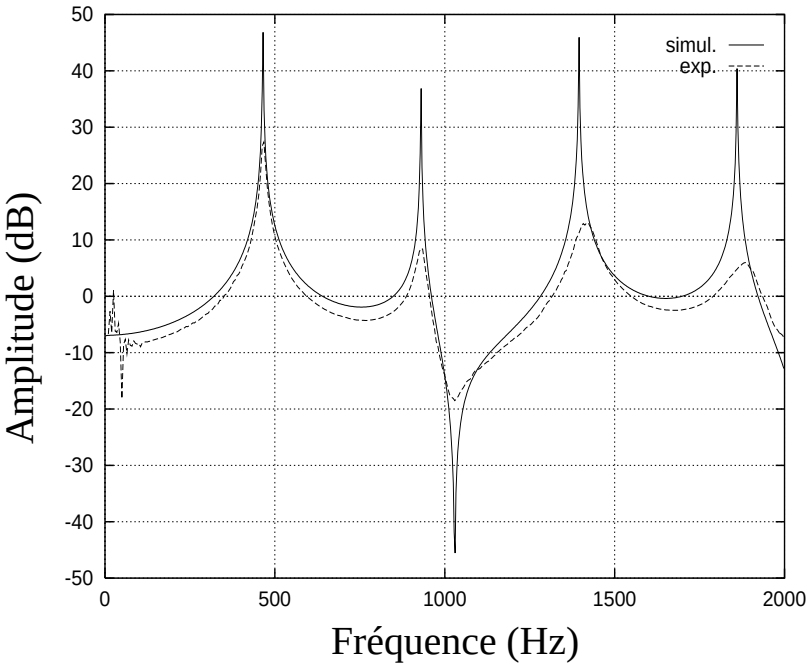

FIG. 10.4 – Comparaison de l'amplitude de la fonction de transfert simulée et expérimentale pour un tube ouvert sans dérivation.

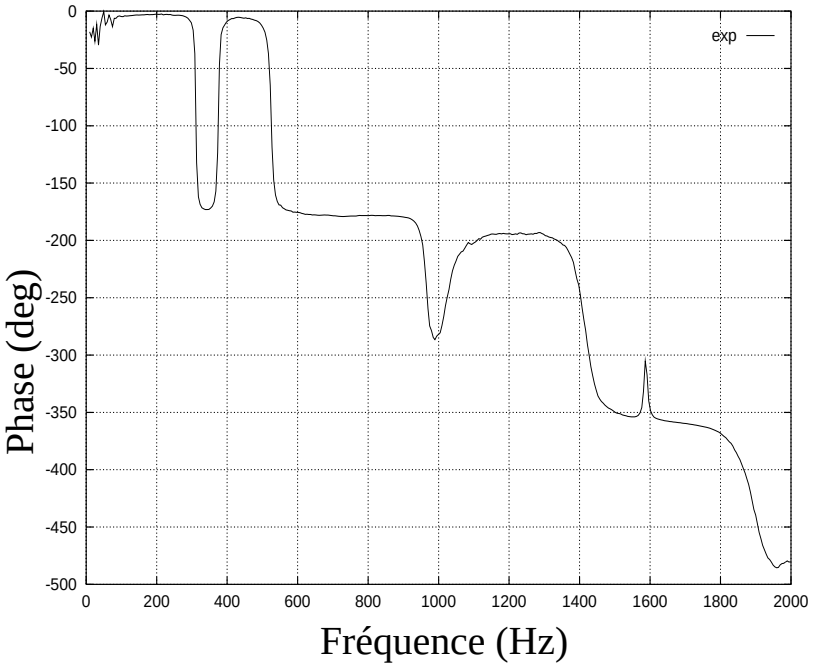

FIG. 10.5 – Phase de la fonction de transfert expérimentale pour un résonateur de Helmholtz avec un tube ouvert.

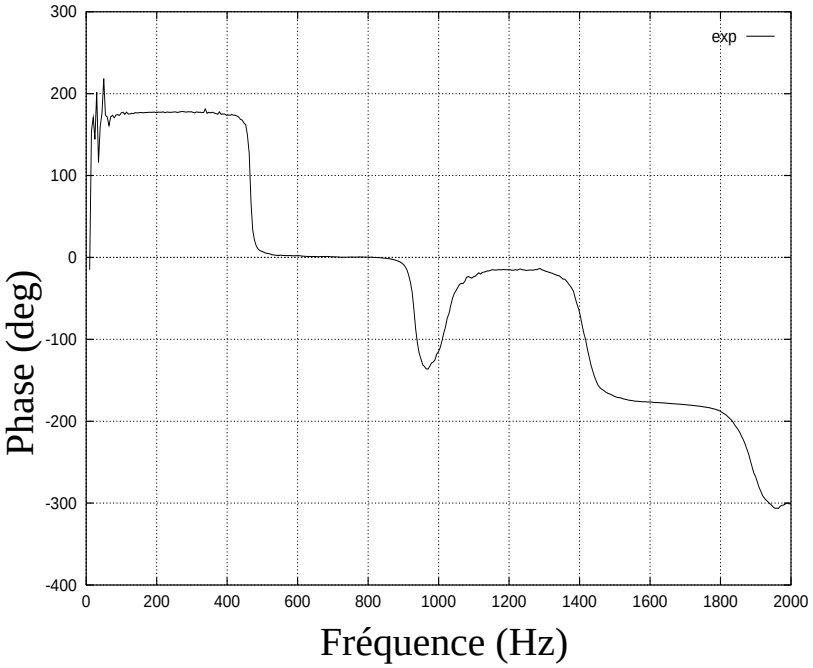

FIG. 10.6 – Phase de la fonction de transfert expérimentale pour un tube ouvert sans dérivation.

10.5.2.2 Mise en évidence du comportement non-linéaire

Remarques préliminaires

Dans ce paragraphe, deux tailles de résonateurs sont étudiées pour appréhender les effets du volume de la cavité principale sur le comportement non-linéaire. La plupart des résultats présentés dans ce travail sont obtenus avec un résonateur dont la cavité possède une hauteur maximale ($l_V = 16.5$ cm). Par convention, la hauteur du résonateur n'est mentionnée, dans le texte ou la légende se rapportant à la figure, uniquement dans les cas où sa valeur n'est pas maximale. Ainsi, les deux derniers graphes de cette étude se rapportent à un résonateur de hauteur $l_V = 6.5$ cm. La figure (10.1) décrit le dispositif expérimental. Les trois distances l_n, l'_n et D sont toutes identiques et égales à 25 cm.

La dernière remarque porte sur la position du microphone servant de référence pour l'intensité acoustique à l'intérieur du guide principal. Les quatres premières figures qui mettent en évidence, de façon expérimentale, le comportement non-linéaire d'un résonateur de Helmholtz ont été obtenues en relevant l'amplitude de la pression sur le microphone $M1$ (en amont du résonateur). Pour les suivantes (comparaison théorie-expérience), les niveaux sonores sont relevés sur le microphone $M2$ (en aval de la dérivation). Il n'y a donc pas de correspondance précise, en ce qui concerne l'intensité sonore, entre ces deux types de résultats.

Résultats

Tout d'abord, les effets des non-linéarités sont mis en évidence par les résultats expérimentaux donnés par les figures (10.7) où l'amplitude et la phase de la fonction de transfert entre deux points situés de part et d'autre du résonateur de Helmholtz sont présentées. Chaque courbe est obtenue avec une amplitude de la pression acoustique différente allant de 96 dBspl pour la plus faible à 132.6 dBspl pour la plus élevée (ces intensités sont relevées au niveau du microphone en amont du résonateur). Les effets non-linéaires sont visibles : le trou dans l'amplitude de la fonction de transfert dû à la résonance de Helmholtz (300 Hz) se résorbe et la valeur de la fréquence de cette résonance (définie comme la fréquence du minimum de l'amplitude) diminue avec l'accroissement de l'intensité de l'onde incidente. Les mêmes phénomènes se retrouvent en observant la phase de la fonction de transfert. Un déphasage se produit lors de la résonance qui se décale vers la gauche quand l'amplitude de la pression augmente. Ce déphasage diminue lui aussi, ce qui montre que la résonance a tendance à disparaître quand l'amplitude s'accroît. Les non-linéarités ont donc pour effet d'annihiler le rôle absorbant du résonateur autour de sa fréquence de résonance. Le deuxième pic de résonance visible sur ces courbes (autour de 315 Hz) est lui aussi affecté par les non-linéarités. Ce pic est le résultat du couplage entre une résonance du tube et le résonateur. Le fait que son amplitude diminue avec l'accroissement de l'intensité de l'onde montre que les effets non-linéaires ne sont pas restreints à la fréquence de résonance de Helmholtz mais à une plage fréquentielle autour de celle-ci.

En outre, ces figures présentent un amoncellement de courbes au niveau des intensités les plus basses dans le guide. Cette observation permet de mettre en évidence la plage de linéarité. Le décalage de la fréquence de résonance ne commence à être visible qu'à partir d'une intensité acoustique de 104 dBspl (voir la figure (10.8)). Il existe donc une zone pour les valeurs du niveau sonore pour laquelle les effets non-linéaires sur la fréquence de résonance sont inexistants. Néanmoins, le comportement du résonateur reste non-linéaire puisque une diminution de l'amplitude de la fonction de transfert et du déphasage de sa phase se produit pour des amplitudes comprises entre 96 et 104 dBspl.

Le décalage de la fréquence de résonance de Helmholtz est de signe négatif comme le montre la figure (10.9). La valeur ω^{nl}_{res2} déterminée dans les calculs précédents (section précédente) est donc retenue pour le modèle non-linéaire du résonateur de Helmholtz. Les résultats expérimentaux et théoriques de la valeur absolue de cet écart par rapport à la fréquence de résonance linéaire ω_0

sont comparés sur la figure (10.9). Il apparaît une nette sous estimation des effets non-linéaires du modèle dans le décalage de la fréquence de résonance. En revanche, la pente de la droite (le graphe est tracé en échelle log-log) est en bon accord avec les résultats expérimentaux. Une correction peut ainsi être apportée au modèle développé en surévaluant la valeur du coefficient des non-linéarités α. En effet, pour la valeur $\alpha = 15$ (au lieu de 1.88 dans le modèle théorique), la comparaison de l'expérience avec la théorie est satifaisante. La figure (10.9) illustre ces propos et met en évidence les effets non négligeables des non-linéarités dans la réponse d'un résonateur de Helmholtz : le décalage de la fréquence de résonance atteint, à 130 dBspl, plus de 10 Hz avec sa valeur linéaire initiale.

Pour parfaire cette étude, la fonction de transfert, compte tenu du comportement non linéaire du résonateur, est simulée pour différentes valeurs de l'intensité acoustique. Ces courbes sont tracées sur les figures (10.10), (10.11) et (10.12) pour des amplitudes de 96 et 134 dBspl au niveau du microphone aval. Les non-linéarités ont tendance, comme dans les résultats expérimentaux, à réhausser l'amplitude de la fonction de transfert autour de la fréquence de résonance et à décaller cette fréquence vers la gauche. En revanche, le deuxième pic (résonance du tube) n'est pas affecté comme c'est le cas dans la réalité. Cette différence entre la simulation et l'expérience met en lumière un défaut majeur du modèle : les effets non-linéaires n'apparaîssent que sur une plage restreinte autour de la fréquence de résonance et n'ont pas l'intensité attendue. Cette remarque peut s'expliquer par la simplicité du modèle utilisé qui ne peut pas prendre en compte tous les effets non-linéaires survenant dans le résonateur. Les mouvements tourbillonnaires dus à un décollement sur les angles droits que forment les discontinuités entre le col et la cavité ou le col et le tube principal, font partie de ces effets non pris en compte. Pour autant, le comportement général des effets non-linéaires est retrouvé par la simulation même si, pour l'amplitude comme pour la phase, les valeurs des écarts causés par la présence de non-linéarités sont sous estimées par rapport à la réalité.

En effet, une nette différence d'amplitude de la fonction de transfert apparaît entre les résultats simulés et expérimentaux pour une intensité de 134 dB (voir la figure (10.11)). Comme cet écart semble dépendre de l'amplitude de l'onde (voir la figure (10.10) où la théorie et la simulation sont comparées pour 96 dBspl), la source de cette différence peut venir de la mauvaise prise en compte des pertes visco-thermiques pour de grandes amplitudes dans le modèle. Ces pertes sont plus conséquentes lorsque l'intensité sonore est élevée car des harmoniques supérieurs sont excités : la présence de ces harmoniques, de fréquences plus élevées, augmente la part des pertes, proportionelles à $\sqrt{\omega}$. Le modèle développé dans cette étude n'en tenant pas compte, cette remarque peut être une des causes de la sous estimation des phénomènes non-linéaires. Pour ce qui concerne la phase, les mêmes défauts sont mis en évidence. Cet écart entre la simulation et l'expérience vient certainement de l'addition de la mauvaise détermination des pertes et de la vision trop simpliste des effets non-linéaires.

Enfin, un dernier problème attire notre attention lors de l'analyse de ces graphes. Lorsque la valeur de α est corrigée d'après les données du décalage de la fréquence de résonance, l'amplitude de la fonction de transfert simulée présente un "pic" (voir la figure (10.12)) inexistant dans les résultats expérimentaux. Cette correction, sensée pallier la faiblesse du modèle, introduit un artéfact de calcul dont la cause est difficile à cerner. La seule observation que l'on puisse faire est que ce "pic" apparaît à la fin de la plage fréquentielle perturbée par les non-linéarités. Il est peut être dû à une discontinuité dans le modèle : les résonances du tube principal prennent subitement le dessus sur les effets du résonateur ce qui cause un "saut" dans l'amplitude de la fonction de transfert simulée. Il faut toutefois noter que cette erreur n'apparaît que pour une intensité sonore proche de 130 dB qui est un cas extrême dans cette application.

Finalement, les résultats, pour un volume de hauteur 6.5 cm et pour une intensité de 125.5 dBspl, sont présentés sur la figure (10.13). La comparaison des résultats théoriques (non corrigés) et expérimentaux semble bien meilleure que pour le cas précédent. Les effets des non-linéarités dépendent du volume de la cavité et le modèle prédit de façon bien meilleure la réalité lorsque

ce volume est plus faible. Comme les résultats de la simulation épousent de façon satisfaisante le comportement du résonateur autour de sa fréquence de résonance, on peut penser que les effets non-linéaires annexes (comme les tourbillons dont on a déjà parlé), qui ne sont pas pris en compte dans le modèle, occupent une part moins importante dans la réponse de ce résonateur de Helmholtz. L'analyse du modèle conclut à une augmentation des effets non-linéaires lorsque le volume de la cavité augmente, ce qui corrobore les propos précédents. Pour illustrer cette dernière remarque, on peut approximer le comportement du résonateur de Helmholtz à un système masse-ressort (voir la figure (10.2)). Lorsque le volume de la cavité est petit, le ressort est considéré comme "dur" alors que lorsque le volume est grand, il peut être considéré comme "mou". Intuitivement, on comprend que le comportement non-linéaire d'un ressort "mou" apparaît plus facilement et plus rapidement que pour un ressort "dur" ce qui expliquerait que le modèle soit plus proche de la vérité dans le cas où le volume est petit (seuls les effets non-linéaires dûs à l'élasticité de l'air sont visibles).

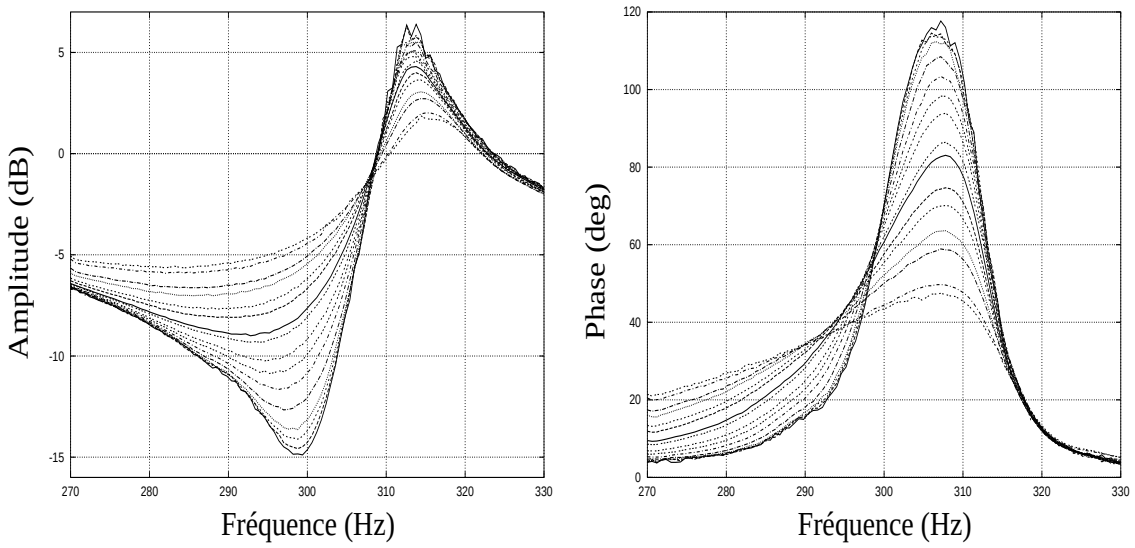

FIG. 10.7 – Fonction de transfert d'un résonateur de Helmholtz branché pour des amplitudes de pression acoustique au niveau du microphone amont (M1, voir figure (10.1)) variant de 96 dBspl à 132 dBspl. (a) amplitude (b) phase.

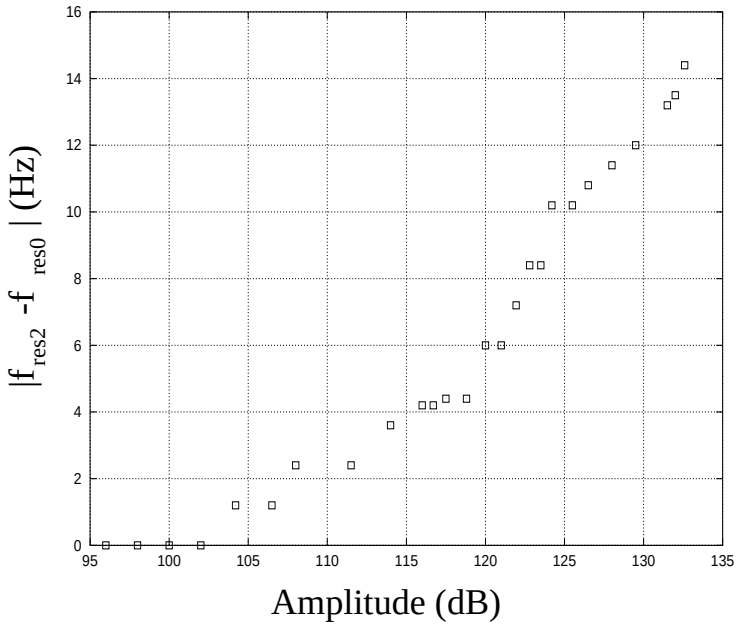

FIG. 10.8 – Valeur absolue du décalage de la fréquence de résonance du résonateur de Helmholtz en fonction de l'amplitude de l'onde de pression en dBspl.

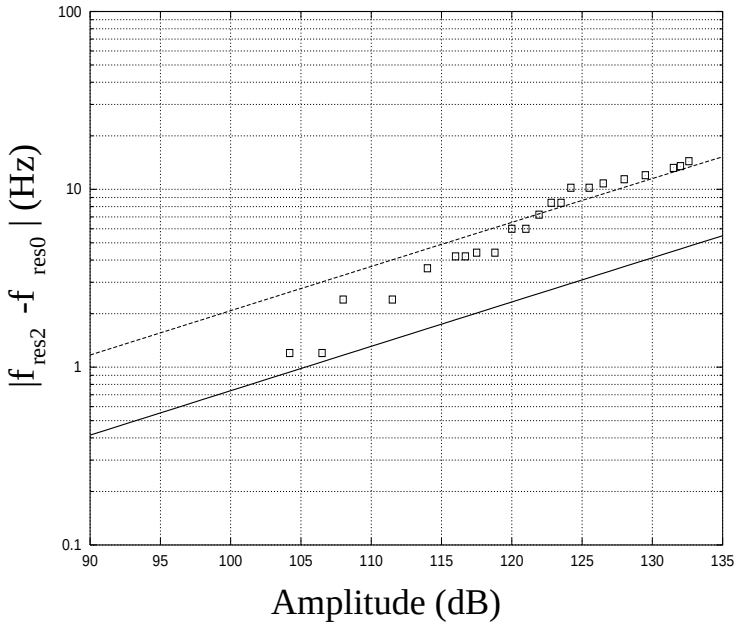

FIG. 10.9 – Valeur absolue du décalage de la fréquence de résonance du résonateur de Helmholtz en fonction de l'amplitude de l'onde de pression en dBspl. Les points présentent les valeurs expérimentales (□) et les droites illustrent le modèle analytique théorique ($\alpha = 1.88$ en traits pleins) et le modèle analytique ajusté ($\alpha = 15$ en trait pointillés).

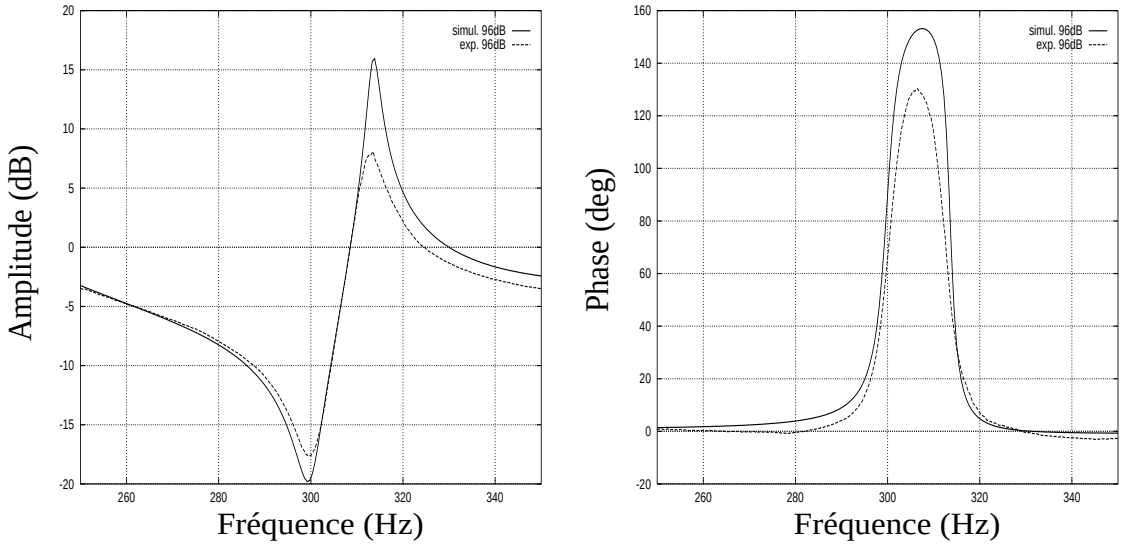

FIG. 10.10 – Comparaison de la fonction de transfert simulée et expérimentale d'un résonateur de Helmholtz branché pour une amplitude de la pression de 96 dBspl au niveau du micro en aval (M2, voir figure (10.1)). (a) amplitude (b) phase.

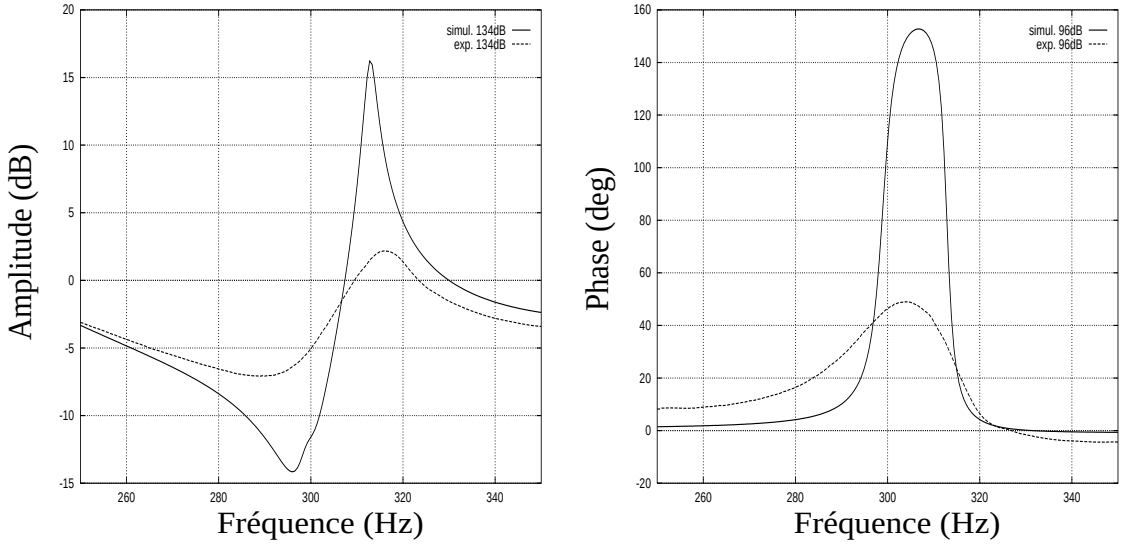

FIG. 10.11 – Comparaison de la fonction de transfert simulée et expérimentale d'un résonateur de Helmholtz branché pour une amplitude de la pression de 134 dBspl au niveau du micro en aval (M2, voir figure (10.1)). (a) amplitude (b) phase.

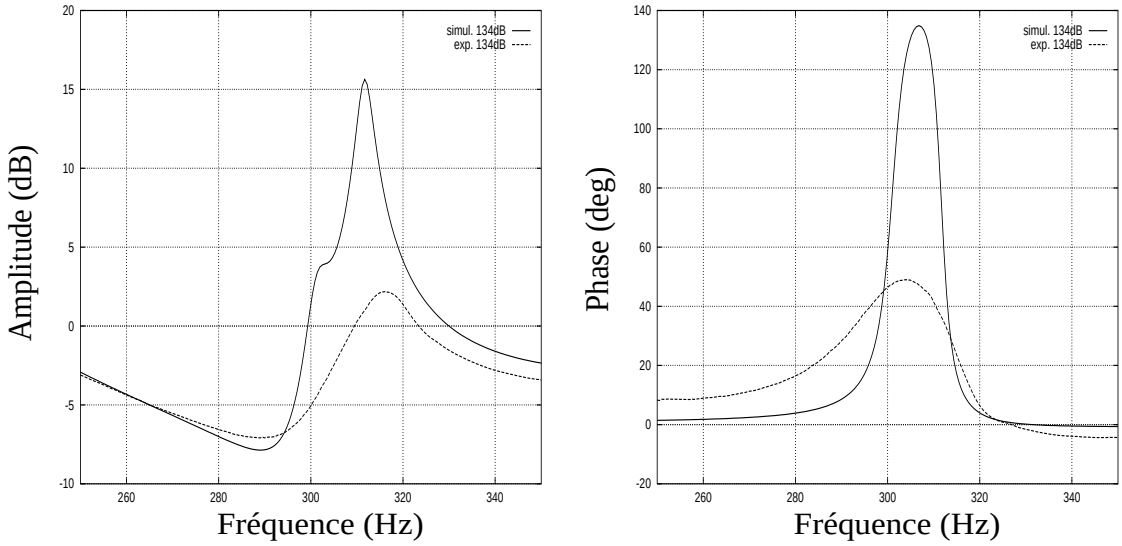

FIG. 10.12 – Comparaison de la fonction de transfert simulée et ajustée ($\alpha = 15$) et expérimentale d'un résonateur de Helmholtz branché pour une amplitude de la pression de 134 dBspl au niveau du micro en aval (M2, voir figure (10.1)). (a) amplitude (b) phase.

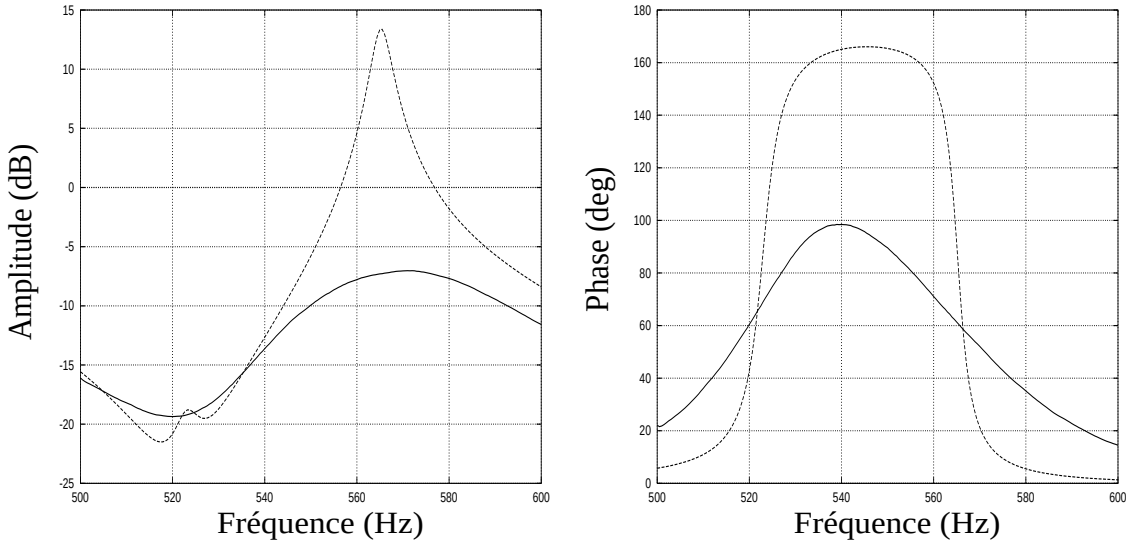

FIG. 10.13 – Comparaison de la fonction de transfert simulée et expérimentale d'un résonateur de Helmholtz de hauteur 6.5 cm branché pour une amplitude de la pression de 125.5 dBspl au niveau du micro en aval (M2, voir figure (10.1)). (a) amplitude (b) phase.

10.6 Conclusion

Les effets non-linéaires qui apparaîssent dans le comportement d'un résonateur de Helmholtz lorsque l'intensité sonore augmente ont clairement été mis en évidence expérimentalement. Un modèle analytique simple a été développé. Le comportement général du résonateur est prédit par ce modèle théorique mais un net écart avec les résultats expérimentaux apparaît. Les nombreuses sources de non-linéarités présentes dans un résonateur de Helmholtz n'ont pas pu être toutes prises en compte dans le modèle analytique par souci de simplicité. Toutefois, une correction artificielle peut être apportée pour rendre le modèle plus conforme à la réalité lorque le volume du résonateur est important. A l'inverse, cette correction n'apparaît plus nécessaire lorsque le volume de la cavité du résonateur est diminué car le modèle analytique permet, alors, de prévoir le décalage de la fréquence de résonance dû aux effets des non-linéarités.

Ce modèle peut facilement être amélioré en tenant compte des ordres supérieurs dans le développement de la loi de Laplace. Néanmoins, des effets non-linéaires supplémentaires, traduisant par exemple les mouvements tourbillonnaires dans le résonateur, doivent être inclus pour décrire complètement le comportement non-linéaire du résonateur de Helmholtz et ne plus faire appel à une correction. Ces constatations prouvent que ce modèle (l'étude d'autres sortes de résonateurs peut d'ailleurs facilement s'en inspirer) n'est pas figé dans cette version simple et peut très facilement évoluer.

Ce modèle de résonateur de Helmholtz non-linéaire, malgré ses défauts, est largement suffisant pour apparaître dans la simulation numérique de la propagation dans un réseau acoustique. Les non-linéarités seront présentes dans la propagation par l'intermédiaire des admittances d'entrée des résonateurs et seront considérées, à l'instar du potentiel, comme ponctuelles.

Dans le chapitre suivant, qui étudie d'un point de vue expérimental la propagation à travers un réseau formé par des résonateurs de Helmholtz, on utilise ce modèle non-linéaire de résonateur dans la description de la transmission. Grâce à l'étude expérimentale précédente, on dispose d'un milieu comportant des non-linéarités localisées à chaque résonateur et ce sont leurs influences et leurs effets sur la localisation qui font l'objet de notre attention dans la prochaine étude.

Chapitre 11

Propagation à travers un réseau acoustique

11.1 Théorie

11.1.1 Le réseau acoustique

Le milieu de propagation étudié dans ce travail est un réseau unidimensionnel suivant x. Il est représenté par un guide d'onde acoustique de section S sur lequel sont raccordées des dérivations de section s_c. Ces dérivations peuvent être, typiquement, des résonateurs de Helmholtz, des trous latéraux ou des cheminées. Aucune connexion n'existe entre les dérivations et les raccordements entre ces dérivations et le tube principal sont supposés suffisament petits pour être considérés comme ponctuels et sont repérés par les abscisses x_n (figure 11.1). On suppose que les dimensions transversales des différents tuyaux sont petites devant la longueur d'onde et donc que seuls les modes plans se propagent. Cette hypothèse est largement vérifiée pour les basses fréquences.

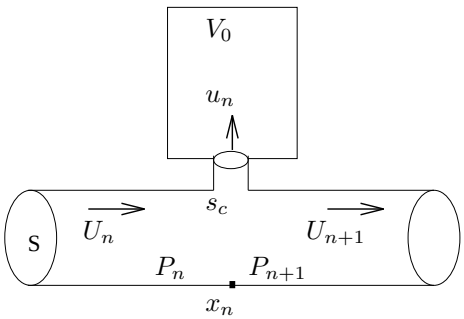

FIG. 11.1 – Schéma de principe de la dérivation utilisée dans l'étude expérimentale.

Au raccordement des résonateurs et du tube principal, les hypothèses sont les suivantes :
- le débit acoustique est conservé,
- la pression est constante de tous les cotés de la dérivation.

L'uniformité de la pression n'est qu'une approximation, mais elle n'engendre pas, qualitativement, d'erreurs importantes. Les dérivations choisies (résonateur de Helmholtz) produisent des discontinuités de première espèce sur le débit acoustique aux point x_n.

L'uniformité de la pression s'écrit :

$$P(x_n^+) = P(x_n^-) = P_d$$

où P_d représente la pression au niveau de la dérivation. On utilisera dans la suite la notation :

$$P(x_n^+) = P_{n+1} \text{ et } P(x_n^-) = P_n.$$

La discontinuité du débit au niveau des dérivations se met sous la forme :

$$U_n = U_{n+1} + u_n,$$

où $U_n = Sv(x_n^-) = Sv_n$, $U_{n+1} = Sv(x_n^+) = Sv_{n+1}$ et $u_n = s_c v_d$ sont respectivement les débits à gauche, à droite et dans la dérivation (figure (11.1)). $v(x)$ représente la vitesse acoustique au point x et v_d la vitesse acoustique dans le col du résonateur.

11.1.2 L'équation de propagation

Les différentes approximations faites sur le comportement de la pression et du débit acoustique permettent d'écrire l'équation de propagation dans un réseau acoustique formé par un guide d'onde principal chargé par des résonateurs de Helmholtz aux points x_n. L'approximation des ondes planes est utilisée et la pression se met sous la forme $P(x,t) = P(x)e^{j\omega t}$ (dans la suite des calculs, la dépendance temporelle ne sera pas explicitée). L'équation d'Euler reliant la pression et la vitesse pour des ondes planes est donnée par :

$$-\frac{dP(x)}{dx} = j\omega\rho v(x), \tag{11.1}$$

La relation de conservation du débit acoustique peut se mettre sous la forme :

$$S(v_n - v_{n+1}) = s_c Y_n(P_n) P_n \tag{11.2}$$

où $Y_n(P_n)$ qui représentent l'admittance d'entrée du résonateur définie par :

$$u_n = s_c Y_n(P_n) P_n$$

peut dépendre de l'amplitude de l'onde de pression lorsque les non-linéarités sont prises en compte (voir section précédente). En remplaçant dans l'équation (11.2), l'expression de $v(x)$ donnée par l'équation (11.1), la relation de discontinuité de la dérivée de la pression acoustique à chaque dérivation s'écrit :

$$\frac{dP(x)}{dx}|_{x_n^+} - \frac{dP(x)}{dx}|_{x_n^-} = j\omega\rho\frac{s_c}{S}Y_n(P(x_n))P(x_n). \tag{11.3}$$

Comme cela a été démontré dans la partie théorique de ce document, la relation de discontinuité en x_n qui fait office de conditions aux limites alliée à l'équation de propagation entre deux discontinuités permet de déterminer l'équation de propagation d'une onde acoustique dans un réseau. Écrite en termes de distribution, cette équation et ses conditions aux limites deviennent :

$$\frac{d^2P(x)}{dx^2} + k^2P(x) = \sum_n \sigma_n(P)\delta(x - x_n)P(x), \tag{11.4}$$

où

$$\sigma_n(P) = -j\omega\rho\frac{s_c}{S}Y_n(P_n) \text{ et } k = \frac{\omega}{c}$$

représentent, respectivement, le saut de la dérivée de la pression en x_n et le nombre d'onde. Le second membre de cette équation représente les sources secondaires qui modifient la propagation par rapport à un guide d'onde sans dérivation. Les discontinuités se manifestent au travers du terme d'admittance d'entrée du résonateur dont le comportement dépend fortement de la fréquence des ondes et de leurs amplitudes. Les propriétés du milieu représenté ici varient donc avec la fréquence de l'onde se propageant. C'est donc par l'intermédiaire du terme d'admittance d'entrée que les non-linéarités apparaîssent dans l'équation de propagation. L'équation (11.4) est du même type que celle étudiée dans la partie théorique (Partie 1) et elle correspond, par conséquent, à la propagation dans un potentiel du modèle de Kronig-Penney illustré par un peigne de Dirac de valeur $\sigma_n(P)$ aux points x_n. La dépendance de $\sigma_n(P)$ à l'amplitude de l'onde permet

de montrer que les non-linéarités ont bien un caractère localisé dans cette application acoustique.

Remarque

Les pertes visco-thermiques seront bien prises en compte lors de la propagation. Leur calcul est effectué dans la partie consacrée à la détermination de l'admittance d'entrée du résonateur de Helmholtz.

11.2 Expérience

11.2.1 Introduction

Comme on a pu le voir au début de cette partie, de nombreux chercheurs ont étudié expérimentalement le problème de la propagation dans les réseaux. Tout d'abord, la propagation d'une onde le long d'une corde vibrante chargée par des masses ou des systèmes masse-ressort est l'expérience qui apparaît le plus souvent dans la littérature, sûrement à cause de sa simplicité. Ces études ont notamment mis en évidence le phénomène de dispersion dans un réseau ordonné et la localisation dans un réseau unidimensionnel désordonné. Néanmoins, la détection des vibrations d'une corde n'est pas chose facile et la détermination expérimentale de grandeurs physiques pouvant être modélisées analytiquement ou au moyen d'une simulation numérique est très complexe. Malgré cela, le régime non-linéaire est abordé à travers ce dispositif expérimental (McKenna et *al* 1992 [109]) mais ne donne pas de résultats concluants. Dans les recherches en acoustique, quelques articles ont été publiés sur la propagation dans les réseaux désordonnés (Depollier et *al* 1986 [23], Tourin et *al* 1997 [139]) mais très peu abordent la question de la présence commune de non-linéarités et de désordre d'un point de vue expérimental.

L'étude expérimentale présentée dans ce chapitre a pour vocation, entre autres, de mettre en évidence l'influence des non-linéarités sur le comportement d'une onde acoustique dans un réseau désordonné. Une étude préliminaire du système en régime linéaire est indispensable pour comprendre les phénomènes physiques (présents) et pour valider les modèles explicités dans les chapitres précédents.

Une première section est consacrée à l'étude de la propagation acoustique en régime linéaire dans un réseau ordonné puis désordonné au travers de trois grandeurs physiques distinctes : le coefficient de transmission, la longueur de localisation et la vitesse de groupe de l'onde acoustique. Toutes ces grandeurs sont déterminées expérimentalement et comparées à des résultats analytiques ou simulés numériquement. L'utilisation de la transformée de Wigner-Ville permet d'expliciter les propriétés de dispersion du milieu ; elle sert en plus à déterminer la vitesse de groupe de l'onde.

Dans un deuxième temps, les effets des non-linéarités, d'abord sur la propagation dans un réseau périodique puis dans un réseau désordonné, sont mis en évidence. Pour cela, nous déterminons expérimentalement la longueur de localisation définie en régime non-linéaire. La notion de transmission en énergie est développée et permet de montrer l'influence du comportement non-linéaire des résonateurs sur la localisation.

11.2.2 Propagation dans un réseau : le cas linéaire

11.2.2.1 Coefficient de transmission

Remarques préliminaires

Comme on l'a montré dans le chapitre consacré à la détermination expérimentale des coefficients de transmission et de réflexion, l'efficacité de la mesure dépend beaucoup de la distance entre les différents microphones du dispositif. Un compromis a été fait entre une grande précision dans les basses fréquences et la possibilité d'étudier la transmission au dessus de 2500 Hz. Le premier cas ne permet pas d'accéder à des fréquences élevées et le deuxième interdit tout résultat

aux basses fréquences. Pour cette raison, les coefficients, présentés dans la suite de ce travail, présentent des valeurs physiquement incorrectes autour de la fréquence de résonance de la partie de guide entre les différents microphones en amont et aval du réseau. Cette longueur de tube est de 11 cm et la plage de fréquences correspondant aux valeurs fausses se situe entre 1500 et 1600 Hz. Ces mesures incorrectes se distinguent aisément puisqu'elles prédisent un coefficient de transmission supérieur à 1. Tous les résultats sont présentés en dB et la région incriminée n'apparaît pas sur les figures (les amplitudes des coefficients sont supérieurs à 1).

Le cas du réseau périodique

La figure (11.2) présente à la fois la relation de dispersion des ondes de Bloch et l'amplitude du coefficient de transmission dans le cas d'un réseau périodique où tous les résonateurs sont identiques. Leur volume est maximum et correspond à une hauteur de la cavité de 16.5 cm. Plusieurs choix permettent de simuler le coefficient de transmission et la solution de la méthode de "plongement invariant" a été choisie pour ce cas là. Les différents régimes de propagation sont aisément décelables : les bandes interdites correspondent à un coefficient de transmission proche de 0 ou à une norme du cosinus de la phase des ondes de Bloch supérieure à 1 (notées par un rectangle gris sur l'axe des fréquences) ; les bandes passantes se distinguent par un coefficient de transmission presque unitaire et pour les valeurs de la relation de dispersion comprises entre -1 et 1. Les comparaisons entre la théorie ou la simulation et l'expérience témoignent du bon accord entre le modèle théorique développé et les résultats analytiques. Seule la troisième bande interdite, nommée généralement la bande de Bragg et causée par la périodicité du réseau, subit un décalage en fréquence lors de la simulation (ou du calcul analytique). Celui-ci est dû aux erreurs dans le placement des résonateurs du dispositif expérimental. L'espacement entre les dérivations n'est pas exactement égal à 10 cm. Les deux premières bandes interdites sont, quant à elles, le fruit de la présence des résonateurs et correspondent aux deux premières fréquences de résonance de celui-ci : la fréquence de résonance de Helmholtz à 300 Hz et celle du tube servant de cavité située entre 1100 et 1200 Hz. La valeur fréquentielle de ces deux bandes est tout à fait satisfaisante et les petites différences de largeur de bande qu'il existe entre la théorie et l'expérience viennent des incertitudes sur le placement des dérivations. Les pertes sont assez bien décrites par le modèle puisque l'amplitude simulée du coefficient de transmission dans les bandes passantes correspond à celle trouvée par l'expérience. La différence d'amplitude dans chacune des bandes interdites s'explique par le nombre de résonateurs. Les bandes interdites de Helmholtz sont beaucoup plus marquées que celles de Bragg. En effet, dans les bandes de Bragg, l'amplitude du coefficient de transmission est inversement proportionnelle au nombre de résonateurs du réseau (Sprung et Wu 1993 [7]). Dans notre cas, le nombre limité de résonateurs ne permet pas au coefficient de transmission de dépasser -15 dB.

La phase déroulée du coefficient de transmission (figure (11.3)) est conforme à nos espérances : dans les bandes passantes, elle est représentée par une droite synonyme de propagation alors que dans les bandes interdites, elle a un comportement aléatoire qui met en évidence une absence totale de transmission.

L'amplitude du coefficient de réflexion est présentée sur la figure (11.4). Les différents régimes de propagation se distinguent plus difficilement qu'avec l'observation du coefficient de transmission mais l'allure générale est tout à fait conforme aux résultats théoriques. La phase de ce coefficient n'est pas présentée dans ce travail, puisqu'elle n'apporte pas d'éléments supplémentaires pour la compréhension du problème.

L'examen de ces amplitudes, en utilisant une échelle linéaire, fait apparaître une succession d'oscillations dans les bandes passantes (celles-ci sont d'ailleurs très nettement visibles sur le coefficient de réflexion) produites par la taille finie du réseau. Ces oscillations sont décrites dans la littérature comme un effet de saturation (Griffiths et Taussig 1992 [8]) et leur nombre, dans chaque bande passante, est égal au nombre de résonateurs du réseau.

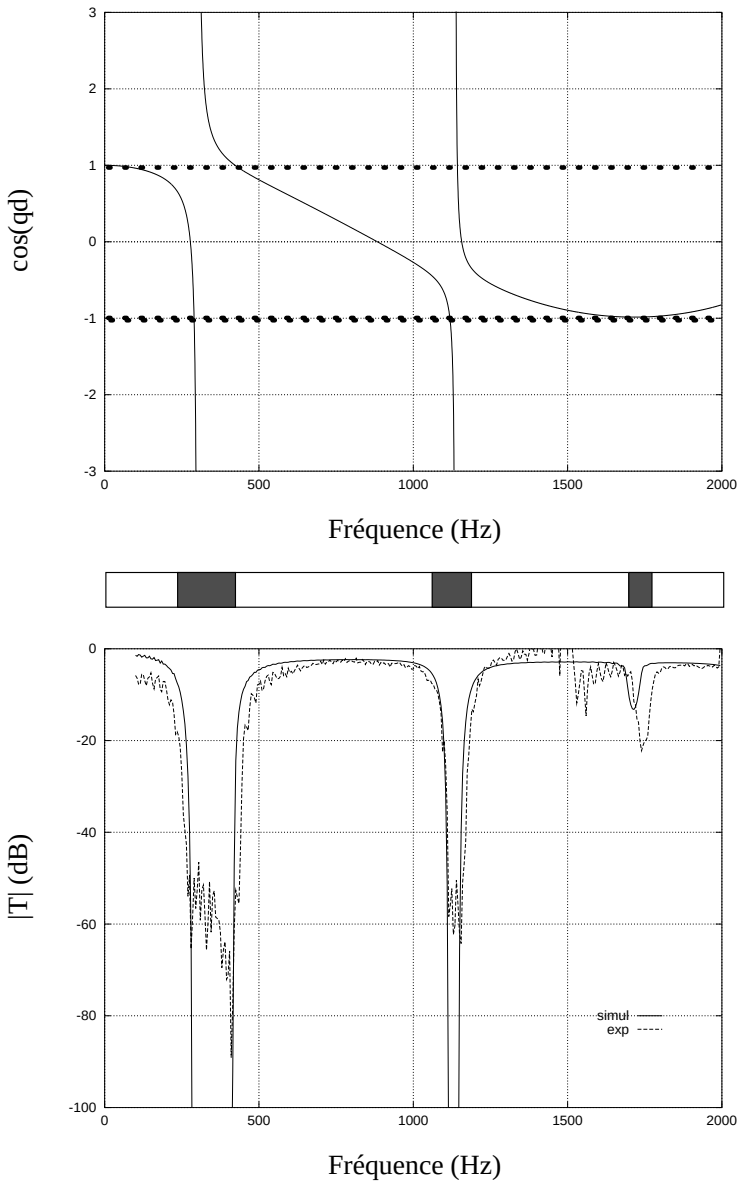

FIG. 11.2 – (a) Cosinus de la phase des ondes de Bloch d'un réseau ordonné. (b) Amplitude (en dB) du coefficient de transmission du réseau ordonné. Les positions des bandes interdites sont soulignées au moyen d'un rectangle gris entre les deux graphes.

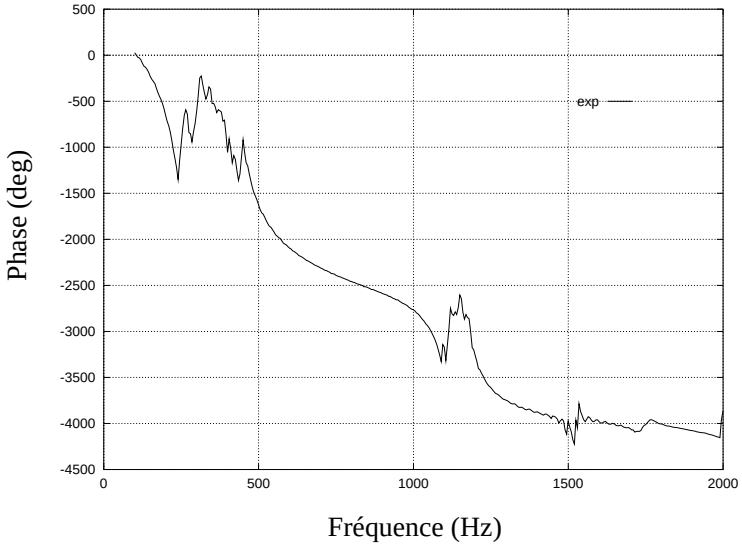

FIG. 11.3 – Phase déroulée (en degrés) du coefficient de transmission du réseau ordonné.

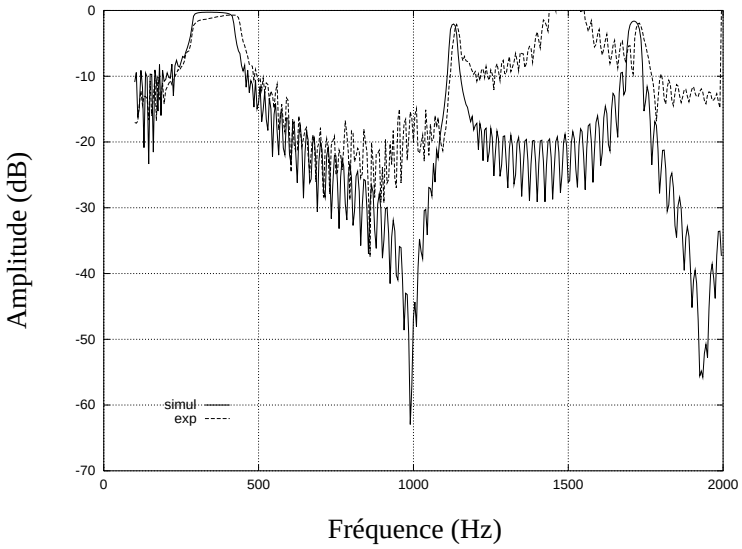

FIG. 11.4 – Amplitude (en dB) du coefficient de réflexion du réseau ordonné.

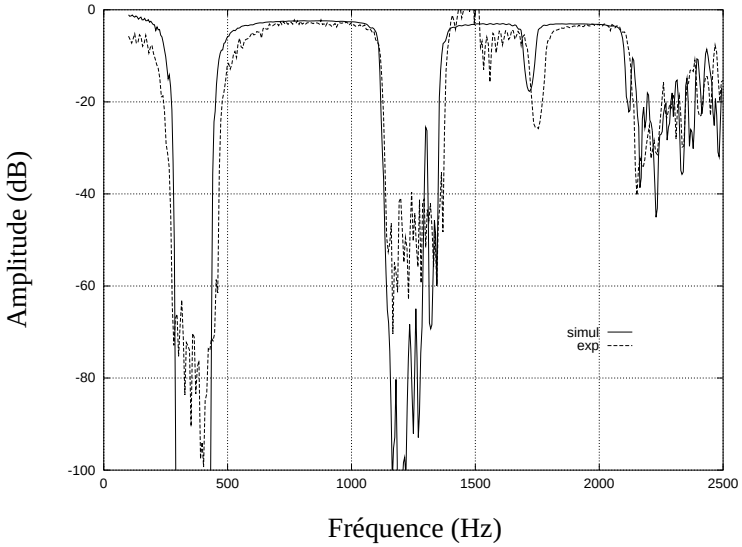

FIG. 11.5 – Amplitude (en dB) du coefficient de transmission d'un réseau désordonné pour $\epsilon = 10$ et pour $\bar{l}_V = 15$ cm.

Le cas du réseau désordonné

Dans ce cas, on utilise seulement le coefficient de transmission pour accompagner nos propos car il permet de distinguer plus précisément les différentes bandes.

Un premier désordre décrit par un écart type $\epsilon = 10$ et avec une longueur moyenne pour la cavité égale à $\bar{l}_V = 15$ cm est étudié sur la figure (11.5). L'effet sur la transmission est indéniable : la largeur de la deuxième bande interdite est largement augmentée et la première subit un faible changement par rapport au cas ordonné. Comme prévu, la bande de Bragg ne présente aucune modification car le désordre ne porte que sur les volumes des cavités et donc, indirectement, sur les fréquences de résonance des diffuseurs. Les positions des différentes bandes de Helmholtz sont décalées par rapport au cas ordonné à cause du changement de longueur moyenne des cavités. La simulation est tout à fait en accord avec l'expérience et cet exemple permet de valider la méthode de plongement invariant en présence de désordre dans le réseau.

La figure (11.6) présente l'amplitude du coefficient de transmission pour un désordre plus important que le précédent. Un écart type est donné par $\epsilon = 5$ ce qui implique une longueur moyenne de la cavité égale à $\bar{l}_V = 13$ cm. La troisième bande passante du cas ordonné est complètement annulée par l'arrivée de ce désordre. Le réseau devient complètement opaque aux ondes dont la fréquence est comprise entre 1200 et 1800 Hz. Comme le prédit la théorie, on vérifie que l'atténuation augmente avec le désordre. La deuxième fréquence de résonance étant la plus sensible aux changements de longueur de la cavité, c'est la deuxième bande interdite qui bénéficie des effets de l'apparition du désordre.

11.2.2.2 La notion de longueur de localisation

La longueur de localisation peut être déterminée expérimentalement grâce aux microphones placés au niveau de chaque résonateur. On observe l'allure spatiale de l'amplitude RMS de l'onde et son atténuation exponentielle, lorsque la fréquence de la source se trouve dans une bande interdite. On peut distinguer le cas d'un réseau ordonné et d'un réseau désordonné.

Pour le réseau ordonné, on représente le carré de l'amplitude RMS de l'onde le long du tube pour différentes fréquences : la fréquence de résonance des résonateurs (300 Hz) et une fréquence située sur le bord de la première bande interdite (430 Hz). La figure (11.7) présente les résultats. Une nette différence apparaît suivant la fréquence. La résonance de Helmholtz annihile toute propagation alors que pour $f = 430$ Hz l'atténuation est bien moins importante. L'allure spatiale de l'onde peut être approximée à une droite dont la pente correspond à l'inverse de la

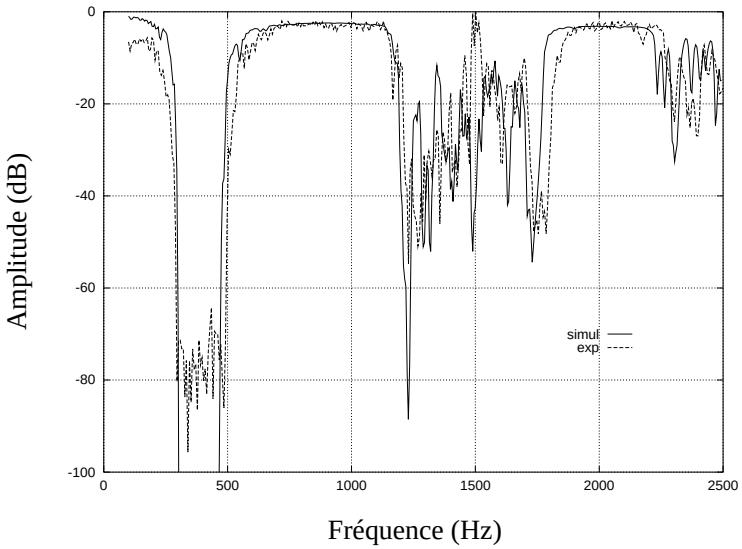

FIG. 11.6 – Amplitude (en dB) du coefficient de transmission d'un réseau désordonné pour $\epsilon = 5$ et pour $\bar{l}_V = 13$ cm.

longueur de localisation : cette longueur dépend de la fréquence et elle est d'autant plus faible que la fréquence se trouve à l'intérieur de la bande interdite. Ainsi, nous avons mis en évidence, expérimentalement, la décroissance exponentielle de l'onde dans les bandes interdites d'un réseau ordonné. Cette atténuation dépend du placement de la fréquence dans la bande interdite et elle est reliée à la longueur de localisation.

Dans le cas d'un réseau désordonné, l'évolution de l'amplitude le long du tube permet, à nouveau, d'évaluer la longueur de localisation (figure 11.8) pour une fréquence placée sur le bord de la première bande interdite (450 Hz). Deux cas sont étudiés correspondant à des désordres différents. La figure (11.8) montre la dépendance de cette longueur à l'importance du désordre : la pente de l'atténuation est bien plus importante lorsque le désordre est grand. On peut insister sur le fait que la fréquence (450 Hz) est située dans une bande passante du cas ordonné, ce qui souligne l'effet de la présence de désordre sur la transmission. Même lorsque celui-ci est faible ($\epsilon = 10$), le désordre interdit toute propagation après une distance de 2.5 m de réseau. Cette expérience a permis de déterminer la longueur de localisation (pente de la droite de décroissance en échelle logarithmique) pour plusieurs désordres et de mettre en évidence la dépendance de cette longueur à l'importance du désordre.

11.2.2.3 Mise en évidence de la dispersion

La méthode basée sur le calcul de la pseudo transformée de Wigner-Ville ou de la transformée de Fourier à court terme est utilisée pour mettre en évidence la dispersion des ondes dans un réseau ordonné ou désordonné. Les figures (11.9) présentent une illustration de l'énergie de l'onde dans le plan temps-fréquence avant et après son passage à travers le réseau. Le signal source utilisé est de type "impulsion". L'effet de la propagation sur le front d'onde est clairement illustré par l'image de l'énergie après le réseau : les bandes interdites se distinguent aisément (l'énergie est nulle ou presque) et la dispersion est mise en évidence par des "traînes" de signal visibles sur les bords des bandes passantes. Ceci démontre la dépendance de la vitesse de propagation à la fréquence de l'onde. Les ondes dont la fréquence est située sur le bord des bandes passantes subissent un retard dû aux multiples réflexions dans le réseau. De même, l'image de l'énergie à gauche du réseau présente des "traînes" pour des fréquences comprises dans les bandes interdites. Elles sont la manifestation de la réflexion des ondes par le réseau. Cette réflexion est d'ailleurs remarquable puisqu'elle n'est pas la même pour toute la largeur de la bande interdite : elle n'est présente que sur un bord de la bande interdite et ce bord change suivant la bande ! Pour

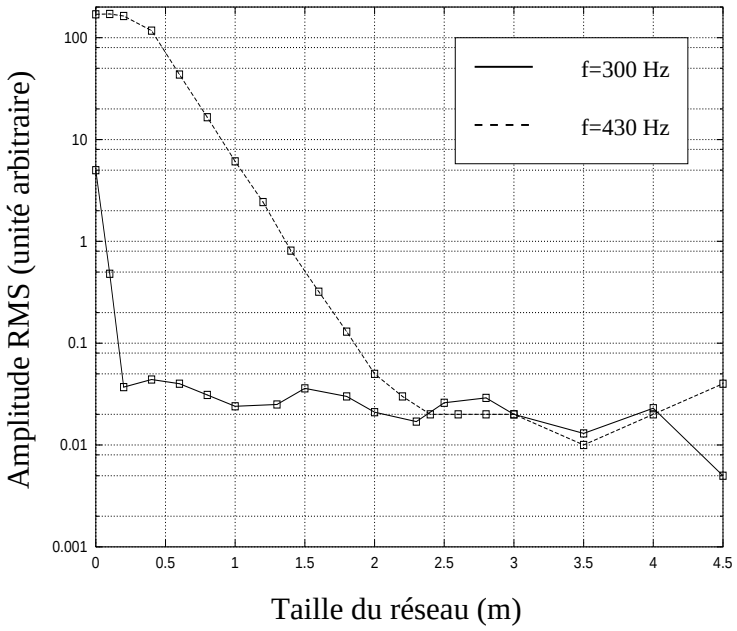

FIG. 11.7 – Amplitude de l'onde acoustique le long d'un réseau homogène pour des fréquences de 300 Hz et 430 Hz et pour des amplitudes respectives de 118 dBspl et 110 dBspl.

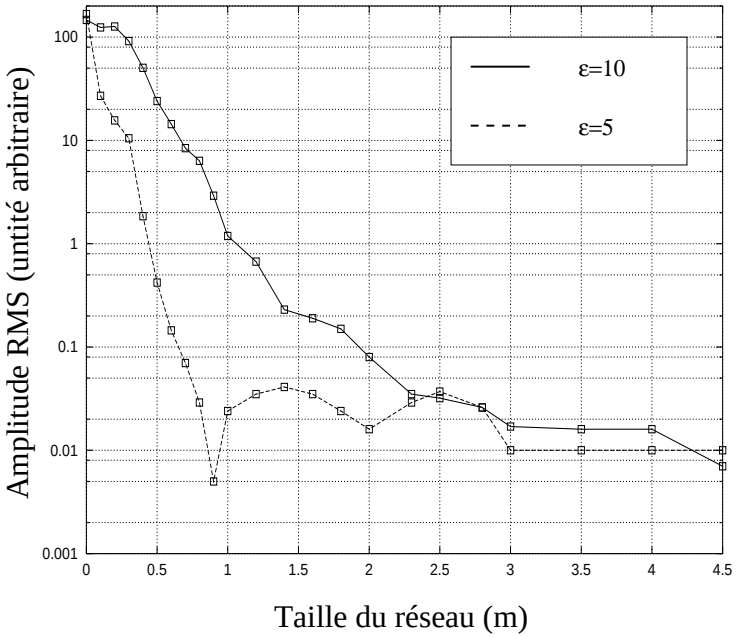

FIG. 11.8 – Amplitude de l'onde acoustique le long d'un réseau désordonné pour des désordres de $\epsilon = 10$ ($\bar{l}_V = 15$ cm) et $\epsilon = 5$ ($\bar{l}_V = 13$ cm) et pour une fréquence de 450 Hz. Les amplitudes respectives sont de 108 dBspl et 110 dBspl.

la première bande interdite, la réflexion se manifeste sur la partie supérieure alors que pour la suivante, c'est sur le bord inférieur qu'elle se distingue. Ces différents emplacements peuvent d'ailleurs être mis en rapport avec la valeur de la relation de dispersion présentée dans l'étude du cas ordonné. En outre, l'énergie de l'onde réfléchie se distingue sur une longue période temporelle ce qui prouve l'importance des réflexions internes au réseau (le même phénomène est présent pour l'onde transmise).

La représentation de l'énergie nous permet aussi de déterminer la vitesse de propagation de l'énergie des ondes acoustiques (vitesse de groupe) à l'intérieur du réseau. Pour cela, le temps d'arrivée de chaque fréquence est relevé et est comparé au temps de passage de la même fréquence à gauche du réseau. La vitesse de propagation en est déduite et le résultat est présenté sur la figure (11.10). La vitesse est nulle dans les bandes interdites puisque l'onde n'est pas transmise et est égale à la vitesse du son en champ libre pour les bandes passantes. Certaines valeurs de cette vitesse apparaîssent supérieures dans les bandes interdites mais ce phénomène n'est dû qu'à une erreur de détermination du temps d'arrivée de la fréquence correspondante. La dispersion des ondes acoustiques dans un réseau a donc été mise en évidence dans ces résultats expérimentaux par l'application de la méthode de la pseudo transformée de Wigner-Ville.

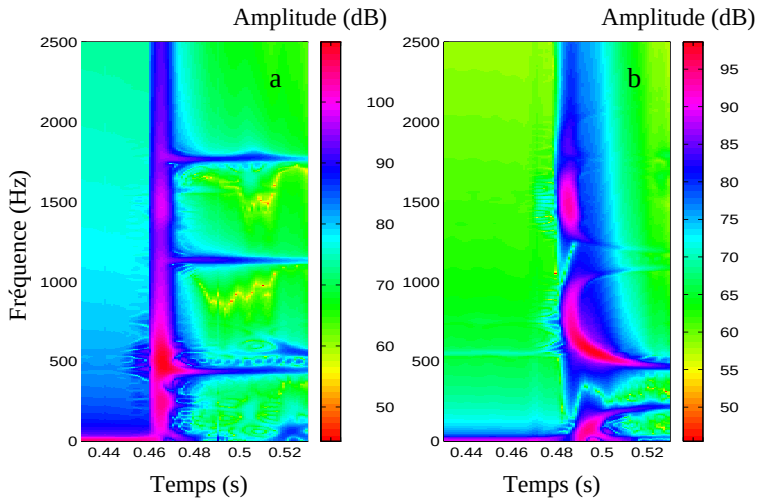

FIG. 11.9 – Pseudo transformée de Wigner-Ville d'un signal de type "impulsion" avant (a) et après (b) le réseau. L'échelle des couleurs pour l'amplitude de l'énergie est décrite à droite de chaque graphe.

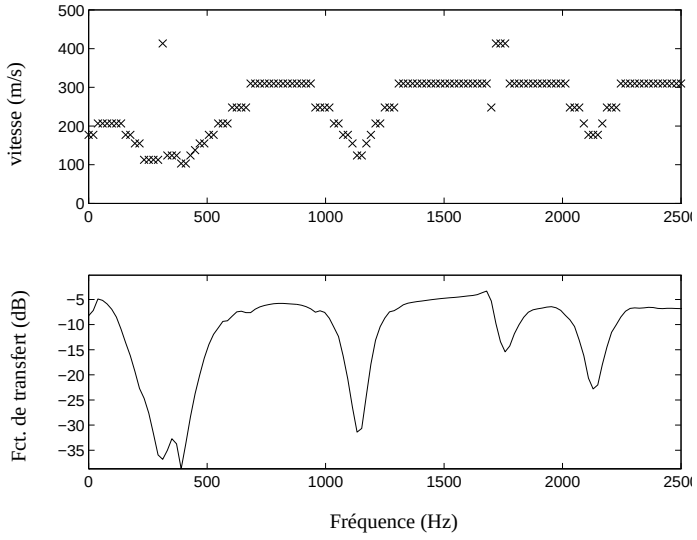

FIG. 11.10 – (a) Vitesse de propagation de l'onde acoustique à travers un réseau ordonné. (b) Rappel de l'emplacement de bandes.

11.2.3 Effets des non-linéarités sur la transmission

Les effets des non-linéarités sur la transmission sont étudiés expérimentalement au moyen de deux méthodes déjà utilisées dans le cas linéaire : la détermination de la longueur de localisation et l'illustration de l'énergie acoustique dans le plan temps-fréquence avant et après le réseau.

En toute rigueur, la notion de longueur de localisation n'est proprement définie que pour un régime linéaire. On se propose de généraliser ce concept au cas non-linéaire en assimilant cette longueur à l'inverse de la pente d'atténuation en coordonnées logarithmiques.

Cette notion de longueur de localisation est d'abord mise en évidence dans le cas d'un réseau ordonné (figure (11.11)) pour une fréquence située au bord de la première bande interdite ($f =$ 430 Hz). Différentes intensités sonores sont représentées : la pente de la décroissance ne dépend pas de l'amplitude de l'onde mais la largeur du "plateau" (visible au début du réseau), synonyme de propagation libre, augmente avec l'intensité de l'onde. La présence des non-linéarités est donc sans grande conséquence sur la transmission finale (à la fin du réseau, le signal est noyé dans le bruit de fond quelle que soit son amplitude initiale) mais les effets des non-linéarités ne sont pas inexistants. Donc, les non-linéarités ont une influence sur la propagation d'une onde dont la fréquence est située dans une bande interdite.

Pour un réseau qui présente un faible désordre ($\epsilon = 10$), les non-linéarités semblent jouer un rôle sur la transmission (figure (11.12)). La pente de l'atténuation dépend clairement de l'intensité de l'onde initiale. La longueur de localisation augmente donc avec l'amplitude ce qui montre le rôle de délocalisation des non-linéarités. La transmission finale du réseau ne subit pas cette influence mais les effets non-linéaires sur la propagation ont été démontrés grâce à cette expérience. En revanche, dès que l'importance du désordre devient trop grande, les effets de sa présence prennent largement le dessus sur ceux induits par les non-linéarités. La figure (11.13) illustre ces propos en présentant l'amplitude de l'onde le long du réseau pour un désordre de $\epsilon = 5$. Les pentes des différentes droites sont toutes identiques ce qui démontre l'insignifiance des effets non-linéaires sur la transmission lorsque l'importance du désordre devient grande. Néanmoins, comme pour le cas ordonné, un "plateau" dont la largeur augmente un peu avec l'intensité apparaît dans le comportement spatial de l'onde ce qui prouve, malgré tout, que la présence de non-linéarités ne peut être négligée complètement.

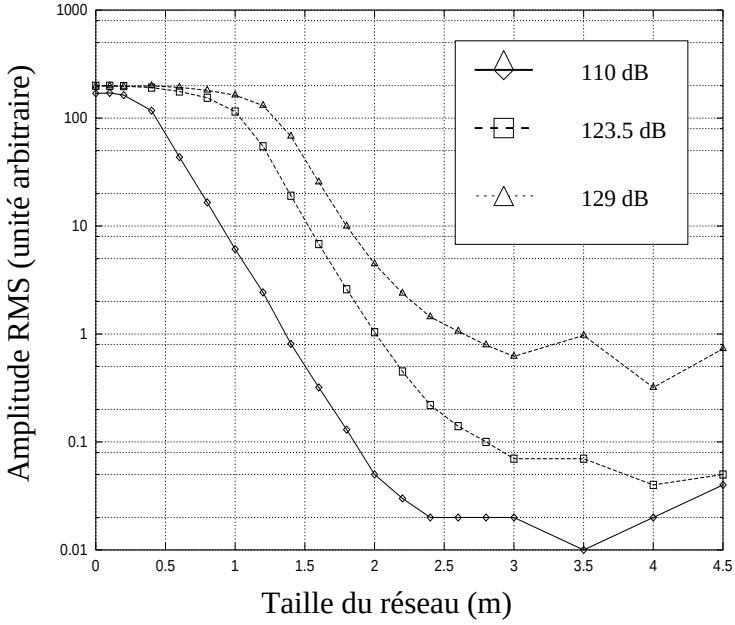

FIG. 11.11 – Amplitude de l'onde acoustique le long d'un réseau ordonné pour des amplitudes de 129 dBspl, de 123.5 dBspl et 110 dBspl et pour une fréquence de 430 Hz.

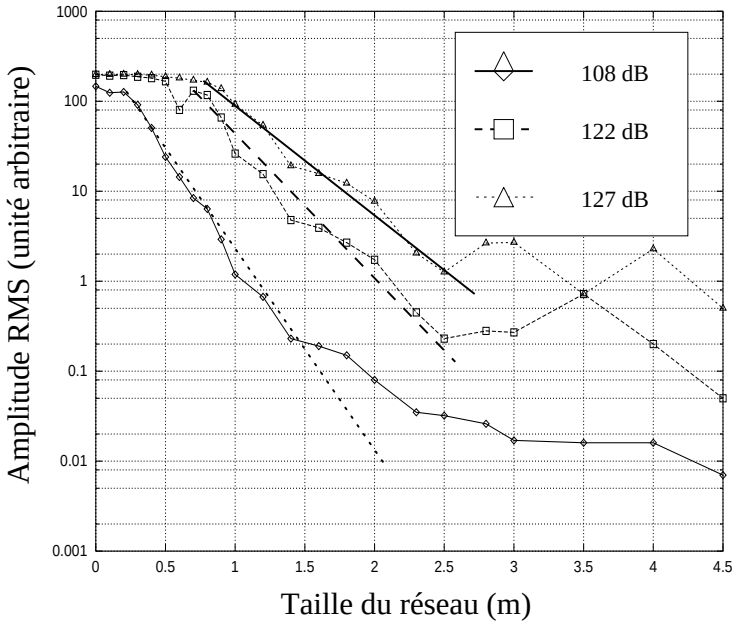

FIG. 11.12 – Amplitude de l'onde acoustique le long d'un réseau désordonné ($\epsilon = 10$) pour des amplitudes de 108 dBspl, de 122 dBspl et 127 dBspl et pour une fréquence de 450 Hz.

La compétition entre les effets non-linéaires et ceux du désordre est clairement mise en évidence par cette expérience en insistant sur le rôle, très important, de la fréquence de l'onde incidente. La fréquence doit être située sur les bords d'une bande interdite pour que les effets de la localisation soient faibles. L'influence des non-linéarités peut se distinguer et le cas ordonné montre que leur présence permet une propagation sur une distance plus grande (même si elle reste faible par rapport à la longueur du réseau). Malgré cela, la transmission finale à travers le réseau ne subit pas de profonds changements. Nous avons donc décidé d'utiliser une représentation temps-fréquence pour illustrer la propagation à travers le réseau et pour mettre en évidence l'influence des non-linéarités, par l'intermédiaire des harmoniques supérieurs, sur la transmission finale.

Les figures (11.14), (11.15) et (11.16) montrent l'énergie d'un "sinus glissant" de 100 à 600 Hz (autour de la première bande interdite). Chaque figure représente le signal, dans un plan temps-fréquence, à droite et à gauche du réseau pour trois amplitudes différentes. Pour les amplitudes importantes, les harmoniques supérieurs apparaîssent pour la première bande interdite dans le spectre du signal transmis par le réseau. Cette présence décrit manifestement le comportement non-linéaire de la propagation qui n'existe pas pour une amplitude moins élevée (voir la figure (11.14)). On observe les harmoniques 2 et 3 pour les fréquences de la première bande interdite ce qui montre que les non-linéarités ne sont présentes que dans une plage de fréquence autour de la première résonance de Helmholtz.

Si ces effets non-linéaires, inexistants lorsque l'on observe la fréquence de l'onde initiale, sont pris en compte, la transmission du réseau devrait manifester une dépendance par rapport à l'amplitude de l'onde. Pour cela, nous définissons la transmission en énergie du réseau comme le rapport de l'énergie totale transmise sur l'énergie totale incidente. La transmission doit être calculée pour chaque fréquence de l'onde incidente et le signal source utilisée ("sinus glissant") nous permet de différencier chaque instant d'émission de chaque fréquence. La figure (11.17) représente la transmission de l'énergie en fonction de la fréquence, en tenant compte de tous les harmoniques excités par l'onde initiale, pour le cas de faible amplitude (linéaire) et de forte amplitude (non-linéaire). Une nette différence de niveau, dans la bande interdite, apparaît entre les deux régimes de propagation et illustre l'effet des non-linéarités sur la propagation. La transmission augmente quand les effets non-linéaires sont présents dans la propagation. Seule la première

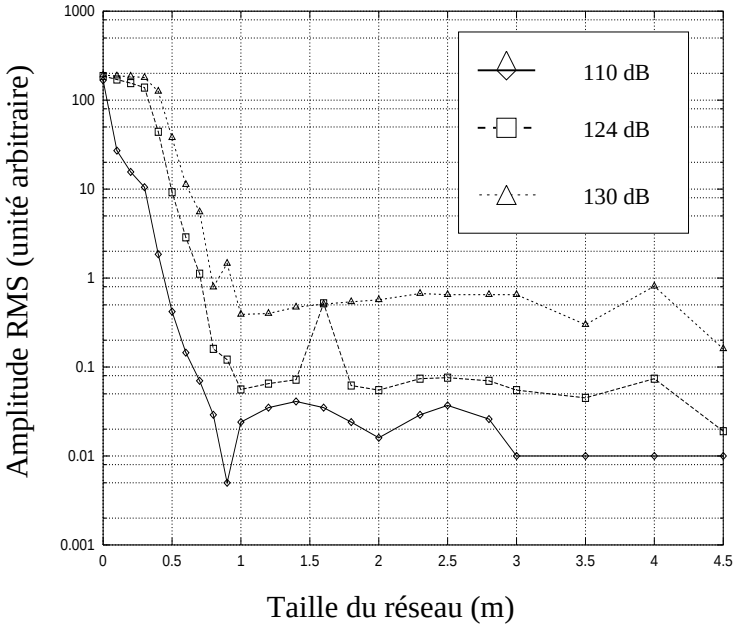

FIG. 11.13 – Amplitude de l'onde acoustique le long d'un réseau désordonné ($\epsilon = 5$) pour des amplitudes de 110 dBspl, de 124 dBspl et 130 dBspl et pour une fréquence de 450 Hz.

bande interdite bénéficie de cette propriété (non-linéaire) ce qui explique l'absence, dans ces résultats, des autres bandes.

Pour conclure l'analyse expérimentale, il est intéressant d'observer l'évolution de la fréquence instantanée dans le cas non-linéaire pour la première bande interdite. La figure (11.18) présente ce résultat et permet de déterminer précisément les dates d'arrivée des harmoniques. Ceci est très utile pour repérer le comportement non-linéaire du système étudié. Le comportement non-linéaire, pour un réseau de résonateurs de Helmholtz, est d'ailleurs remarquable puisque les harmoniques 2 et 3 se succèdent dans la bande interdite. Ceci prouve que, suivant la fréquence incriminée, les non-linéarités ne sont pas causées par les mêmes phénomènes.

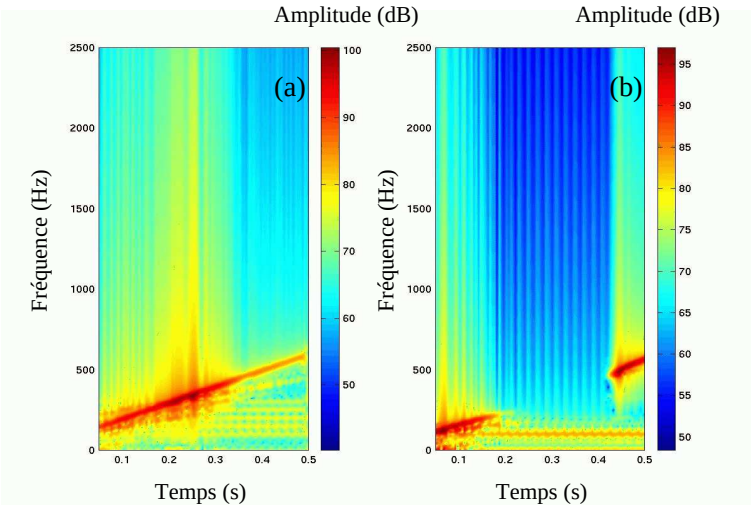

FIG. 11.14 – Transformée de Wigner-Ville d'un signal de type sinus glissant de petite amplitude. (a) Avant le réseau. (b) Après le réseau.

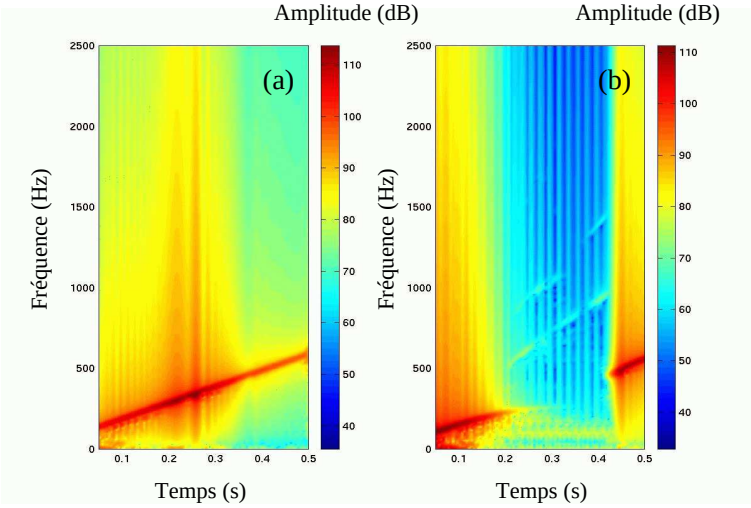

FIG. 11.15 – Transformée de Wigner-Ville d'un signal de type sinus glissant d'amplitude moyenne. (a) Avant le réseau. (b) Après le réseau.

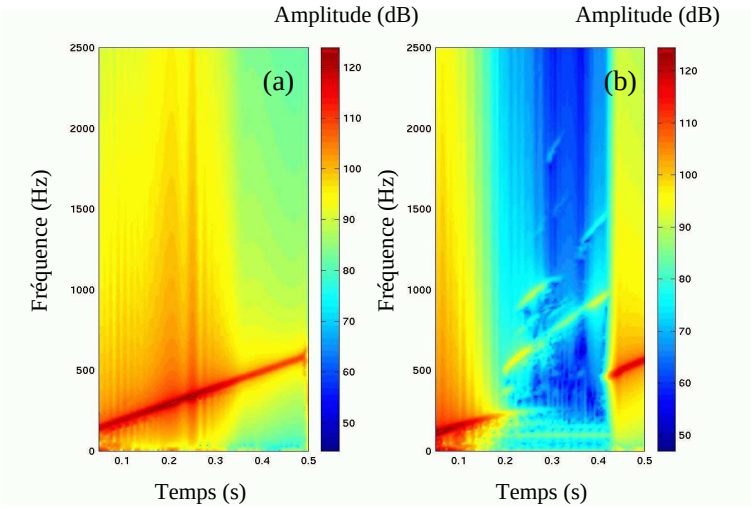

FIG. 11.16 – Transformée de Wigner-Ville d'un signal de type sinus glissant de grande amplitude. (a) Avant le réseau. (b) Après le réseau.

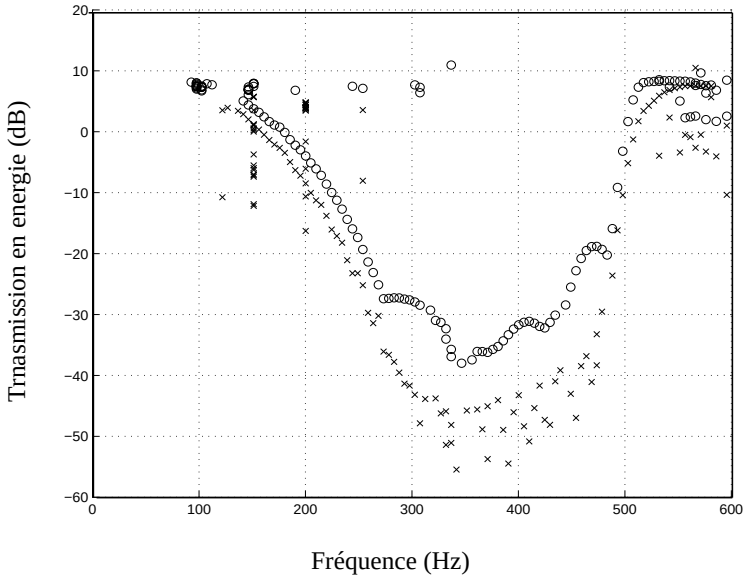

FIG. 11.17 – Transmission en énergie d'un réseau désordonné ($1^{\text{ière}}$ bande interdite). × : linéaire. ○ : non-linéaire.

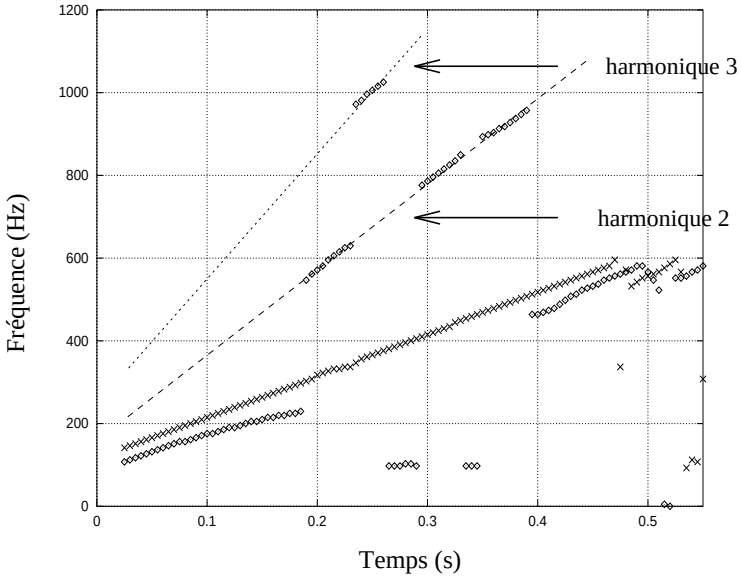

FIG. 11.18 – Fréquence instantanée pour un sinus glissant à l'entrée du réseau (×) et à la sortie (◇).

11.2.4 Conclusion

L'étude expérimentale a parfaitement montré le caractère non-linéaire de la propagation d'une onde acoustique d'amplitude élevée dans un réseau de résonateur de Helmholtz. L'excitation des harmoniques 2 et 3 justifie la vraissemblance du modèle non-linéaire de résonateur de Helmholtz développé, même si celui-ci doit être précisé pour prendre en compte les phénomènes de décollement donnant naissance à des tourbillons.

De plus, les effets de ces non-linéarités sur la transmission et donc sur la propagation d'une onde acoustique à travers un réseau ordonné ou désordonné ont clairement été démontré. Les non-linéarités entraînent une modification de l'allure spatiale de l'onde le long du réseau lorsque la fréquence appartient à une bande interdite (causée soit par l'ordre du réseau soit par le désordre du milieu). Les phénomènes non-linéaires ont été pris en compte dans la notion de transmission en énergie qui a permis de mettre en évidence les effets importants des non-linéarités. La compétition entre les effets de la localisation et l'influence des non-linéarités est largement prouvée même si celles-ci ne jouent un rôle sur la transmission finale que pour des intensités importantes.

Les études théorique et numérique ont permis de mettre en évidence l'influence des non-linéarités sur la propagation dans un réseau ordonné ou désordonné en négligeant la possible présence d'harmoniques supérieurs. Cette hypothèse n'a pu être vraiment valider par l'expérience même si l'allure spatiale de l'onde à l'intérieur du réseau montre, sans équivoque, que les non-linéarités permettent la transmission de la fréquence fondamentale sur une distance plus importante que pour le régime linéaire.

Conclusion générale

Cette étude a été effectuée au départ dans un cadre volontairement général. Nous voulions développer des notions pour les ondes classiques permettant de traiter des problèmes de propagation dans les milieux complexes tels que des réseaux désordonnés et pouvant contenir des non-linéarités. Le milieu de transmission est certes simplifié dans ces travaux mais cette étude théorique permet de faire ressortir des aspects nouveaux.

La première partie de ce document permet une analyse théorique de la propagation dans un réseau (ordonné ou désordonné) en développant différentes approches du problème.

- Un formalisme matriciel a permis une simulation numérique pour le calcul de la transmission d'un milieu à désordre continûment distribué, et ce quel que soit l'importance du désordre.
- Le formalisme de la fonction de Green a permis de développer des résultats analytiques pour un désordre faiblement concentré et dans le cas de non-linéarités diluées dans le réseau grâce à la théorie des perturbations.
- Un concept d'opérateurs non-linéaires issu du formalisme matriciel a été mis en oeuvre pour traiter le cas non-linéaire .
- L'étude basée sur l'approximation des grandes longueurs d'ondes a montré, de façon analytique, l'influence des non-linéarités sur la transmission à travers un réseau ordonné ou non.

Puis, une approche dynamique du problème a été exposée en se référant à des travaux antérieurs. On a développé la notion de diagramme de phase et déterminé un plan de phase qui permet la construction de sections de Poincaré illustrant la propagation à l'intérieur du milieu.

Finalement, la méthode de "plongement invariant" (invariant imbedding) est présentée car elle n'est pas utilisée très couramment en physique classique et notamment en acoustique. Le régime linéaire est traité en détails alors que le cas non-linéaire est brièvement abordé. Cette méthode sert toutefois à de nombreuses reprises lors des applications puisqu'elle permet de déterminer explicitement les coefficients de réflexion et de transmission du milieu considéré.

L'application de toutes ces notions développées dans la première partie est présentée dans l'étude numérique de la propagation des vibrations d'une corde chargée par des systèmes masse-ressort. On a montré explicitement l'apparition de la localisation d'Anderson et les différences entre les désordres géométrique et paramétrique. Les résultats numériques sont en bon accord avec la théorie de Bloch.

La présence de non-linéarités dans le réseau a été traitée au moyen du formalisme d'opérateurs non-linéaires et d'une approche dynamique. Il est alors montré que des non-linéarités cubiques placées aux noeuds du réseau influencent la propagation à l'intérieur de celui-ci. Dans le cas de réseaux ordonnés, de nombreuses plages de fréquences changent de régime de propagation suivant le signe des non-linéarités. En présence de désordre, l'effet des non-linéarités sur la transmission est amoindri mais n'est toutefois pas négligeable.

Enfin, les résultats de l'approche dynamique corroborent tout à fait cette analyse en y ajoutant des aspects nouveaux très prometteurs. On a montré qu'il existe, pour une propagation dans des réseaux ordonnés comportant des non-linéarités localisées, des phénomènes de multistabilité qui semblent entraîner des bifurcations de type Hopf. Celles-ci sont certainement la cause des changements de régimes de propagation que l'on a rencontré précédemment. Toutefois, ces af-

firmations méritent des investigations plus poussées. Des mouvements quasi-périodiques ont été mis en évidence et de brusques modifications de leurs périodes montrent la présence des bifurcations citées. Les sections de Poincaré, lorsqu'un faible désordre est présent, confirment que la propagation est possible grâce aux non-linéarités. Les phénomènes internes au réseau sont certes influencés par le désordre mais leurs aspects principaux, preuves de la transparence du milieu, sont conservés.

Finalement, les résultats expérimentaux de la propagation acoustique à travers un tube chargé par des résonateurs sont présentés. Le comportement non-linéaire de la réponse d'un résonateur de Helmholtz est montré expérimentalement et un modèle est développé. La comparaison des résultats est encourageante mais elle met en lumière les limites du modèle analytique. En effet, seul le comportement non-linéaire de l'élasticité de l'air compris dans la cavité du résonateur est pris en compte ce qui sous estime la part des effets non-linéaires dans la réponse et rend la modélisation du comportement non-linéaire du résonateur plus qualitative que quantitative. Pour être plus réaliste, il faudrait ajouter la présence du décollement du champ acoustique aux alentours des coins formés par les discontinuités de sections dans le résonateur. Étant donné que la modélisation de la réponse des résonateurs n'était pas au centre de notre problème, nous nous sommes satisfaits de ce niveau d'approximation.

Les méthodes matricielles et de "plongement invariant" sont validées par les résultats expérimentaux en régime linéaire. Une mesure de la longueur de localisation a été effectuée et sa dépendance à l'importance du désordre et à la fréquence a été confirmée. Nous avons mis en évidence la dispersion des ondes de ce milieu et nous avons déterminé expérimentalement la vitesse de groupe de celles-ci grâce à une analyse temps-fréquence.

Les résultats de l'expérience pour un régime non-linéaire sont très encourageants : on a montré explicitement que la longueur de localisation d'un milieu désordonné dépend de l'amplitude de l'onde incidente ce qui entraîne une diminution de l'effet de la localisation. Une analyse temps-fréquence met en évidence les aspects non-linéaires de la propagation : les harmoniques double et triple apparaîssent dans le spectre de la transmission. Ces harmoniques permettent à l'énergie de se propager à travers le réseau désordonné car ils n'appartiennent pas aux bandes interdites. Nous avons développé et évalué expérimentalement la notion de transmission en énergie. Elle montre que la présence de non-linéarités localisées dans un réseau désordonné peut agir comme un facteur de délocalisation en transférant l'énergie de l'onde incidente sur des harmoniques supérieurs.

Les perspectives d'une telle étude sont nombreuses car le sujet comporte de multiples aspects nouveaux. Le modèle non-linéaire du résonateur de Helmholtz peut largement être amélioré en y incluant l'arrivée de tourbillons créés par un décollement du champ à chaque discontinuité de section. Ensuite, l'étude de la propagation d'une impulsion "non-linéaire" (à forte amplitude), à l'aide des techniques temps-fréquence, doit être effectuée pour connaître l'influence des non-linéarités sur la dispersion des ondes. Une approche dynamique du problème peut aussi faire partie d'une série d'expériences permettant d'obtenir les sections de Poincaré ou l'équivalent afin de comparer ces résultats aux simulations numériques. En ce qui concerne le désordre proprement dit, un système permettant la comparaison des effets d'un désordre paramétrique et géométrique est envisageable en augmentant la taille du réseau. Enfin, on pourrait développer l'idée d'un milieu comportant des non-linéarités indépendantes de la fréquence permettant une analyse expérimentale plus générale que celle présentée dans ce document.

L'évolution de l'aspect théorique de ce problème se trouve certainement dans les nouvelles notions développées dans un cadre non-linéaire, notions qui doivent être souvent précisées et approfondies.

Par ailleurs, l'étude de telle propagation ne doit pas se restreindre au cas unidimensionnel. On pourrait ainsi envisager un réseau à deux dimensions incluant des non-linéarités localisées. Toutefois, sachant que les aspects linéaires forment déjà une grande partie des questions sans réponse de ce type de problèmes, la présence de non-linéarités dans un milieu complexe constitue

en soi un sujet largement ouvert.

Annexe A

Calcul de la fonction de Green pour le cas linéaire non perturbé

L'équation que vérifie la fonction de Green $G_0(m,n,a)$ est donnée par

$$G_0(m,n+1,a) + G_0(m,n-1,a) - 2aG_0(m,n,a) = \delta_{m,n}. \tag{A.1}$$

En posant

$$G_0(m,n,a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}(\theta)e^{j(m-n)\theta}d\theta, \tag{A.2}$$

$$\text{et } \delta_{m,n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m-n)\theta}d\theta. \tag{A.3}$$

où $\tilde{G}$ représente la transformée de Fourier discrète de la fonction de Green $G_0(m,n,a)$, l'équation (A.1) se réécrit sous la forme :

$$\tilde{G}(\theta)[e^{j(m-(n+1))\theta} + e^{j(m-(n-1))\theta} - 2ae^{j(m-n)\theta}] = e^{j(m-n)\theta}, \tag{A.4}$$

ce qui entraîne

$$\tilde{G}(\theta) = \frac{1}{2(\cos\theta - a)}. \tag{A.5}$$

La fonction de Green du cas linéaire non perturbé est donc donnée par la relation suivante

$$G_0(m,n,a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{j(m-n)\theta}}{2(\cos\theta - a)}, \tag{A.6}$$

qu'il est possible de calculer en intégrant dans le plan complexe. En posant $z = e^{j\theta}$, on obtient $d\theta = -jdz/z$ et l'équation (A.6) devient :

$$G_0(m,n,a) = \frac{-j}{2\pi}\int_C \frac{z^{m-n}}{z^2 - 2az + 1}. \tag{A.7}$$

Le théorème des résidus nous permet d'écrire

$$\int_C f(z)dz = 2\pi j\text{Res}(f(z)), \text{ avec } f(z) = \frac{z^{m-n}}{z^2 - 2az + 1}. \tag{A.8}$$

Ainsi, la connaissance des résidus de cette fonction $f(z)$ donne une formule analytique de la fonction de Green. Ces résidus, calculés à partir des pôles de $f(z)$ dont la valeur absolue est inférieure à 1 sont (seul z_{p-} vérifie cette condition) :

$$z_{p-} = a - \sqrt{a^2 - 1} \text{ et } z_{p+} = a + \sqrt{a^2 - 1}$$

or le théorème des résidus dit

$$\mathrm{Res}[f(z)] = \lim_{z \to z_{p-}} (z - z_{p-}) f(z) = \lim_{z \to z_{p-}} (z - z_{p-}) \frac{z^{m-n}}{(z - z_{p-})(z - z_{p+})},$$

donc

$$\mathrm{Res}[f(z)] = -\frac{(a - \sqrt{a^2 - 1})^{|m-n|}}{2\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Finalement, en remplacant cette relation dans l'équation (A.7), l'expression de la fonction de Green pour le cas linéaire non perturbé est donnée par

$$G_0(m, n, a) = -\frac{(a - \sqrt{a^2 - 1})^{|m-n|}}{2\sqrt{a^2 - 1}}. \tag{A.9}$$

Bibliographie

[1] A. M. Kosevich. Particles and waves properties of solitons. resonant and non-resonant soliton scattering by impurities. *Physica D*, **41** :253–261, 1990.

[2] Yu S. Kivshar, S. A. Gredeskul, A. Sanchez, and L. Vasquez. Localization Decay Induced by Strong Nonlinearity in Disordered Systems. *Phys. Rev. Lett.*, **64**(15) :1693–1696, 1990.

[3] V. A. Hopkins, L. C. Krysac, and J. D. Maynard. Experimental studies of nonlinear continuous waves and pulses in disordered media showing Anderson localization. *Phys. Rev. B*, **58**(17) :11377–11385, 1998.

[4] F. Bloch. Der quantenmechanik electronishen. *Z. Phyzik*, **52** :555, 1928.

[5] C. E. Bradley. *Linear and Nonlinear Acoustic Bloch Wave Propagation in Périodic Waveguide.* Technical report, The University of Texas at Austin, 1994.

[6] N. Sugimoto. Dispersion characteristics of sound waves in a tunnel with an array of Helmholtz resonators. *J. Acoust. Soc. Am.*, **97**(3) :1446–1459, 1995.

[7] D. W. L. Sprung and Hua Wu. Scattering by a finite periodic potential. *Am. J. Phys.*, **61**(12) :1118–1124, December 1993.

[8] D. J. Griffiths and N. F. Taussig. Scattering from a locally periodic potential. *Am. J. Phys*, **60**(10) :883–888, October 1992.

[9] L. Cremer, M. Heckl, and E. E. Hungar. *Structure Born Sound.* Springer Verlag, 1973.

[10] F. Bentalosa, V. Grecchi, and F. Zironi. Approximate ladder of resonances in a semi-infinite crystal. *J. Phys. C. : Solid State Phys.*, **15** :7119–7131, 1982.

[11] Freeman J. Dyson. The Dynamics of a Disordered Linear Chain. *Phys. Rev.*, **92**(6) :1331–1338, 1953.

[12] H. Schmidt. Disorder One-Dimensional Crystals. *Phys. Rev.*, **105**(2) :425–441, 1957.

[13] P.W. Anderson and coll. New method for a scaling theory of localization. *Phys. Rev. B*, **22**(8) :3519–3526, 1980.

[14] A. Sànchez, E. Macià, and F. Dominguez Adame. Suppression of Localization in Kronig–Penney Models with Correlated Disordered. *Phys. Rev. B*, **49**(1), 1994.

[15] D. J. Mead and S. M. Lee. Receptance methods and the dynamics of disordered one-dimensional lattices. *J. S. V.*, **92**(3) :427–445, 1984.

[16] P. Sheng, B. White, Z. Zhang, and G. Papanicolaou. Minimum wave-localization length in a one-dimensional random medium. *Phy. Rev. B*, **34**(7) :4757–4761, 1986.

[17] C. Flesia, R. Johnston, and H. Kunz. Strong localization of classical waves : a numerical study. *Europhys. Lett.*, **3**(4) :497–502, 1987.

[18] B. Souillard. Wave Propagation and Inhomogeneous Media : *Beyond* Effective Medium Theories. *Physica A*, **157** :3–12, 1989.

[19] C. M. Soukoulis, E. N. Economou, G. S. Grest, and M. H. Cohen. Existence of Anderson localization of classical waves in a random two-component medium. *Phys. Rev. Lett.*, **62**(5) :575–578, 1994.

[20] D. Sornette. Anderson Localization and Wave Absorption. *J. Stat. Phys.*, **56**(5) :669–680, 1989.

[21] C. M. Soukoulis, Jorge V. José, E. N. Economou, and Ping Sheng. Localization in One–Dimensional Disordered in the Presence of an Electric Field. *Phys. Rev. Lett.*, **50**(10) :764–767, 1983.

[22] O. Bleibaum, H. Bottger, V. V. Bryksin, and P. Kleinert. Theory of Anderson Localization in a Electric Field. *Phys. Rev. B*, **52**(23) :16494–16502, 1995.

[23] C. Depollier, J. Kergomard, and F. Laloe. Localisation d'Anderson des ondes dans les réseaux acoustiques unidimensionnels aléatoires. *Ann. Phys. (Paris)*, **11** :457–492, 1986.

[24] A. Figotin and A. Klein. Localization of classical waves I : Acoustic waves. *Commun. Math. Phys.*, **180** :439–482, 1996.

[25] C. H. Hodges. Confinement of vibration by structural irregularity. *J. S. V.*, **82**(3) :411–424, 1982.

[26] C. Pierre and E. H. Dowell. Localization of vibrations by structural irregularity. *J. S. V.*, **114**(3) :549–564, 1987.

[27] H. C. Chan and C. W Cai. Dynamics of nearly periodic structures. *J. S. V.*, **213**(1) :89–106, 1998.

[28] B. Ursin. Review of elastic and electromagnetic wave propagation in horyzontally layered media. *Geophysics*, **48**(8) :1063–1081, 1983.

[29] R. W. Ziolkowski. Localized wave physics and engineering. *Phys. Rev. A*, **44**(6) :3960–3984, 1991.

[30] B. A. Tiggelen, A. Lagendijk, M. P. van Albada, and A. Tip. Speed of light in random media. *Phys. Rev. B.*, **45**(21) :12233–12243, 1992.

[31] K. E. Gilbert. Reflection of sound from a randomly layered ocean bottom. *J. Acoust. Soc. Am.*, **68**(5) :1454–1458, Nov. 1980.

[32] V. I. Klyatskin. Statistical and dynamic localization of planes waves in randomly layered media. *Sov. Phys. Usp.*, **35**(3) :231–247, 1992.

[33] E. Diez, A. Sanchez, F. Domínguez-Adame, and G. P. Berman. Electron dynamics in intentionally disordered semiconductor superlattices. *Phys. Rev. B*, **54**(20) :14550–14559, 1996.

[34] C. M. Soukoulis, M. J. Velgakis, and E. N. Economou. One-dimensional localization with correlated disorder. *Phys. Rev. B*, **50**(8) :5110–5118, 1994.

[35] J. Heinrichs. Localization, antilocalization, and delocalization in one-dimensional disordered lattices. *Phys. Rev. B*, **51**(9) :5699–5710, 1995.

[36] M. A. Heckl. Investigation on the vibrations of grillages and others simple beam structures. *J. Acoust. Soc. Am.*, **36**(7) :1335–1343, 1983.

[37] K. Busch and C. M. Soukoulis. Transport properties of random media : a new effective medium theory. *Phys. Rev. Lett.*, **75**(19) :3442–3445, 1995.

[38] M. M. Sigalas, C. M. Soukoulis, C.-T. Chan, and D. Turner. Localization of electromagnetic waves in two-dimensional disordered systems. *Phys. Rev. B*, **53**(13) :8340–8348, 1996.

[39] A. Furusaki. Anderson localization due to a random magnetic fied in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, **82**(3) :604–607, 1999.

[40] C. M. Soukoulis and G. S. Grest. Localization in a two-dimension quantum percolation. *Phys. Rev. B*, **44**(9) :4685–4688, 1991.

[41] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan. Scaling theory of localization : Absence of quantum diffusion on two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, **42**(10) :673–676, 1979.

[42] P. de Vries, H. de Raedt, and A. Lagendijk. Localization of waves in fractals : Spatial behavior. *Phys. Rev. Lett.*, **62**(21) :2515–2518, 1989.

[43] E. Akkermans and R. Maynard. Weak localization and anharmonicity of phonons. *Phys. Rev. B*, **32**(12) :7850–7862, 1985.

[44] J. Bellissard, A. Formoso, R. Lima, and D. Testard. Quasiperiodic Interaction with a Metal–Insulator Transition. *Phys. Rev. B*, **26**(6) :3024–3030, 1982.

[45] J. Heinrichs. Localization, Antilocalization, and Delocalization in One–Dimensional Disordered Lattices. *Phys. Rev. B*, **51**(9) :5699, 1995.

[46] W. K. Lin and G. Q Cai. *Probalistic structural dynamics.* Mc Graw hill, New York, 1995.

[47] V. Baluni and J. Willemsen. Transmission of acoustic waves in a random layered media. *Phys. Rev. A*, **31**(5), 1984.

[48] Z. Kotulski. Wave propagation in randomly stratified media and the law of large numbers. *J. S. V.*, **158**(1) :93–104, 1992.

[49] S. Russ, S. Havlin, and I. Webman. Anderson localization in a correlated landscape near the band edge. *Philosophical Magazine B*, **77**(5) :1449–1453, 1998.

[50] H. Levine and J. F. Willemsen. Acoustic propagation in random layered media. *J. Acoust. Soc. Am.*, **73**(1) :32–40, 1983.

[51] W. W. Lui and M. Fukuma. Exact solution of Shrödinger equation across an arbitrary one-dimensional piecewise-linear potential barrier. *J. Appl. Phys.*, **60**(5) :1555–1559, 1986.

[52] J.M. Luck. *Systèmes Désordonnés Unidimensionnels.* Collection Alea Saclay, 1992.

[53] P.W. Anderson. *Phys. Rev.*, **109**(8) :1492, 1958.

[54] C. Depollier. *Théorie de Biot et Prédiction des Propriétés Acoustiques des Matériaux Poreux. Propagation dans les Milieux Acoustiques Désordonnés.* Thèse d'état, Université du Maine Le Mans France, 1989.

[55] D. J. Thouless. Electrons in disordered systems and the theory of localization. *Phys. Rep.*, **13** :93, 1974.

[56] H. Furstenberg and H. Kesten. Products of random matrix. *Ann. Math. Stat.*, **31** :457–469, 1960.

[57] V. I. Oseledec. A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc.*, **19** :197–230, 1968.

[58] E. Cota, J. V. Jose, J. Maytorena, and G. Monsivais. Comment on « Absence of Localisation in a Nonlinear Binary Alloy ». *Phys. Rev. Lett.*, **74**(16) :3302, 1995.

[59] Y. Wan and C. M. Soukoulis. One–Dimensional Nonlinear Schrodinguer Equation : a Nonlinear Approach. *Phys. Rev. A*, **41**(2) :800, 1990.

[60] P. Hawrylak, M. Grabowski, and P. Wilson. Chaotic Wave Functions and Ballistic Transport in Nonlinear Superlattices. *Phys. Rev. B*, **40**(9) :6398–6401, 1989.

[61] Q. Li, C. T. Chan, K. M. Ho, and C. M. Soukoulis. Wave propagation in nonlinear photonic band-gap materials. *Phys. Rev. B*, **53**(23) :15577–15585, 1996.

[62] F. Delyon, Y. E. Levy, and B. Souillard. Nonperturbative Bistability in Periodic Nonlinear Media. *Phys. Rev. Lett.*, **57**(16) :2010–2013, 1986.

[63] M. Grabowski and P. Hawrylak. Wave Propagation in a Nonlinear Periodic Medium. *Phys. Rev. B*, **41**(9) :5783–5791, 1990.

[64] P. Hawrylak and M. Grabowski. Self-Induced Gaps and Optical Bistability in Semiconductor Superlattices. *Phys. Rev. B*, **40**(11) :8013–8016, 1989.

[65] D. Hennig, H. Gabriel, G. P. Tsironis, and M. Molina. Wave Propagation in Periodic Nonlinear Dielectric Superlattices. *Appl. Phys. Lett.*, **64**(22) :2934–2936, 1994.

[66] S. Narayanan and P. Sekar. A Frequency Domain Based Numerical-Analytical Method for Non-Linear Dynamical Systems. *J. S. V.*, **211**(3) :409–424, 1998.

[67] Y. Wan and C. M. Soukoulis. Wave Transmission in a One–Dimensional Nonlinear Lattice : Multistability and Noise. In A. R. Bishop, editor, *Springer Proceedings in Physics : Disorder and Nonlinearity*, volume **39**. Springer–Verlag Berlin, Heidelberg, 1989.

[68] E. Cota, J. V. Jose, and G. Monsivais. Resonant Tunelling through a Nonlinear Electrified Chain. *J. Phys. A : Math. Gen.*, **25** :L57–L62, 1992.

[69] D. Cai, A. R. Bishop, and N. Gronbech Jensen. Electric–Field–Induced Nonlinear Bloch Oscillations Dynamical Localization. *Phys. Rev. lett.*, **74**(7) :1186–1189, 1995.

[70] T. Iizuka. Envelope soliton of the Bloch wave in nonlinear periodic lattices. *J. Phys. Soc. Jpn.*, **64**(9) :3215–3225, 1995.

[71] S. A. Gredeskul and Y. S. Kivshar. Propagation and scattering of nonlinear waves in disordered systems. In A. A. Maradudin, editor, *Physics Report*, volume **216**, pages 1–61. Elsevier Science Publishers B. V., 1992.

[72] R. Knapp, G. Papanicolaou, and B. White. Nonlinearity and localization in one-dimensional random media. In A. R. Bishop, D. K. Campbell, and St. Pnevmatikos, editors, *Disorder and nonlinearity*, Springer serie in solid state science. Springer (Berlin), 1989.

[73] M. Sayar, M. C. Demirel, and A. R. Atilgan. Dynamics of Disordered Structures : Effect of Non–Linearity on the Localization. *J. S. V.*, **205**(3) :372–379, 1997.

[74] R. Knapp, G. Papanicolaou, and B. White. Transmission of waves by a nonlinear random medium. *J. Stat. Phys.*, **63**(3/4) :567–583, 1991.

[75] P. Devillard and B. Souillard. Polynomially Decaying Transmission for the Nonlinear Schrodinger Equation in a Random Medium. *J. Stat. Phys.*, **43**(3) :423–439, 1986.

[76] A. A. Zevin. Localization of periodic oscillations in discrete non-linear systems. *J. S. V.*, **193**(4) :847–862, 1996.

[77] A. G. Mal'shukov and G. D. Mahan. Nonlinear forward scattering of light in opaque media. *Phys. Rev. B*, **57**(13) :7701–7704, 1998.

[78] P. K. Datta and A. M. Jayannavar. Effetc of nonlinearity on the dynamics of a particle in field-induced systems. *Phys. Rev. B*, **58**(13) :8170–8173, 1998.

[79] D. L. Shepelyansky. Delocalisation of Quantum Chaos by Weak Nonlinearity. *Phys. Rev. Lett.*, **70**(12) :1787–1790, 1993.

[80] P. Bergé, Y. Pomeau, and Ch Vidal. *L'Ordre dans le Chaos.* HERMANN, 1984.

[81] S. Chandrasekhar. *Radiative Transfer.* Dover, New York, 1960.

[82] Abarmuzian. *Theorical Astrophysics.* Pergamon, New York, 1958.

[83] Abarmuzian. Diffuse Reflection of Light by a Foggy Medium. *C. R. Acad. Sci. SSR*, **38**, 1943.

[84] G. C. Stokes. On the Intensity of the Ligth Reflected or Transmitted through a Pile of Plates. *Mathematical and Physical Papers*, **2**, 1883.

[85] H. W. Schmidt. Reflexion u. Absorption von β strahlen. *Ann. Physik*, **23** :671–697, 1907.

[86] R. Bellman and G.M. Wing. *An Introduction to Invariant Imbedding.* SIAM, Robert E. O'Malley Jr edition, 1992.

[87] V. I. Klyaskin. *Ondes et équations stochastiques dans les milieux aléatoirement inhomogènes.* Editions de Physique, 1985.

[88] V. I. Klyatskin. Localization of rossby waves over a random cylindrical topography of the ocean bottom. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, **32**(6) :757–765, 1996.

[89] V. I. Klyatskin, N. V. Gryanik, and D. Gurarie. Propagation and localization of rossby waves over random topography (two-layer model). *Wave Motion*, **28** :333–352, 1998.

[90] R. Rammal and B. Doucot. Invariant Imbedding Approach to Localization. I. General Framework and Basic Equations. *J. Physique*, **48** :509–526, 1987.

[91] R. Rammal and B. Doucot. Invariant Imbeding Approach to Localization II. Non-linear Random Media. *J. Physique*, **48** :527–546, 1987.

[92] R. Loudon. *The Quantum Theory of Light.* Clarendon, Oxford, 1983.

[93] P. Voisin et J. Bleuse et C. Bouche et S. Gaillard et C. Allibert et A. Regreny. Observation of the wannier-stark quantization in a semiconductor supperlattice. *Phys. Rev. Lett.*, **61**(14) :1639–1642, 1988.

[94] G. A. Thomas. *Localisation and Interactions in Disordered and Doped Semiconductors.* ed D. M. Finlayson (Edinburg : SUSSP), 1986.

[95] M. P. van Albada et B. A. van Tiggelen et A. Lagendijk et A. Tip. Speed of propagation of classical waves in strongly scattering media. *Phys. Rev. Lett.*, **66**(24) :3132–3135, 1991.

[96] S. Das Sarma et A. Kobayashi et R. E. Prange. Proposed experimental realization of Anderson localization in random and incommensurate artificially layered systems. *Phys. Rev. Lett.*, **56**(12) :1280–1283, 1988.

[97] M. L. Cowan et K. Beaty et J. H. Page et Zhengyou Liu et Ping Sheng. Group velocity of acoustic waves in strongly scattering media : Dependance on the volume fraction of scatterers. *Phys. Rev. E*, **58**(5) :6626–6636, 1998.

[98] L. Macon et J. P. Desideri et D. Sornette. Localization of surface waves in a one-dimensional quasicrystal. *Phys. Rev. B*, **44**(13) :6755–6772, 1991.

[99] R. A. Ibrahim. Structural Dynamics with Parameters Uncertainties. *Appl. Mech. Rev.*, **40**(3) :309–328, 1987.

[100] M. S. Santos, E. S. Rodrigues, and P. C. de Oliveira. Spring-mass Chains : Theorical and Experimental Studies. *Am. J. Phys.*, **58**(10) :923–928, 1990.

[101] C. H. Hodges and J. Woodhouse. Vibration isolation from irregularity in a nearly periodic structure : Theory and measurements. *J. Acoust. Soc. Am.*, **74**(3) :894–905, 1983.

[102] C. M. Soukoulis, S. Datta, and E. N. Economou. Propagation of classical waves in random media. *Phys. Rev. B*, **49**(6) :3800–3810, 1994.

[103] M. P. van Albada et J. F. de Boer et A. Lagendijk et B. A. van Tiggelen et A. Tip. *Localization 1990.* ed K. A. Benedict et J. T. Chalker (Bristol : Institue of Physics), 1991. p. 99.

[104] E. N. Economou. Classical localization. *Physica A*, **167** :215–230, 1990.

[105] P. E. Lindelof et J. Norregaard et J. Hamberg. New ligth on the scattering mechanisms in Si inversion layers by weak localization experiments. *Physica Scripta*, **T14** :17–26, 1986.

[106] G. Shanker, V. K. Gupta, and N. K. Sharma. Normal Modes and Dispersion Relations in a Beaded String : An Experiment for an Undergraduate Laboratory. *Am. J. Phy.*, **53**(5) :479, mai 1985.

[107] S. He and J. D. Maynard. Detailled Measurements of Inelastic Scattering in Anderson Localization. *Am. Phys. Soc.*, **57**(25) :3171, 1986.

[108] S. Parmley. Vibrational Properties of a Loaded String. *Am. J. Phys.*, **63**(6) :547–553, janvier 1995.

[109] M. J. McKenna, R. L. Stanley, and J. D. Maynard. Effects of Nonlinearity on Anderson Localization. *Phys. Rev. Lett.*, **69**(12) :1807–1810, 1992.

[110] M. J. McKenna, J. Keat, J. Wang, and J. D. Maynard. Experiment on Nonlinear Wave Propagation in Disordered Media. *Physica B*, **194**(12) :1039–1040, 1994.

[111] V. A. Hopkins, J. Keat, G. D. Meegan, T. Zhang, and J. D. Maynard. Observation of the predicted behavior of nonlinear pulse propagation in disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, **76**(7) :1102–1105, 1996.

[112] A. Kudrolli, V. Kidambi, and S. Sridhar. Experimental studies of chaos and localization in quantum wave function. *Phys. Rev. Lett.*, **75**(5) :822–825, 1995.

[113] W. Soedel. A new frequency formula for closed circular cylindrical shells for a large variety of boundary conditions. *J. S. V.*, **70**(3) :309–317, 1980.

[114] M. Abom. Measurement of the scattering-matrix of acoustical two-port. *Mechanical System and Signal Processing*, **5** :89–104, 1991.

[115] A. F. Seybert et D. F. Ross. Experimental investigation of acoustic properties using a two-microphone random-excitation technique. *J. Acoust. Soc. Am.*, **61**(5) :1362–1370, 1977.

[116] A. F. Seybert et B. Soenarko. Error analysys of spectral estimates with application to the measurement of acoustical parameters using random field in ducts. *J. Acoust. Soc. Am.*, **69**(4) :1190–1199, 1981.

[117] M. Pachebat. *Comportement des matériaux absorbants dans les champs acoustiques intenses ; Modélisation de traitements acoustiques réactifs à réaction non locale dans les conduits.* Thèse de doctorat, Université du Maine Le Mans France, 1997.

[118] G. Ajello. *Mesures acoustiques dans les guides d'ondes en présence d'écoulement : Mise au point d'un banc de mesure, application à des discontinuités.* Thèse de doctorat, Université du Maine Le Mans France, 1997.

[119] J. Ville. Théorie et application de la notion de signal analytique. *Cable et Transmission*, **2A**(1) :61–74, 1948.

[120] D. Gabor. Theory of communication. *Proc. IEEE*, **93**(3) :429–457, 1946.

[121] P. Flandrin. "Temps-fréquences". Hermes, 1993.

[122] V. Valeau. *Mesure de la vitesse acoustique particulaire par anémométrie laser Doppler : Estimation de la fréquence instantanée à variation sinusoïdale, validation de la mesure.* Thèse de doctorat, Université du Maine Le Mans France, 1999.

[123] U. Ingard. On the theory and design of acoustic resonators. *J. Acoust. Soc. Am.*, **25**(6) :1037–1061, 1953.

[124] U. Ingard and S. Labate. Acoustic circulation effects and nonlinear impedance of orifices. *J. Acoust. Soc. Am.*, **22**(2) :211–218, 1950.

[125] U. Ingard. Nonlinear distortion of sound transmitted through an orifice. *J. Acoust. Soc. Am.*, **48**(1) :32–33, 1970.

[126] A. Cummings. Transient and multiple frequency sound transmission through perforated plates at high amplitude. *J. Acoust Soc. Am.*, **79**(4) :942–951, 1994.

[127] G. B. Thurston, L. E. Hargrove, and B. D. Cook. Nonlinear properties of circular orifices. *J. Acoust Soc. Am.*, **29**(9) :992–999, 1957.

[128] D. A. Bies and O. B. Wilson. Acoustic impedance of a Helmholtz resonator at very high amplitude. *J. Acoust Soc. Am.*, **29**(6) :711–714, 1957.

[129] A. Cummings and W. Eversman. High amplitude acoustic transmission through duct terminations : theory. *J. S. V.*, **91**(4) :503–518, 1983.

[130] V. E. Gusev. Frequency-selective action on nonlinear waves in an acoustic cavity. *Vest. Mosk. Univ. Fiz.*, **39**(6) :29–34, 1984.

[131] A. A. Zaikin and O. V. Rudenko. A nonlinear model of the Helmholtz resonator with a movable wall. *Acoustical Physics*, **42**(3) :329–333, 1996.

[132] Y. A. Ilinskii, B. Lipkens, T. S. Lucas, and T. W Van Doren. Nonlinear standing waves in a acoustical resonator. *J. Acoust Soc. Am.*, **104**(5) :2664–2674, 1998.

[133] D. Innes and D. G. Crighton. On a non-linear differential equation modelling Helmholtz resonator response. *J. S. V.*, **131**(2) :323–330, 1989.

[134] O. V. Rudenko and K. L. Khirnykh. Helmholtz resonator model for the absorption of high-intensity sound. *Sov. Phys. Acoust.*, **36**(3) :293–297, 1990.

[135] Ricardo R. Boullosa and Felipe Orduña Bustamante. The reaction force on a Helmholtz resonator driven at high sound pressure amplitudes. *Am. J. Phys.*, **60**(8) :722–726, 1992.

[136] G. Balin, V. Chernov, A. Fogel, V. Fridman, L. Sobolev, and L. Zhestyannikov. The low-frequency acoustic field formed by a Helmholtz resonator under the action of powerful pulses. *Acoustics Letters*, **17**(4) :62–65, 1993.

[137] V. Dubos, J. Kergomard, A. Khettabi, J.-P. Dalmont, D. H. Keefe, and C. J. Nederveen. Theory of sound propagation in a duct with a branched tube using modal decomposition. *Acta Acustica*, **85** :1–17, 1999.

[138] A. Selamet and P. M. Radavich. Helmholtz resonator : A multidimensional analytical, computational, and experiment study. *SAE 951263*, 1999.

[139] A. Tourin, A. Derode, P. Roux, B. A. Van Tiggelen and M. Fink. Time-Dependant Coherent Backscattering of Acoustic Waves. *Phys. Rev. Lett.*, **79**(19) :3637–3639, 1997.