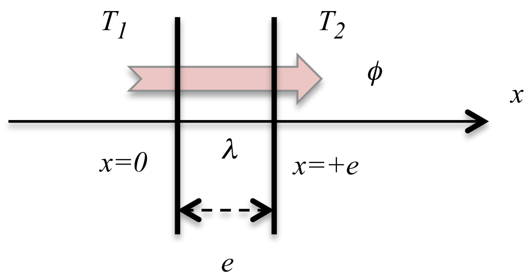
5. Transferts thermiques par conduction – Solutions élémentaires

Exercice 1 : Transferts de chaleur dans une plaque isolante (A)

1- Une paroi plane isolante de 1 m^2 et de 2 cm d'épaisseur est traversée par un flux thermique de 500 W. Calculer la différence de température existant entre les deux faces de la paroi sachant que la conductivité thermique moyenne du matériau constituant la paroi est de 0,1 W / m.K.

2- On impose à une paroi plane de 15 cm d'épaisseur, et faite de laine de verre (conductivité λ = 0,015 W / m.K) une différence de température de 100 K entre les deux faces. Calculer la densité du flux thermique correspondante.



Solution :

1- Il s'agit d'une simple application numérique sur la loi de Fourier de la conduction s'écrivant : $\phi = \lambda S(T_1 - T_2)/e$, qui est simplement réécrite ici sous la forme : $T_1 - T_2 = e\phi / \lambda S$. Soit à partir des données fournies,

$T_1 - T_2 = 2.10^{-2}.500/0{,}1.1 = 100\ K$.

2- Idem, il s'agit d'une autre application directe de la loi de Fourier, ramenée ici à la densité du flux d'énergie thermique, c'est-à-dire en écrivant le flux thermique divisé par la surface de la plaque considérée, soit : $\phi / S = \lambda \Delta T / e$, soit avec les données de l'exercice : $\phi / S = 0{,}015.100/10^{-2} = 10\ W/m^2$.

Exercice 2 : Isolation thermique d'un mur en briques (A)

Le mur d'un bâtiment est constitué de briques de 38 cm d'épaisseur (notée *d),* de conductivité thermique λ = 0.8 W/m.K. La température de l'air intérieur est $T_{1\infty}$=20 °C et celle de l'extérieur est $T_{2\infty}$ = – 15 °C. Les coefficients de conductance thermique moyenne par convection sont respectivement h_1 = 10 W/m^{2}K et h_2 = 20 W/m^{2}K pour l'air intérieur et pour l'extérieur.

1- Calculer la résistance thermique globale (interne et de contact) du mur par unité de surface.

2- En déduire le flux thermique surfacique, ainsi que les températures T_1 et T_2 du mur respectivement sur sa surface intérieure, puis extérieure.

Solution :

1- Il s'agit d'un exercice simple de transfert de chaleur mixte associant conduction et convection. Il faut commencer par écrire la relation de conservation du flux de chaleur, entre la loi de Fourier pour la conduction, et la loi de Newton pour la convection.

* Loi de Fourier (conduction) : $\phi = -\lambda S \dfrac{\partial T}{\partial x} = \lambda S \dfrac{T_2 - T_1}{d}$;

* Loi de Newton (convection) : $\phi = -h_1 S\left(T_{1\infty} - T_1\right) = -h_2 S\left(T_{2\infty} - T_2\right)$.

Par définition, il s'agit d'un système thermique en série, avec deux résistances externes et une autre interne. Sachant que $\phi / S = h_1\left(T_1 - T_{1\infty}\right) = \left(T_1 - T_{1\infty}\right)/R_1$, on obtient $R_1 = 1/h_1$, ainsi qu'un résultat similaire pour $R_2 = 1/h_2$. Au final, nous obtenons pour la résistance totale : $R_{Totale} = \dfrac{1}{h_1} + \dfrac{d}{\lambda} + \dfrac{1}{h_2}$, soit avec les valeurs : $R_{Totale} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{0,38}{0,8} + \dfrac{1}{20} = 0,625\ m^2K/W$.

2- Il est alors possible de calculer le flux thermique par unité de surface :
$\phi / S = \left(T_{1\infty} - T_{2\infty}\right)/R_{Totale} = \left(20-(-15)\right)/0,625 = 56\ W/m^2$.

On peut alors facilement calculer les températures des surfaces intérieure et extérieure du mur : $T_1 = T_{1\infty} - (\phi / h_1 S) = 20 - (56/10) = 14,4°C$,

et $T_2 = T_{2\infty} + (\phi / h_2 S) = -15 + (56/20) = -12,2°C$.

Le fait que le gradient de température sur l'épaisseur du mur est important (26,6 °C), alors que les températures elles-mêmes restent proches de celles des valeurs référence ($T_{1\infty} = 20°C$ et $T_{2\infty} = -15°C$), constitue une indication que le mur fonctionne correctement en terme d'isolation thermique.

Exercice 3 : Isolation thermique des parois d'un four (A)

Un four est constitué de briques réfractaires de 15 cm d'épaisseur (conductivité λ_b=1 W/m.K). Il est recouvert d'un matériau isolant de conductivité λ_i=0.08 W/ m.K.

La température de la paroi interne du four est 1300 °C, la température de la paroi externe de l'isolant est 300 °C. Calculer l'épaisseur d'isolant nécessaire pour limiter les pertes thermiques à 1000 W/m^2 (on considère donc pour simplifier que l'épaisseur d'isolant n'a pas d'influence sur la température extérieure de celui-ci).

Solution :

Il s'agit de nouveau d'une simple application pour un système thermique en série. On définit la résistance thermique totale à partir de celle de la brique et de celle de la couche isolante, à l'aide des relations habituelles : $\phi / S = (T_{1\infty} - T_{2\infty}) / R_{Totale}$, avec les définitions : $R_{Totale} = R_b + R_i = \frac{e_b}{\lambda_b} + \frac{e_i}{\lambda_i}$.

On trouve : $R_{Totale} = (T_{1\infty} - T_{2\infty}) S / \phi = 1000 / 1000 = 1\ m^2 / W$. De fait, on obtient donc la relation $R_{Totale} = \frac{e_b}{\lambda_b} + \frac{e_i}{\lambda_i} = 1$, ce qui permet d'extraire la valeur numérique de l'épaisseur d'isolant : $e_i = \lambda_i \left(1 - \frac{e_b}{\lambda_b}\right) = 0{,}08 (1 - 15.10^{-2} / 1) = 0{,}068\ m$, soit environ 7 cm d'isolant.

Exercice 4 : Bilan thermique pour une plaque uniformément chauffée (A)

1- De l'air à 20°C souffle sur une plaque métallique rectangulaire de 50 cm par 75 cm de côtés, uniformément chauffée, et dont la température de surface extérieure est maintenue constante, à 250 °C. Le coefficient de conductance thermique pour les échanges thermiques de la plaque avec l'air est h = 25 W/m^{2}K. Calculer le flux thermique transféré.

2- La plaque est faite d'acier, de coefficient de conductivité thermique λ = 43 W/m.K, ayant 2 cm d'épaisseur. On suppose que 300 W sont par ailleurs perdus par le mécanisme de rayonnement infrarouge. En écrivant un bilan élémentaire des flux thermiques, calculer la température de la surface interne de la plaque (pour fixer les idées, par exemple prise au milieu de la plaque), en notant que cette surface de référence n'est pas soumise au rayonnement et à la convection.

Solution :

1- Le flux thermique transféré à la plaque est simplement fourni en utilisant l'équation de Newton pour la convection : $\phi = -hS(T_{1\infty} - T_1)$. On trouve :

$\phi = 25.\frac{3}{8}.(250 - 20) = 2156\ W \cdot$

2- En écrivant la conservation du flux thermique à l'intérieur de la plaque d'acier, et en prenant en compte la perte de 300 W, il est alors possible d'extraire la température de la face interne de la plaque, sous la forme : $T_2 = T_1 - \frac{hd}{\lambda}(T_1 - T_{1\infty}) - \frac{300d}{S\lambda}$. L'application numérique conduit à la valeur suivante de cette température :

$T_2 = 250 - \frac{25}{43}.4{,}6 - 6.(8/3) = 231°C$. On constate que la température intérieure de la plaque d'acier reste forte. Cela vient du fait que l'acier est un bon conducteur de la chaleur. Par ailleurs, le flux thermique lié au refroidissement par l'air extérieur sur la face avant de la plaque n'est pas très grand (2156 W), et ceci est inhérent au mécanisme de convection avec l'air ambiant. Dans les mêmes conditions, au cours d'un refroidissement avec de l'eau, nous aurions des résultats assez différents (et bien meilleurs).

Exercice 5 : Isolation thermique d'un mur simple (A)

Le mur extérieur d'une maison est constitué de 100 mm de brique de coefficient de conduction thermique λ = 0,7 W/m.K, et de 40 mm de plâtre de conductivité λ = 0,48 W/m.K. Quelle doit–être l'épaisseur de laine de verre de conductivité λ = 0,065 W/m.K qu'il faut rajouter pour réduire les pertes thermiques de 80 % ?

Solution :

Cet exercice est aussi une application directe de la conservation du flux thermique dans différentes couches placées en série. On est amené à distinguer deux cas, à savoir en présence ou pas de laine de verre (isolant). Les calculs procèdent de la manière habituelle :

$\phi / S = (T_1 - T_2)/R_{Totale}$, avec $R_{Totale} = R_b + R_p = \dfrac{e_b}{\lambda_b} + \dfrac{e_p}{\lambda_p}$, pour la combinaison brique-plâtre ; $\phi'/S = (T_1 - T_2)/R'_{Totale}$, avec $R'_{Totale} = R_b + R_p + R_i = \dfrac{e_b}{\lambda_b} + \dfrac{e_p}{\lambda_p} + \dfrac{e_i}{\lambda_i}$, pour la combinaison brique-plâtre-isolant (laine de roche). Il ne reste alors plus qu'à indiquer que le flux avec laine de roche doit être plus faible que sans l'isolant de 80 %. Ceci se traduit par une relation élémentaire du type :

$\dfrac{\phi}{\phi'} = \dfrac{\dfrac{e_b}{\lambda_b} + \dfrac{e_p}{\lambda_p}}{\dfrac{e_b}{\lambda_b} + \dfrac{e_p}{\lambda_p} + \dfrac{e_i}{\lambda_i}} = 0{,}8 = 1 - 0{,}2$, ce qui fournit au final : $e_i = \dfrac{\lambda_i}{4}\left(\dfrac{e_b}{\lambda_b} + \dfrac{e_p}{\lambda_p}\right)$, soit environ e_i = 4 mm avec les données de l'exercice.

Exercice 6 : Transferts de chaleur dans une plaque de cuivre (A)

Dans une plaque de cuivre de 2 cm d'épaisseur, aux faces notées A et B, se propage de la chaleur par conduction. Un thermocouple mesure la température à l'intérieur de la plaque de cuivre en un point M_1 situé à 3 mm de la face A et indique 322 °C. Un second thermocouple situé dans le cuivre en un point M_2 à 8 mm de la face B indique 287 °C.

1- Calculer la densité de flux de chaleur dans la plaque, sachant que la conductivité thermique du cuivre est 420 W/m.K.

2- Calculer les températures des faces A et B.

3- On place une plaque d'acier de 6 mm d'épaisseur contre la face B de cette plaque de cuivre. En admettant que le flux de chaleur reste inchangé, calculer la température de la face C (la conductivité de l'acier vaut 43 W/m.K).

4- Donner la valeur de la résistance thermique de la plaque composite (cuivre + acier) par unité de surface. Quel commentaire vous inspire ces résultats ?

Solution :

1- On commence par le calcul du flux thermique par unité de surface, évalué à partir des données fournies, entre les deux points de référence M_1 et M_2 qui contiennent des thermocouples, soit :

$$\frac{\phi}{S} = \lambda\left(\frac{T_{M1} - T_{M2}}{d_{M1M2}}\right) = 420.\frac{322-287}{9.10^{-3}} = 1630 \ kW/m^2 \cdot$$

2- Il est alors possible d'évaluer les températures sur les faces A et B, par simple interpolation linéaire, sous la forme :

$$T_A = T_{M1} + d_{AM1}\left(\frac{T_{M1} - T_{M2}}{d_{M1M2}}\right) = 322 + 3.\frac{35}{9} = 334 \ °C,$$

et $T_B = T_{M2} - d_{M2B}\left(\frac{T_{M1} - T_{M2}}{d_{M1M2}}\right) = 287 - 8.\frac{35}{9} = 256 \ °C$.

3- Le rajout d'une plaque d'acier de 6 mm d'épaisseur ne vient pas modifier le flux thermique par unité de surface. Par contre, cette couche supplémentaire, davantage isolante que la plaque de cuivre, vient drastiquement changer la température au point C, comme indiqué en considérant les valeurs numériques :

$$T_C = T_B - \frac{e_a\phi}{\lambda_a S} = 256 - \frac{6.10^{-3}.1{,}63.10^6}{43} = 29 \ °C.$$

4- Il s'agit d'une configuration en série, si bien que les deux résistances thermiques s'ajoutent. On obtient finalement :

$R_{Total} = R_{Cu} + R_{Acier} = \frac{e_{Cu}}{\lambda_{Cu}S} + \frac{e_{Acier}}{\lambda_{Acier}S} = \frac{20.10^{-3}}{420} + \frac{6.10^{-3}}{43}$. La valeur obtenue est donc : $R_{Total} = 4{,}8.10^{-5} + 1{,}4.10^{-4} = 1{,}87.10^{-4} K/W$.

La résistance thermique est essentiellement due à l'acier. En fait, cet exercice est assez mal posé, considérant au départ un gradient thermique élevé dans une plaque de cuivre qui constitue par définition un excellent conducteur de la chaleur. Il en découle un flux thermique surfacique qui est considérable, de l'ordre de $10^6 W/m^2$, ce qui n'a pas vraiment de sens physique ici à moins de considérer une source de chaleur très forte. Par contre, le résultat de la question 3- est très intéressant. Il indique que l'acier est déjà moins conducteur, ce qui se traduit par une discontinuité franche de la température (29 °C au lieu de 256 °C au départ, au point B).

Exercice 7 : Transferts de chaleur dans un mur avec tirants d'acier (A)

Un mur isolant en briques d'épaisseur e et de conductivité λ_b = 0,04 W/m.K est traversé par des tirants d'acier (λ_a = 43 W/m.K), maintenant les différentes couches du mur et représentant 0,2 % de sa surface. On suppose que les faces extérieures sont respectivement aux températures T_1 et T_2. Comparer les résistances thermiques du mur avec et sans tirants d'acier. Calculer l'épaisseur d'isolant nécessaire pour limiter les pertes thermiques à 1000 W/m^2 (on considère donc pour simplifier que l'épaisseur d'isolant n'a pas d'influence sur la température extérieure de celui-ci).

Solution :

Il s'agit d'une variante de l'exercice 5, avec une comparaison entre deux configurations différentes. Par contre, ici les résistances thermiques sont montées en parallèle. On commence par calculer le flux thermique circulant dans le mur en brique, puis celui passant dans les tirants d'acier :

$\phi_b = (T_1 - T_2)/R_b$, avec $R_b = e/\lambda_b S_b$, et $\phi_a = (T_1 - T_2)/R_a$, avec $R_a = e/\lambda_a S_a$.

L'étape suivante consiste à écrire que le flux total est la somme des deux flux, avec une pondération relative à la surface, où α représente justement la proportion des tirants d'acier (0,2 %), puis l'on calcule le rapport de la résistance thermique avec ou sans tirants en acier. Les calculs obtenus sont les suivants :

$\phi_{Total} = \phi_b + \phi_a = (T_1 - T_2)\left(\dfrac{1}{R_b} + \dfrac{1}{R_a}\right)$, avec $S_a = \alpha S$ et $S_b = (1-\alpha)S$. Il est alors possible d'écrire : $\phi_{mur} = (T_1 - T_2)\left(\dfrac{\lambda_a \alpha + \lambda_b(1-\alpha)}{e}\right)S$, soit au final : $\dfrac{\phi_{mur}}{\phi_b} = \dfrac{R_b}{R_{mur}} = \left(\dfrac{\lambda_a \alpha + \lambda_b(1-\alpha)}{\lambda_b}\right)$.

L'application numérique fournit alors : $\dfrac{R_b}{R_{mur}} = 1 - \alpha + \dfrac{\lambda_a}{\lambda_b}\alpha = 3{,}15$. Le flux thermique a plus que triplé pour la configuration avec les tirants d'acier pour seulement 0,2 % de la surface en métal, à cause de la conductivité de l'acier qui est forte, ce qui se traduit par des pertes thermiques (ou fuites thermiques) importantes. Cet exemple illustre le problème d'un court circuit thermique dans l'isolation.

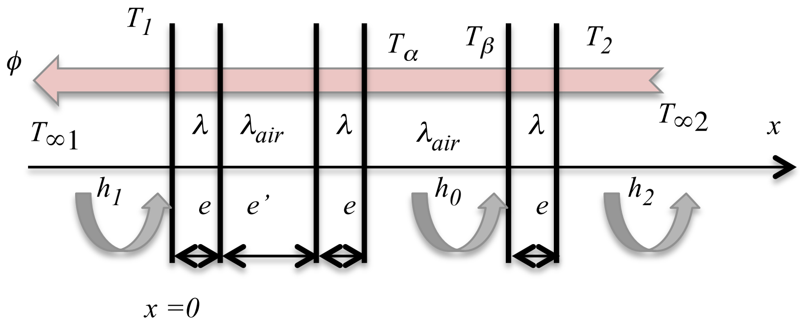
Exercice 8 : Isolation thermique d'une fenêtre avec simple / double vitrage (B)

On reprend ici certains calculs de l'isolation thermique, non plus d'un vitrage double, mais pour une véritable fenêtre double, analogue à celles utilisées dans les pays froids (Russie, Ukraine, pays scandinaves). Le premier vitrage est double. Il est constitué de deux vitres épaisses, 4 mm de verre (λ = 0,65 W/m.K), séparées par une couche d'air de 5 mm (λ = 0,022 W/m.K) d'épaisseur. Un deuxième vitrage est placé derrière le premier, du côté logement. Ce vitrage est éloigné du premier par une couche d'air épaisse (de l'ordre de 20 cm, mais cette valeur ne sera pas utile dans les calculs). Ce deuxième vitrage est constitué soit d'une simple vitre de verre de 4 mm d'épaisseur (voir Figure 2), cas de la configuration n°1, ou bien il est double, étant identique au premier vitrage, cas de la configuration n°2. La température à l'intérieur du logement est $T_{\infty 2}$ = 20 °C. Celle de l'extérieur est $T_{\infty 1}$ = – 10 °C. Il existe des coefficients de convection qui sont pris égaux à h_1 = 50 W/m^{2}K pour l'extérieur et h_2 = 10 W/m^{2}K pour l'intérieur du logement. On suppose qu'il existe une cellule de convection au sein de la couche d'air centrale, de coefficient h_0 = 2 W/m^{2}K.

1- Calculer la résistance thermique de la fenêtre double dans le cas de la configuration n°1 (celle de la Figure), en prenant en compte les coefficients de convection pour l'air à l'extérieur et à l'intérieur du logement, h_1 et h_2, ainsi que celui de la couche d'air centrale h_0. En déduire le flux thermique, et calculer les températures T_2 de la vitre, côté logement, ainsi que celle T_1 de la vitre côté extérieur. Calculer alors la température T_β de la vitre du deuxième vitrage, ainsi que celle T_α de la deuxième vitre du premier vitrage (voir Figure pour les notations).

2- Refaire l'ensemble de tous les calculs de la question 1- pour le cas de la configuration n°2 où le deuxième vitrage, qui est donc double cette fois-ci, est identique au premier. Que suggèrent les résultats obtenus en termes d'isolation thermique supplémentaire, en comparant les deux configurations ? Est-ce que le deuxième double vitrage se justifie ?

3- En utilisant la relation de définition du flux de chaleur dans la couche d'air centrale $\phi = h_0 s(T_\beta - T_\alpha)$, calculer alors h_0, à partir des valeurs numériques obtenues pour ϕ, T_α et T_β, pour les deux configurations n°1 et n°2, et montrer que l'on retrouve bien la valeur de h_0 = 2 W/m^{2}K pour l'une ou l'autre des deux configurations n°1 et n°2. Justifier alors ce résultat sur la base d'un calcul analytique précis et rigoureux, différent bien entendu dans les détails pour chaque configuration (n°1 et n°2).



Solution :

1- Pour le cas de la fenêtre double avec un deuxième vitrage qui reste simple, cf. Figure jointe, la résistance thermique globale s'écrit :

$$R^1_{Global} = \frac{1}{h_1} + \frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_0} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_2} = \frac{1}{h_1} + \frac{3e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_2},$$

$$R^1_{Global} = \frac{1}{50} + \frac{0{,}012}{0{,}65} + \frac{0{,}005}{0{,}022} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 0{,}02 + 0{,}01846 + 0{,}22727 + 0{,}5 + 0{,}1 = 0{,}86573\ m^2K/W.$$

Or, par définition : $R^1_{Global}.\phi = T_{\infty 2} - T_{\infty 1}$, d'où $R^1_{Global}\phi = T_{\infty 2} - T_{\infty 1}$,

soit : $\phi = \dfrac{30}{0{,}86573} = 34{,}653\ W/m^2$. Il est alors possible de calculer les températures de part et d'autre sur les faces avant et arrière de la double fenêtre (T_1 sur la vitre à l'extérieur, ainsi que T_2 sur la vitre à l'intérieur du logement). Les calculs sont les suivants :

$$T_1 = T_{\infty 1} + \frac{\phi}{h_1} = -10 + \frac{34{,}653}{50} = -9{,}31\ °C, \text{ et } T_2 = T_{\infty 2} - \frac{\phi}{h_2} = 20 - \frac{34{,}653}{10} = 16{,}53\ °C.$$

Il est aussi possible de calculer les températures T_α et T_β de part et d'autre, à l'intérieur de l'espace d'air au milieu des deux vitrages (cf. Figure) :

$$T_\alpha = T_1 + \phi\left(\frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda}\right) = -9{,}31 + 34{,}653\ .\ 0{,}2393 = -1{,}02\ °C,$$

$$T_\beta = T_2 - \phi\frac{e}{\lambda} = 16{,}53 - 0{,}213 = 16{,}32\ °C.$$

2- On reprend l'ensemble des calculs de la question précédente, pour le cas d'une véritable fenêtre double, à double vitrage (cf. Figure jointe). On trouve les résultats suivants :

$$R^2_{Global} = \frac{1}{h_1} + \frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_0} + \frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_2} = \frac{1}{h_1} + \frac{4e}{\lambda} + \frac{2e'}{\lambda_{air}} + \frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_2},$$

soit : $R^2_{Global} = \frac{1}{50} + \frac{0{,}016}{0{,}65} + \frac{0{,}01}{0{,}022} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 0{,}02 + 0{,}0246 + 0{,}4545 + 0{,}5 + 0{,}1 = 1{,}0991\ m^2K/W$.

Le flux thermique correspondant est simplement fourni par la relation usuelle :

$\phi' = \frac{T_{\infty 2} - T_{\infty 1}}{R^2_{Global}} = \frac{30}{1{,}0991} = 27{,}295\ W/m^2$. Il est alors possible de calculer comme précédemment les 4 températures de référence :

$T_1' = T_{\infty 1} + \frac{\phi}{h_1} = -10 + \frac{27{,}295}{50} = -9{,}45\ °C$, et $T_2' = T_{\infty 2} - \frac{\phi}{h_2} = 20 - \frac{27{,}295}{10} = 17{,}27\ °C$.

$$T_\alpha' = T_1' + \phi\left(\frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda}\right) = -9{,}45 + 6{,}53 = -2{,}92\ °C,$$

$$T_\beta' = T_2' - \phi\left(\frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda}\right) = 17{,}27 - 6{,}53 = 10{,}74\ °C.$$

Finalement, le flux thermique avec le 2ème vitrage double est réduit de 20 %, ce qui peut éventuellement justifier l'investissement.

3- Pour effectuer les calculs demandés, il faut repartir de la relation de définition du flux thermique dans la couche centrale d'air, $\phi = h_0\left(T_\beta - T_\alpha\right)$. Il est alors possible de calculer la valeur du coefficient h_0 à partir de celles de ϕ, T_α et T_β pour les configurations n°1 et n°2, traitées dans les deux questions précédentes. Avec les valeurs numériques obtenues dans les questions 1- et 2-, on obtient :

$h_0 = \frac{34{,}653}{16{,}32 + 1{,}02} = 1{,}998 \approx 2$ (question 1), $h_0 = \frac{27{,}295}{10{,}74 + 2{,}92} = 1{,}998 \approx 2$ (question 2).

Pour les deux cas, ce résultat n'est pas un hasard, et il doit pouvoir être justifié sur la base d'arguments analytiques précis. Par exemple, si l'on reprend la configuration n°1 de la question 1-, il suffit de réécrire les relations de définition générales :

$\phi = h_0\left(T_\beta - T_\alpha\right)$, $T_\alpha = T_1 + \phi\left(\frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda}\right)$, et $T_\beta = T_2 - \phi\frac{e}{\lambda}$, soit :

$T_\beta - T_\alpha = T_2 - T_1 - \phi\left(\frac{3e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}}\right)$, avec $T_2 = T_{\infty 2} - \frac{\phi}{h_2}$ et $T_1 = T_{\infty 1} + \frac{\phi}{h_1}$, soit au final :

$$T_\beta - T_\alpha = T_{\infty 2} - T_{\infty 1} - \phi\left(\frac{1}{h_1} + \frac{3e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{1}{h_2}\right),$$

c'est-à-dire : $T_\beta - T_\alpha = T_{\infty 2} - T_{\infty 1} - \phi\left(R_{Global} - \frac{1}{h_0}\right)$,

soit $\phi = h_0\left(T_\beta - T_\alpha\right) = h_0\left(T_{\infty 2} - T_{\infty 1}\right) - \phi h_0 R_{Global} + \phi$.

Au final, on retrouve bien la relation triviale de définition de la résistance thermique globale :
$T_{\infty 2} - T_{\infty 1} = \phi R_{Global}$, ce qui justifie complétement le résultat obtenu numériquement, avec h_0 = 1,998 au lieu de 2, à cause d'erreurs liées aux arrondis au cours des calculs. Pour le cas du deuxième vitrage double (question 2-), le raisonnement et les calculs sont directement transposables, la seule différence portant sur T_β qui s'écrit : $T_\beta' = T_2' - \phi\left(\frac{e}{\lambda} + \frac{e'}{\lambda_{air}} + \frac{e}{\lambda}\right)$ au lieu de $T_\beta = T_2 - \phi\frac{e}{\lambda}$.

Exercice 9 : Thermique d'une tuyère d'un turboréacteur (A)

A l'intérieur d'une tuyère d'un turboréacteur, un gaz de combustion est détendu. Cette tuyère est fabriquée soit en cuivre, soit en acier AISI 304. L'extérieur de la paroi est refroidi par une circulation d'eau portant la surface externe à 150 °C. Les gaz au cours du processus de combustion sont portés à 2750 °C à l'intérieur de la tuyère, et le coefficient de convection associé vaut h = 2.10^4 W/m^{2}K. On admet que les limites acceptables de fonctionnement du cuivre et de l'acier sont respectivement 540 °C et 980 °C. En supposant le rayon de la tuyère beaucoup plus grand que l'épaisseur des parois, quelle devrait être l'épaisseur minimale acceptable suivant le type de matériaux ? Les conductivités thermiques du cuivre et de l'acier AISI 304 sont respectivement 401 W/m.K et 14,9 W/m.K.

Solution :

Ici aussi, il faut écrire une équation de conservation du flux thermique dans la paroi (loi de Fourier pour la conduction), et à l'intérieur de la tuyère (loi de Newton pour la convection), c'est-à-dire sous la forme d'une condition aux limites type Fourier :

$$\phi = K\left(T_\infty - T_i\right) = \lambda\frac{dT}{dr} = \lambda\frac{T_i - T_e}{e}, \text{ soit } e_m = \frac{\lambda\left(T_i - T_e\right)}{K\left(T_\infty - T_i\right)}.$$

Les applications numériques, à l'aide des valeurs fournies pour le cuivre et pour l'acier AISI 304, sont les suivantes :

- cas du cuivre : $e_m = \frac{400(540-150)}{2.10^4(2750-540)} = 3{,}5\ mm$,

- cas de l'acier AISI 304 : $e_m = \dfrac{14{,}9(980-150)}{2.10^4(2750-980)} = 0{,}35\ mm$ ·

Pour interpréter ces résultats, il peut être utile de réécrire l'équation de départ sous une forme un peu différente :

$T_i = \dfrac{KT_\infty + T_e(\lambda/e)}{K+(\lambda/e)} = T_e + \dfrac{K}{K+(\lambda/e)}(T_\infty - T_e)$. On remarque notamment que si le rapport λ/e augmente, alors T_i se rapproche de T_e, et inversement si le rapport λ/e diminue, alors T_i se rapproche de T_∞.

Exercice 10 : Calorifugeage d'une canalisation (B)

Une canalisation cylindrique (diamètre extérieur 4 cm) de température extérieure 100°C traverse l'air ambiant à 20°C (coefficient de convection h = 8 W/m^{2}K).

1- Calculer le flux thermique perdu par mètre de canalisation.

2- On entoure la canalisation d'un isolant de conductivité λ = 0.24 W/m.K. Etablir l'existence d'un rayon critique d'isolant. Calculer le flux thermique perdu pour ce rayon critique. Donner une interprétation physique de ce résultat.

3- Calculer la température de la face externe de l'isolant dans le cas précédent (rayon critique d'isolant).

Solution :

1- Il faut commencer par résoudre l'équation de la chaleur dans un tube, sans terme source et en régime stationnaire (absence de terme dépendant du temps). Il ne reste en fait qu'une équation de Poisson, $\Delta T = 0$, avec $\Delta T = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dT}{dr}\right)$. Il faut donc intégrer deux fois cette équation différentielle autour de la coordonnée radiale *r*. Cela donne :

$r\dfrac{dT}{dr} = A$; $T(r) = A\ln r + B$. Il faut alors utiliser les conditions aux limites, ce qui fournit deux équations : $T_e = A\ln r_e + B$; $T_i = A\ln r_i + B$, permettant de calculer les constantes d'intégration *A* et *B* :

$$A = \frac{T_e - T_i}{\ln T_e - \ln T_i} \ ; \ B = \frac{T_e \ln r_i - T_i \ln r_e}{\ln T_e - \ln T_i}.$$

Le champ de température peut alors se mettre sous la forme :

$$T(r) = \frac{T_i \ln r_e - T_e \ln r_i + (T_e - T_i)\ln r}{\ln r_e - \ln r_i}.$$

2- Le flux de chaleur dans le tube se calcule à l'aide de l'équation de Fourier :

$$\phi = -\lambda S \frac{dT}{dr} = -2\pi r \ell \lambda \frac{T_e - T_i}{r(\ln r_e - \ln r_i)} = 2\pi \ell \lambda \frac{T_i - T_e}{\ln r_e - \ln r_i}.$$

La résistance thermique se calcule aisément à partir de sa définition :

$$R = \frac{T_i - T_e}{\phi} = \frac{\ln r_e - \ln r_i}{2\pi \ell \lambda} .$$

3- Pour l'application sur le calorifugeage de la conduite, il faut commencer par écrire que la température se distribue avec une symétrie de révolution de manière radiale sous la forme :

$$\Delta T = T_0 - T_\infty = T_0 - T_i + T_i - T_e + T_e - T_r + T_r - T_\infty = \left(\mathrm{R}_{eau} + R_{conduite} + R_{isolant} + R_{air}\right)\phi ,$$

avec : $R = \mathrm{R}_{eau} + \dfrac{\ln r_e - \ln r_i}{2\pi\lambda_{can}\ell} + \dfrac{\ln r - \ln r_e}{2\pi\lambda_{isolant}\ell} + \dfrac{1}{2\pi r \ell K} = \mathrm{R}_0 + \dfrac{1}{2\pi\ell}\left(\dfrac{\ln r - \ln r_e}{\lambda_{isolant}} + \dfrac{1}{Kr}\right).$

Pour optimiser le rayon r de l'isolant, on recherche alors l'extremum de la résistance thermique R autour de la coordonnée radiale r. On obtient :

$\dfrac{dR}{dr} = \dfrac{1}{2\pi\ell}\left(\dfrac{1}{\lambda_{iso} r} - \dfrac{1}{Kr^2}\right) = \dfrac{1}{2\pi\lambda_{iso}\ell r^2}\left(r - r_c\right)$, avec : $r_c = \lambda_{iso} / K$, rayon critique.

En fait, la résistance thermique R passe éventuellement par un minimum en fonction de r, ce qui indique qu'au-delà de ce rayon critique r_c l'augmentation de l'épaisseur de la couche isolante est contre-productive, puisque la résistance thermique croit à nouveau au-delà de r_c. Les calculs numériques confirment complétement ce résultat. Ils sont rassemblés dans la Table jointe ci-dessous, en utilisant la notation :

$$\frac{\phi}{\ell} = \frac{T_i - T_\infty}{\dfrac{1}{Kr} + \dfrac{\ln\left(r / r_e\right)}{\lambda_{iso}}} .$$

$r-r_e$ (en mm)	ϕ/ℓ (r_e =15 mm) (en W/m)	ϕ/ℓ (r_e =50 mm) (en W/m)
0	22	220
1	24,6	210
2	26,6	201
5	30,1	179
10	31,4	153
100	20,7	55

$r_c = \lambda_{iso} / K = 0{,}015 / 10 = 15\ mm$

Exercice 11 : Transferts de chaleur pour le béton d'un petit barrage (A)

Un petit barrage est rapidement coulé. Il est assimilable à une grande plaque de 2 m d'épaisseur, en béton de conductivité λ = 1,2 W/m.K. La chaleur dégagée par la prise est assimilable à une source interne uniforme de 60 W/m^3. Si les deux surfaces du barrage sont maintenues à 20 °C par l'air extérieur, calculer la température maximale à laquelle le béton sera soumis, en supposant que cette configuration se ramène à un simple problème de conduction en régime permanent.

Solution :

La prise du béton s'accompagne d'une réaction chimique exothermique, c'est-à-dire d'une production de chaleur. Dans un tel cas, il faut donc partir de l'équation de la chaleur avec une source que l'on suppose distribuée sur l'épaisseur du barrage, soit en écrivant :

$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} + Q_S = 0$, pour le cas d'un problème à une dimension x, prise le long de l'épaisseur du barrage. Il reste alors à effectuer deux intégrations le long de x, soit en écrivant :

$\lambda \frac{dT}{dx} + Q_S x = A$, et $\lambda T = -\frac{1}{2} Q_S x^2 + Ax + B$. Le calcul des constantes d'intégration A et B s'effectue en utilisant les conditions aux limites sur les deux faces du barrage, en $x = \pm L$, ce qui fournit les deux relations suivantes :

$\lambda T_S = -\frac{1}{2} Q_S L^2 + AL + B$, et $\lambda T_S = -\frac{1}{2} Q_S L^2 - AL + B$, ce qui impose que $A = 0$, résultat qui résulte de la symétrie du problème. Au final, il reste donc : $B = \lambda T_S + \frac{1}{2} Q_S L^2$, soit pour le champ de température : $T(x) = T_S - \frac{Q_S}{2\lambda}\left(x^2 - L^2\right)$. Il s'agit d'un profil parabolique, caractéristique pour ce genre de configuration. La température est donc maximale au centre du barrage (en *x=0*), et elle prend la valeur : $T_M = T_S + \frac{Q_S}{2\lambda} L^2$. L'application numérique fournit : $T_M = 20 + \frac{60}{2\ .\ 1{,}2} 1^2 = 45\ °C$.

Il est aussi possible de calculer le flux thermique rayonné, en repartant de la loi de Fourier :

$\phi = -\lambda S \frac{dT}{dx} = \lambda S \frac{Q_S}{\lambda} x = Q_S x S$. La valeur numérique du flux de chaleur rayonné par unité de surface, par exemple en $x = L$ est simplement 60 W, ce qui est normal puisque l'on retrouve justement dans ce cas la valeur de la source de chaleur.

Exercice 12 : Transferts de chaleur dans une ligne à haute tension (B)

Une ligne à haute tension doit transporter un courant de 1000 A dans un fil de cuivre (λ = 381 W/m.K) de diamètre 2,5 cm et de résistance électrique 0,06 W/km. Cette ligne est placée dans l'air ambiant « estival » de coefficient de convection h = 18 W/m^{2}K.

1- Calculer la production interne de chaleur liée au transport électrique.

2- A partir de la résolution de l'équation générale de la conduction, exprimer la température au sein de la ligne en fonction de la distance au centre (conduction radiale). Calculer la température au centre de la ligne et sur le pourtour (en $r = R$). Conclure sur les valeurs numériques obtenues.

Solution :

1- Ici encore, on retrouve un problème de conduction de la chaleur avec une source interne de chaleur. Celle-ci est due au transport du courant électrique dans la ligne de haute tension. Il faut utiliser la loi d'Ohm pour calculer l'énergie thermique produite : $Q_S = \frac{4\mathrm{R}_{elec} I^2}{\pi d^2 L} = \frac{0{,}06}{10^3} \cdot \frac{10^6}{\pi\left(1{,}25.10^{-2}\right)^2} = \frac{6}{\pi\left(1{,}25\right)^2} 10^5$ = 122 kW.

2- Du fait de la symétrie de révolution cylindrique, l'équation de la chaleur avec terme source $\lambda \Delta T + Q_S = 0$ est résolue en écrivant le laplacien scalaire sous la forme : $\Delta T = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)$. Il ne reste plus qu'à intégrer l'équation différentielle à deux reprises autour de la coordonnée radiale r, ce qui donne les résultats suivants :

$\frac{dT}{dr} = -\frac{Q_S}{2\lambda} r + \frac{A}{r}$, et : $T(r) = -\frac{Q_S}{4\lambda} r^2 + A \ln r + B$.

Il existe une singularité de cette solution (en $r=0$), ce qui impose de prendre $A=0$. La deuxième constante d'intégration B, est évaluée à l'aide de la condition limite à la surface du conducteur (en $r=R$). On obtient finalement : $B = T_R + \frac{Q_S}{4\lambda} R^2$, ce qui fournit un profil radial parabolique sous la forme : $T(r) = T_R - \frac{Q_S}{4\lambda}\left(r^2 - R^2\right)$.

L'étape suivante consiste à écrire une condition de continuité du flux thermique transmis de la ligne de haute tension vers l'air environnant, c'est-à-dire en utilisant une condition mixte de transfert (ou de Fourier), sous la forme : $\left(-\lambda \frac{dT}{dr}\right)_{(r=R)} = h\left(T_R - T_\infty\right)$.

Après utilisation du profil parabolique obtenu pour le champ de température $T(r)$, il reste finalement : $\frac{Q_S}{2} R = h\left(T_R - T_\infty\right)$, soit $T_R = T_\infty + \frac{Q_S R}{2h}$. L'application numérique avec les données pertinentes de l'énoncé, fournit les résultats suivants :

$T_R = 30 + \frac{1{,}22.10^5 .\ 1{,}25.10^{-2}}{2\ .\ 18} = 72{,}4\ °C$. Par ailleurs, le profil de dépendance radial permet de calculer la valeur maximale de température au centre de la ligne (en $r=0$), ou tout du moins d'évaluer l'écart de cette valeur avec celle de la périphérie (en $r=R$), en écrivant : $T_{Max} - T_R = \frac{Q_S}{4\lambda} R^2 = \frac{1{,}22.10^5 . \left(1{,}25.10^{-2}\right)^2}{4\ .\ 381} = 0{,}0125 °C$.

Le fait que la température de surface de la ligne à haute tension se retrouve à plus de 70 °C explique que les oiseaux ne s'y posent jamais, du fait qu'ils se bruleraient les pattes. De plus, il existe parfois un phénomène remarquable lié à cette température de surface élevée. En hiver, lorsqu'il tombe du grésil (ou de la neige fondue), il y a vaporisation au contact de la ligne, c'est-à-dire ici sublimation instantanée. Ce phénomène est directement observable avec une forte émission acoustique, mesurable avec un sonomètre et correspondant à une émergence de 20 dB au pied d'un pylône par rapport au bruit ambiant (mesure réalisée au sud de la Sarthe en décembre 2016, à l'aide d'un simple téléphone portable muni d'une application ad-hoc). Au passage, le même phénomène existe par temps de pluie, avec un grésillement caractéristique, bien qu'il soit moins remarquable que par temps de grésil.

Exercice 13 : Etude thermique d'un thermomètre à résistance métallique (A)
Déterminer la constante de temps d'un thermomètre à résistance métallique dans l'eau et dans l'air après avoir vérifié la validité de l'hypothèse d'une résistance interne négligeable. Pour cela, on calculera le nombre de Biot dans chacun des cas. Les résistances se présentent sous la forme de fil de Constantan ayant 1 mm de diamètre. On fournit les coefficients de convection thermique dans l'eau et dans l'air (h_{eau} = 200 W/m^{2}K, et h_{air} = 10 W/m^{2}K), ainsi que diverses valeurs numériques de la Table.

à 20 °C	ρ (kg/m^3)	C (J/kg.K)	λ (W/m.K)
Ni	8900	444	90,7
Cu	8930	386	398
Constantan (55 % Cu et 45 % Ni)	8920	384	23
Pt 13 Rh	19610	133	36,9

Solution :

Pour ce type d'exercice, il faut tout d'abord commencer par s'assurer que le nombre de Biot ($B_i = KL/\lambda$) est suffisamment petit devant 1, pour que la température de l'objet soit uniforme. Dans cette expression, L représente une longueur caractéristique. C'est par exemple le rapport du volume à la surface de l'objet considéré. Dans le cas d'une portion de cylindre de rayon R et de longueur ℓ, cette longueur caractéristique L se limite au rapport du volume du cylindre à sa surface, soit $L = \dfrac{\pi R^2 \ell}{2\pi R \ell} = R/2$. Le nombre de Biot représente le rapport de la résistance interne du matériau (telle que décrite par la loi de Fourier de la conduction), à sa résistance externe (telle que décrite par la loi de Newton de la convection). En bref, $B_i = R_i/\mathrm{R_e} = \left(\dfrac{L}{\lambda S}\right) \Big/ \left(\dfrac{1}{KS}\right) = \dfrac{KR}{2\lambda}$. Il est bien clair que si le nombre de Biot est faible, alors la résistance thermique interne est faible aussi. Pour un flux de chaleur échangé significatif, alors la loi de Fourier impose que le gradient thermique soit lui aussi faible, ce qui traduit donc l'homogénéité de la température à l'intérieur de l'objet concerné. Pour cet exercice, il est suggéré d'utiliser les valeurs numériques du constantan, à la fois dans l'eau et dans l'air. L'application numérique pour le calcul du nombre de Biot fournit :

∗ cas de l'eau : $B_i^{eau} = \frac{KR}{2\lambda} = \frac{200 \cdot 0{,}5.10^{-3}}{2 \cdot 23} = 2{,}2.10^{-3}$,

∗ cas de l'air : $B_i^{air} = \frac{KR}{2\lambda} = \frac{10 \cdot 0{,}5.10^{-3}}{2 \cdot 23} = 1{,}1.10^{-4}$.

Pour les deux cas, le nombre de Biot reste faible devant un, ce qui traduit donc le fait que la température du corps sera homogène. Ceci est favorable pour utiliser le thermomètre. La loi d'évaluation de la température moyenne du thermomètre en fonction du temps peut s'obtenir à partir d'un simple bilan énergétique traduisant la continuité du flux de chaleur à l'interface entre le corps du thermomètre et le fluide environnant. Cette relation est écrite sous la forme d'un simple bilan calorimétrique :

$KS(T - T_\infty) = \frac{dQ}{dt}$, avec : $dQ = -\rho V C_P dT$, soit : $\frac{dT}{T - T_\infty} = -\frac{KS}{\rho C_P V} dt$.

Cette équation différentielle est alors intégrée entre 0 et t, sous la forme :

$\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T - T_\infty} = -\int_0^t \frac{KS}{\rho C_P V} dt$, ce qui donne : $\left[\ln(T - T_\infty)\right]_{T_0}^{T} = -\frac{KS}{\rho C_P V}\left[t\right]_0^t$,

soit finalement : $\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp(-t/\tau)$, avec : $\tau = \frac{\rho C_P V}{KS} = \frac{\rho C_P R}{2K}$.

Les valeurs numériques permettent de calculer la constante de temps τ, à la fois dans l'eau et dans l'air. On obtient :

$\tau_{eau} = \frac{8920 \cdot 384 \cdot 0{,}5.10^{-3}}{2 \cdot 200} = 4{,}3\ s$, et $\tau_{air} = \frac{8920 \cdot 384 \cdot 0{,}5.10^{-3}}{2 \cdot 10} = 85{,}6\ s$.

Il est bien clair que la valeur de la constante de temps dans l'air est trop forte. En conséquence, ce thermomètre ne pourra pas fonctionner dans l'air, mais il sera efficace dans l'eau.

Exercice 14 : Transferts de chaleur dans un mur double (B)

Un mur double est constitué de deux couches planes d'épaisseurs respectives e_1 et e_2, de conductivités thermiques λ_1 et λ_2. L'extérieur du mur est à la température T_1 en $x = 0$. L'intérieur de l'habitation est à la température T_2 pour $x = e_1+e_2$. On suppose de plus que $T_2 > T_1$. La jonction entre les deux parties du mur est donc à une température intermédiaire T_i pour $x = e_1$.

1- Reprendre les calculs classiques du cours pour l'équation de la chaleur d'un mur simple, et aboutir aux solutions habituelles, notées $T(x) = Ax + B$ (pour $0 < x < e_1$), et $T'(x) = A'x + B'$ (pour $e_1 < x < e_1+e_2$).

2- Ecrire les trois conditions aux limites sur les champs de température : en $x = 0$, en $x = e_1$, et en $x = e_1+e_2$. Justifier pourquoi il manque une équation pour résoudre complètement le problème.

3- Etablir l'équation de continuité du flux de chaleur à l'interface entre les deux murs, en $x = e_1$. En déduire une relation triviale entre A' et A. Exprimer finalement toutes les constantes du problème, à savoir A, B, A' et B'.

4- Calculer alors la température intermédiaire T_i, et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme suivante : $T_i = T_1 + (T_2 - T_1)\left(\dfrac{\lambda_2 e_1}{\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1}\right)$.

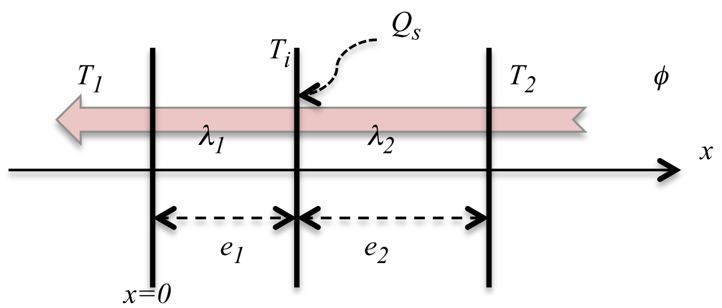
Tracer alors les champs de température dans les deux couches du mur, lorsque $\lambda_1 > \lambda_2$, ou lorsque $\lambda_2 > \lambda_1$. Justifier vos tracés sur la base d'un argument physique.

5- On suppose dorénavant qu'une source de chaleur Q_S est uniformément disposée à l'interface entre les deux couches, en $x = e_1$. Ecrire les nouvelles équations de la chaleur dans chaque couche. Résoudre alors ce problème, et aboutir aux deux équations suivantes : $(Q_S\, x^2)/2 + \lambda_1\, T(x) = Ax + B$ (pour $0 < x < e_1$), et $(Q_S\, x^2)/2 + \lambda_2\, T'(x) = A'x + B'$ (pour $e_1 < x < e_1+e_2$).

6- Ecrire les trois conditions aux limites sur les champs de température : en $x = 0$, en $x = e_1$, et en $x = e_1+e_2$. Justifier une nouvelle fois pourquoi il manque une équation pour résoudre complètement le problème.

7- Etablir l'équation de continuité du flux de chaleur à l'interface entre les deux murs, en $x = e_1$. En déduire une relation triviale entre A' et A. Exprimer finalement toutes les constantes du problème, à savoir A, B, A' et B'.

8- Calculer alors la température intermédiaire T_i'. Montrer que dans l'expression obtenue, si l'on considère $Q_S = 0$, on retrouve la valeur de T_i établie à la question 4-.



Solution :

1- L'équation de la chaleur à une dimension sans terme source est écrite pour les deux domaines : $\lambda_1 \dfrac{d^2T}{dx^2} = 0$, pour $x < e_1$, et $\lambda_2 \dfrac{d^2T'}{dx^2} = 0$, pour $x > e_1$.

Les solutions sont : $T(x) = Ax + B$, pour $x < e_1$, et $T'(x) = A'x + B'$, pour $x > e_1$.

2- Il existe quatre conditions aux limites qui s'écrivent :
Pour $x = 0$, $T_1 = B$ (1) ; Pour $x = e_1$, $T_i = Ae_1 + B$ (2), mais aussi $T_i = A'e_1 + B'$ (3) ;
Pour $x = e_1 + e_2$, $T_2 = A'\left(e_1 + e_2\right) + B'$ (4). L'utilisation de ces 4 équations permet d'aboutir à la relation : $T_2 - T_1 = Ae_1 + A'e_2$ (5). Par ailleurs, les équations (2) et (3) permettent d'établir la relation suivante : $B' = T_1 + e_1\left(A - A'\right)$.

3- La continuité du flux de chaleur entre les deux milieux (ou condition limite de Neumann) se traduit par la relation suivante :

$\phi = -\lambda_1 S\dfrac{dT}{dx} = -\lambda_2 S\dfrac{dT}{dx}$, d'où : $\lambda_1 A = \lambda_2 A'$. Cette dernière relation permet à l'aide de l'équation (5) d'obtenir finalement le coefficient A sous la forme suivante : $A = \dfrac{\lambda_2\left(T_2 - T_1\right)}{\lambda_2 e_1 + \lambda_1 e_2}$. Les autres coefficients *A', B* et *B'* sont alors aisément obtenus.

4- La température intermédiaire T_i est calculée à partir de l'équation (2), $T_i = T_1 + \dfrac{\lambda_2 e_1\left(T_2 - T_1\right)}{\lambda_2 e_1 + \lambda_1 e_2}$.

Selon les valeurs des conductivités $\lambda_2 > \lambda_1$ ou bien $\lambda_2 < \lambda_1$, les profils de température dans les deux sous couches possèdent des pentes différentes. Lorsque c'est $\lambda_2 > \lambda_1$, alors la pente de la température dans la sous-couche n°1 est plus forte que dans la sous-couche n°2, et inversement pour le cas où $\lambda_2 < \lambda_1$.

5- Lorsqu'il existe une source de chaleur qui est placée à l'interface entre les deux murs, les équations de la chaleur sont modifiées sous la forme :

$Q_S + \lambda_1\dfrac{d^2T}{dx^2} = 0$, pour $x < e_1$, et $Q_S + \lambda_2\dfrac{d^2T'}{dx^2} = 0$, pour $x > e_1$. Les solutions sont :

$\dfrac{Q_S x^2}{2} + T(x) = Ax + B$, pour $x < e_1$, et $\dfrac{Q_S x^2}{2} + T'(x) = A'x + B'$, pour $x > e_1$.

6- Les 4 nouvelles équations aux limites pour ce problème s'écrivent dorénavant :

Pour $x = 0$, $\lambda_1 T_1 = B$ (1') ; Pour $x = e_1$, $\dfrac{Q_S e_1^2}{2} + \lambda_1 T_i^{'} = Ae_1 + B$ (2'), mais aussi

$\dfrac{Q_S e_1^2}{2} + \lambda_2 T_i^{'} = A'e_1 + B'$ (3') ; Pour $x = e_1 + e_2$, $\dfrac{Q_S\left(e_1 + e_2\right)^2}{2} + \lambda_2 T_2 = A'\left(e_1 + e_2\right) + B'$ (4').

Une fois encore, il manque une équation pour résoudre complétement le problème, puisque nous avons 5 inconnues (les 4 termes d'amplitude, ainsi que la température à l'interface) pour quatre relations de continuité. En combinant judicieusement ces équations, il est possible d'obtenir :

$\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)T_i^{'} = \left(A' - A\right)e_1 + B' - \lambda_1 T_1$ (5'), et $\dfrac{Q_S e_2}{2}\left(e_1 + e_2\right) + \lambda_2\left(T_2 - T_i^{'}\right) = A'e_2$ (6').

7- C'est de nouveau l'équation de continuité du flux de chaleur qui va fournir la 5ème relation s'écrivant ici : $\phi = -\lambda_1 S \frac{dT}{dx} = -\lambda_2 S \frac{dT}{dx}$. Par contre, cette relation est plus simple ici, puisque l'on obtient : $A = A'$. Il faut alors reprendre les deux équations (5') et (6') qui se mettent sous la forme simplifiée :

$(\lambda_2 - \lambda_1) T_i' = B' - \lambda_1 T_1$ (5'), et $\frac{Q_S e_2}{2}(e_1 + e_2) + \lambda_2 (T_2 - T_i') = A e_2$ (6'),

ce qui permet d'extraire les amplitudes *A* et *B'*, sous la forme :

$A = \frac{Q_S}{2}(e_1 + e_2) + \frac{\lambda_2}{e_2}(T_2 - T_i')$, et $B' = (\lambda_2 - \lambda_1) T_i' + \lambda_1 T_1$.

Pour terminer les calculs, il est nécessaire de combiner les équations (2') et (3') sous la forme $\lambda_2(2') - \lambda_1(3')$: $\frac{Q_S e_1^2}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) = A e_1 (\lambda_2 - \lambda_1) + \lambda_1 (\lambda_2 T_1 - B')$, ce qui permet d'extraire B' en fonction de A, sous la forme :

$$B' = \lambda_2 T_1 + e_1 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 \right) \left(A - \frac{Q_S e_1}{2} \right) .$$

8- Le reste des calculs consiste à trouver l'expression de la température T_i' de l'interface entre les deux murs. Pour cela, on repart de l'équation (5') dans laquelle on injecte les expressions de *A* et *B'* obtenues précédemment :

$$(\lambda_2 - \lambda_1) T_i' + \lambda_1 T_1 = \lambda_2 T_1 + e_1 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 \right) \left[\frac{Q_S}{2}(e_1 + e_2) + \frac{\lambda_2}{e_2}(T_2 - T_i') - \frac{Q_S}{2} e_1 \right],$$

soit après divers réarrangements : $T_i' = \frac{2T_1 \lambda_1 e_2 + 2T_2 \lambda_2 e_1 + Q_S e_1 e_2^2}{2\lambda_1 e_2 + 2\lambda_2 e_1}$.

Lorsque la source est supprimée, on retrouve le résultat classique : $T_i' = \frac{T_1 \lambda_1 e_2 + T_2 \lambda_2 e_1}{\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1}$ qui n'est rien d'autre qu'une simple relation barycentrique, les températures T_1 et T_2 étant affectées des coefficients λ_1 / e_1 et λ_2 / e_2. Le fait que les coefficients de pondération soit en λ / e tient à la loi de Fourier pour laquelle c'est bien ce rapport qui intervient et non pas le produit $\lambda\ e$.

6. Transferts thermiques par conduction – Etude d'autres cas

Exercice 15 : Etude thermique d'un fer à repasser (B)

Un fer à repasser d'une puissance de 500 W possède une semelle d'acier (capacité thermique C = 461 J/kg.K, conductivité thermique λ = 20 W/m.K, épaisseur de la semelle 2 cm) de 1,3 kg et de surface d'échange S = 0,05 m^2. La température initiale du fer est celle du milieu ambiant (20 °C) et le coefficient d'échange entre l'air et le fer est de 18 W/m^{2}K.

1- Calculer le nombre de Biot de ce système. Conclusion ?

2- Quelle est la température de régime du fer en fonctionnement ?

3- On branche le fer. Au bout de combien de temps atteindra-t-il 110 °C ?

4- On débranche le fer lorsqu'il atteint effectivement les 110 °C. Au bout de combien de temps atteindra-t-il la température de sécurité de 30 °C ?

Solution :

1- Il s'agit d'un exercice similaire à celui sur le thermomètre métallique. Il faut commencer par calculer le nombre de Biot pour contrôler que la résistance thermique interne (celle de la semelle) est faible devant la résistance externe, assurant ainsi une température uniforme de la semelle. Le nombre de Biot pour cette application est fourni par l'expression :

$$B_i = \frac{Ke}{\lambda} = \frac{18\ .\ 2.10^{-2}}{20} \approx 2.10^{-2} << 1\ .$$

2- Il est alors possible de calculer la température de fonctionnement de la semelle du fer, en utilisant la loi de Newton de la convection, connaissant la puissance nominale électrique du fer à repasser :

$$\phi = KS\left(T_P - T_\infty\right),\ \text{d'où : } T_P = T_\infty + \frac{\phi}{KS} = 20 + \frac{500}{18\ .\ 5.10^{-2}} = 575°C\ .$$

3- L'équation du bilan thermique consiste à écrire que l'échauffement du fer passe par des échanges convectifs directs avec la source de chaleur, soit la relation suivante :

$$0 = KS\left(T - T_P\right) + \rho V C_P \frac{dT}{dt},\ \text{équation qui est réécrite sous la forme : } \frac{dT}{T - T_P} = -\frac{dt}{\tau},$$

avec : $\tau = \dfrac{\rho V C_P}{KS}$. Il faut alors intégrer l'équation différentielle, $\displaystyle\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T - T_P} = -\int_0^t \frac{dt}{\tau}$, soit après calcul et réarrangement, le résultat final sous la forme :

$$T - T_P = \left(T_0 - T_P\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Application numérique : $\tau = \dfrac{\rho V C_P}{KS} = \dfrac{1{,}3\ .\ 461}{18\ .\ 5.10^{-2}} = 666\ s$. Il est alors possible de calculer la durée de chauffage du fer à repasser, pour obtenir sa température de fonctionnement (110 °C).

$$t = \tau \ln \frac{T_P - T_0}{T_P - T} = 666.\ln \frac{575-20}{575-110} = 118\ s \quad \text{(soit environ deux minutes).}$$

4- Pour la phase de refroidissement du fer à repasser, le raisonnement et les calculs sont tout à fait similaires. Ici dans le bilan thermique, il faut prendre en considération les échanges convectifs se produisant avec l'air environnant (à 20°C). Si l'on considère une température de consigne (sécurité) de T_C = 30°C, on obtient :

$$t = \tau \ln \frac{T_0 - T_\infty}{T_C - T_\infty} = 666.\ln \frac{110-20}{30-20} = 1460\ s \quad \text{(soit environ 24 minutes).}$$

Le refroidissement du fer est donc beaucoup plus long que son échauffement (pour les données numériques considérées), résultat tout à fait en accord avec l'expérience pratique.

Exercice 16 : Étude thermique d'un four ayant une conductivité variable (B)

Le mur d'un four est construit avec des briques réfractaires ayant une épaisseur *d*. Les températures des parois externe et interne des murs du four, lorsqu'il est en état de fonctionnement sont notées T_1 et T_2 (avec $T_1 < T_2$). Une dépendance linéaire de la conductivité thermique λ avec la température T est prise sous la forme suivante : $\lambda = \lambda_0\left(1 + \beta T\right)$.

1- Ecrire l'équation de Fourier permettant d'évaluer le flux de chaleur ϕ transmis à travers la paroi du four (par m^2 de surface), sous la forme : $\phi = -\lambda_0\left(1+\beta T\right)\dfrac{dT}{dx}$. Intégrer cette équation, après séparation des variables T et x, sur l'épaisseur de la paroi δ, correspondant au passage de la température de T_2 à T_1. Terminer les calculs, et montrer finalement que l'on retrouve la loi de variation pour un mur simple (sans variation de la conductivité thermique λ avec la température T), sous la forme : $\phi = \dfrac{\lambda_m}{\delta}\left(T_2 - T_1\right)$, avec $\lambda_m = \lambda_0\left(1 + \dfrac{\beta}{2}\left(T_2 + T_1\right)\right)$.

2- Pour calculer la distribution de température *T(x)* dans le mur, il faut alors procéder à la même intégration que pour la question précédente, mais entre 0 et *x* le long du mur du four, soit entre T_2 et *T(x)*, pour les températures. Effectuer ces calculs, et montrer alors que le champ de température *T(x)* est solution d'une simple équation du second degré, et qu'il peut finalement se mettre sous la forme : $T(x) = -\frac{1}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{1}{\beta} + T_2\right)^2 - \frac{2\phi x}{\beta\lambda_0}}$. Montrer que cette expression valide bien les deux conditions aux limites en $x = 0$ et en $x = \delta$. Pour la condition aux limites en $x = \delta$, il faut repartir des résultats établis à la question 1-.

3- Application numérique avec les données suivantes :
δ =250 mm; T_1=50°C; T_2=1350°C ; λ_0 = 0,838 W/mK ; $\beta = 7.10^{-4}$ K^{-1}. Calculer le flux de chaleur échangé par unité de surface ϕ, ainsi que $T(\delta/2)$, la température au milieu du mur du four. Quels sont vos commentaires sur les résultats obtenus, notamment pour la température ? Quel serait le résultat pour le cas où $\beta < 0$?

Solution :

1- On commence par écrire la loi de Fourier pour les échanges de chaleur à l'intérieur des murs du four, sous la forme habituelle : $\phi = -\lambda S \frac{dT}{dx}$, avec : $\lambda(T) = \lambda_0 (1 + \beta T)$.
L'expression obtenue est alors intégrée sur l'épaisseur du four, sous la forme (pour une surface de référence de 1 m^2), δ étant l'épaisseur de la paroi du four :

$\phi \int_0^\delta dx = -\lambda_0 \int_{T_2}^{T_1} (1 + \beta T)\, dT$, soit après intégration : $\phi = \frac{\lambda_0}{\delta}(T_2 - T_1)\left[1 + \frac{\beta}{2}(T_2 + T_1)\right]$.

L'expression obtenue est de la forme : $\phi = \frac{\lambda_m}{\delta}(T_2 - T_1)$, avec : $\lambda_m = \lambda_0\left[1 + \frac{\beta}{2}(T_2 + T_1)\right]$.

2- Pour obtenir le champ de température à l'intérieur de la paroi du four, il faut procéder au même calcul, mais avec des bornes d'intégration légèrement différentes :

$\phi \int_0^x dx = -\lambda_0 \int_{T_2}^{T(x)} (1 + \beta T)\, dT$, ce qui fournit : $\frac{\phi x}{\lambda_0} = T_2 - T(x) + \frac{\beta}{2} T_2^2 - \frac{\beta}{2} T^2(x)$.

Il s'agit manifestement d'une équation du second degré pour $T(x)$ dont la solution se met sous la forme :

$$T(x) = -\frac{1}{\beta} + \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - \frac{2\phi x}{\beta\lambda_0} + \frac{2T_2}{\beta} + T_2^2} = -\frac{1}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{1}{\beta} + T_2\right)^2 - \frac{2\phi x}{\beta\lambda_0}}.$$

Cette expression doit vérifier les conditions aux limites en $x = 0$ et en $x = \delta$. Pour $x = 0$, on retrouve bien la température à l'intérieur du four T_2. Pour $x = \delta$, on obtient :

$T(x = \delta) = -\frac{1}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{1}{\beta} + T_2\right)^2 - \frac{2\phi\delta}{\beta\lambda_0}}$, soit en notant que : $\phi = \frac{\lambda_0}{\delta}(T_2 - T_1)\left[1 + \frac{\beta}{2}(T_2 + T_1)\right]$,

$$T(x = \delta) = -\frac{1}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{1}{\beta} + T_2\right)^2 - \frac{2}{\beta}(T_2 - T_1) - (T_2 - T_1)^2} = -\frac{1}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{1}{\beta} + T_1\right)^2} = T_1.$$

On retrouve bien le résultat attendu.

3- L'application numérique fournit les valeurs suivantes :

$$\lambda_m = 0{,}838\left[1 + 7.10^{-4}\left(\frac{1350+50}{2}\right)\right] = 1{,}24862\ W/m.K\ ,$$

$$\phi = \frac{1{,}24862}{0{,}25}(1350-50) = 6492{,}824\ W/m^2\ ,$$

$$T(x=\delta/2) = -\frac{1}{7.10^{-4}} + \sqrt{\left(\frac{1}{7.10^{-4}}+1350\right)^2 - \frac{6492{,}824\ .\ 0{,}25}{7.10^{-4}.\ 0{,}832}} = 797\ °C\ .$$

On trouve au milieu du mur du four la valeur de 797 °C, au lieu de 700 °C qui serait la valeur moyenne $\frac{T_2+T_1}{2}$, obtenue dans le cas d'un mur simple, sans non linéarité. Ici, si $\beta < 0$, alors $T(\delta/2) < \frac{T_2+T_1}{2}$, ou bien si $\beta > 0$, alors $T(\delta/2) > \frac{T_2+T_1}{2}$ (cas traité dans l'exercice, puisque 797 °C > 700 °C).

Exercice 17 : Conduction de la chaleur dans une plaque rectangulaire (B)

Soit une plaque mince rectangulaire de côtés *a* (le long de l'axe *Ox*) et *b* (le long de l'axe *Oy*). Cette plaque est assujettie à des conditions aux limites homogènes sur les 4 côtés, à savoir une température de référence T_∞, sauf sur le côté supérieur (en $y=b$) pour lequel la condition aux limites en terme de température est d'avoir $T_\infty + F(x)$, pour x compris entre 0 et a.

1- En reprenant les calculs du cours, résoudre l'équation de la chaleur pour le cas élémentaire où : $F(x) = T_M \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$. Reprendre succinctement les calculs, et détailler les différentes étapes permettant d'établir la solution analytique de ce problème.

2- Lorsque la fonction $F(x)$ est quelconque, il est possible de démontrer alors que la solution générale de ce problème s'écrit :

$$T(x,y) = T_0 + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\int_0^a F(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx\,.$$

Montrer à partir de cette expression, et pour la fonction $F(x)$ de la question précédente, que l'on retrouve pour $T(x,y)$ le résultat du cours établi à la question 1-.

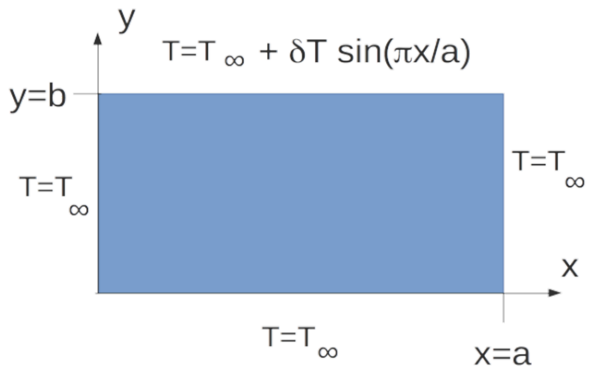
3- Lorsque $F(x) = T_M$, les calculs sont tout à fait similaires, mais un peu plus compliqués. Montrer que dans ce cas, on obtient le résultat suivant :

$$T'(x,y) = T_0 + \left(\frac{4T_M}{\pi}\right)\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right),\ \text{avec } n \text{ impairs uniquement.}$$

Commenter sur la dépendance de l'amplitude modale en $1/n$, en termes de développement en série de Fourier du profil de l'échelon rectangle (fonction porte).

4- Refaire le calcul de la question 3- en utilisant la procédure de normalisation des fonctions orthogonales. Pour cela, il faut repartir de l'expression générale fournissant T_M (cf. question 1- et résultats du cours), à savoir :

$T_M = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$. Cette expression est intégrée après multiplication par $\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ entre les bornes *0* et a. En notant que : $\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = \frac{a}{2}$, calculer C_n et retrouver le résultat obtenu à la question 3-.



Solution :

1- On repart des résultats classiques du cours pour ce type de problèmes. L'équation de la chaleur à deux dimensions sans terme source est utilisée sous la forme $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$. Après utilisation du changement de variable pour rendre les conditions aux limites homogènes, $\theta(x,y) = T(x,y) - T_0$, puis en utilisant la méthode de séparation des variables sous la forme : $\theta(x,y) = X(x)Y(y)$, l'équation aux dérivées partielles de départ est transformée en équation différentielle, sous la forme classique : $Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} = 0$. Cette équation différentielle est alors résolue par morceaux en écrivant par exemple : $-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \alpha^2$ (au passage il est aussi possible d'écrire cette équation avec une autre convention, sous la forme $\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \alpha^2$, mais cela ne change pas la nature des résultats). La résolution de cette équation différentielle aboutit aux résultats classiques : $\frac{d^2X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0$, de solution $X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$. Il reste alors l'autre morceau : $\frac{d^2Y}{dx^2} - \alpha^2 Y = 0$, de solution : $Y(y) = C\exp(-\alpha y) + D\exp(+\alpha y)$. L'usage des trois conditions aux limites homogènes, permet d'écrire : $\theta = 0$ pour $y = 0$, soit $D=-C$ (1) ; $\theta=0$ pour $x=0$, soit $A=0$ (2) ; $\theta=0$ pour $x=a$, soit, $\sin\alpha A=0$, soit $\alpha=\frac{n\pi}{a}$ (3), avec n = 1, 2, …, ∞ . Au final, il reste donc :

$\theta(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$. L'écriture de la 4$^{\text{ème}}$ condition aux limites $\theta=T_m\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ pour $y=b$, impose qu'il n'existe que le premier terme de la série (*n=1*), si bien qu'au final il ne reste que l'amplitude : $C_1=T_m/\sinh\left(\frac{\pi b}{a}\right)$. Au total, il reste donc pour le champ de température dans la plaque $\theta(x,y)=T_m\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right)\Big/\sinh\left(\frac{\pi b}{a}\right)$, soit en revenant à la température de départ :

$$T(x,y)=T_0+T_m\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right)\Big/\sinh\left(\frac{\pi b}{a}\right).$$

2- Lorsque la 4$^{\text{ème}}$ condition aux limites (en *y=b*) s'écrit : $T(x,b)=T_\infty+F(x)$, alors la solution générale peut se mettre sous la forme :

$$T(x,y)=T_0+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\Big/\sinh\left(\frac{\pi b}{a}\right)\right].\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\int_0^a F(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\,dx\,.$$

Dans le cas trivial de la question précédente, ici pour $F(x)=T_m\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$, on obtient uniquement le cas avec le premier terme de la série *(n=1)* :

$$T(x,y)=T_0+\frac{2}{a}\left[\sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right)\Big/\sinh\left(\frac{\pi b}{a}\right)\right]\cdot T_m\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\int_0^a\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)^2\,dx\,.$$

L'intégrale est bien connue, et elle vaut *a/2*, si bien que l'on retrouve directement le résultat de la question 1-, à savoir :

$$T(x,y)=T_0+T_m\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right)\Big/\sinh\left(\frac{\pi b}{a}\right).$$

3- Si cette 4$^{\text{ème}}$ condition aux limites s'écrit : $T(x,b)=T_0+T_m$, alors :

$$T(x,y)=T_0+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\Big/\sinh\left(\frac{\pi b}{a}\right)\right].\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\int_0^a T_m\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\,dx\,.$$

Sachant que :

$\int_0^a T_m\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\,dx=T_m\left(\frac{a}{n\pi}\right)(1-\cos n\pi)$, on constate que seuls les modes impairs contribuent pour la valeur : $T_m\left(2a\big/n\pi\right)$. Au final, il reste donc :

$T(x,y) = T_0 + \frac{4T_m}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\left[\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \Big/ \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\right]\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$, pour n impair.

4- On cherche à retrouver le résultat de la question 3- en repartant du résultat général de la question 1-, écrit sous la forme : $T_m = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$.

On intègre alors les deux membres de cette équation $\int_0^a$ en multipliant par $\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$, et l'on obtient :

$$\int_0^a T_m \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = T_m\left(\frac{a}{n\pi}\right)(1-\cos n\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx .$$

Sachant que l'intégrale $\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = \frac{a}{2}$, il reste finalement pour les modes n impairs uniquement : $T_m\left(\frac{2a}{n\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{2} C_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$, équation valide uniquement pour le terme de la série $n=n$, soit : $C_n = \left(\frac{4T_m}{n\pi}\right) \Big/ \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$. Au final, on obtient pour le champ de température de départ : $\theta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$, l'expression déjà établie par ailleurs :

$T(x,y) = T_0 + \frac{4T_m}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\left[\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \Big/ \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\right]\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$, valide pour n impair uniquement. Au passage, la dépendance des différents termes (ou modes thermiques) en *1/n* est caractéristique de la décomposition en série de Fourier de la fonction créneau de Heaviside. Tout le calcul a d'ailleurs consisté à effectuer cette décomposition de manière directe.

Exercice 18 : Conduction de la chaleur dans un tube en présence d'une source de chaleur (B)

Soit un tuyau de rayon interne R_1 et de rayon externe R_2. La température à l'intérieur du tube est notée T_1 et celle à l'extérieur du tube T_2. Une source de chaleur Q_S est située à l'intérieur du tube. La conductivité thermique du tube est notée λ, alors que la coordonnée radiale du tube est notée r.

1- En reprenant les calculs du cours, résoudre l'équation de la chaleur et montrer que l'expression générale du champ de température *T(r)* pour ce problème se met finalement sous la forme : $T(r) = -\frac{Q_S r^2}{4\lambda} + \frac{A}{\lambda}\ln r + \frac{B}{\lambda}$.

2- Evaluer alors les constantes d'intégration A et B en utilisant les conditions aux limites en $r = R_1$ et en $r = R_2$. Obtenir alors la solution générale pour ce problème sous la forme :

$$T(r) = T_1 + \frac{Q_S}{4\lambda}\left(R_1^2 - r^2\right) - \left\{\left(T_1 - T_2\right) - \frac{Q_S}{4\lambda}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\right\}\left(\frac{\ln r - \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1}\right).$$

3- Vérifier à partir de cette expression les deux conditions aux limites en $r = R_1$ et en $r = R_2$. Montrer enfin qu'en l'absence de la source Q_S on retrouve bien l'expression établie en cours pour ce cas là.

Solution :

1- L'équation de la chaleur s'écrit : $Q_S + \lambda \Delta T = 0$, avec $\Delta T = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)$, expression du laplacien scalaire en coordonnées cylindriques, limité à la dépendance radiale en r. Une première intégration de cette équation fournit : $Q_S\frac{r^2}{2} = -\lambda r\frac{dT}{dr} + A$, soit après simplification par r, suivie d'une deuxième intégration autour de r :
$Q_S\frac{r^2}{4} = -\lambda T + A\ln r + B$, soit pour le champ de température $T(r)$, l'expression générale suivante : $T(r) = -\frac{Q_S r^2}{4\lambda} + \frac{A}{\lambda}\ln r + \frac{B}{\lambda}$.

2- L'utilisation des conditions aux limites T_1 en $r = R_1$ et T_2 en $r = R_2$, permet d'écrire :

$$T_1 = -\frac{Q_S r_1^2}{4\lambda} + \frac{A}{\lambda}\ln r_1 + \frac{B}{\lambda}\ ;\ T_2 = -\frac{Q_S r_2^2}{4\lambda} + \frac{A}{\lambda}\ln r_2 + \frac{B}{\lambda}.$$

A partir de ces expressions, il est possible d'extraire les constantes A et B, sous la forme :

$$B = \lambda T_1 + \frac{Q_S R_1^2}{4} - A\ln R_1;\ A = \left[\lambda\left(T_2 - T_1\right) + \frac{Q_S}{4}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\right]\frac{1}{\ln R_2 - \ln R_1},$$

soit pour l'expression finale du champ de température $T(r)$, l'expression suivante :

$$T(r) = T_1 + \frac{Q_S}{4\lambda}\left(R_1^2 - r^2\right) - \left(T_1 - T_2\right)\left(\frac{\ln r - \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1}\right) + \frac{Q_S}{4\lambda}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\left(\frac{\ln r - \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1}\right).$$

3- Il est alors possible de vérifier à partir de cette expression que l'on retrouve bien les deux conditions aux limites T_1 en $r = R_1$ et T_2 en $r = R_2$. Par ailleurs, en absence de source de chaleur (pour $Q_S = 0$), on retrouve le résultat classique du cours pour la distribution de la température dans une conduite cylindrique de rayon interne R_1 et externe R_2, à savoir :

$$T(r) = T_1 - \left(T_1 - T_2\right)\left(\frac{\ln r - \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1}\right).$$

Exercice 19 : Réciprocité des échanges thermiques dans un mur double (B)

Un mur double est constitué de deux couches planes d'épaisseurs respectives e_1 et e_2, de conductivités thermiques λ_1 et λ_2. L'extérieur du mur est à la température T_1 en $x = 0$. L'intérieur de l'habitation est à la température T_2 pour $x = e_1+e_2$. On suppose de plus que $T_2 > T_1$. La jonction entre les deux parties du mur est donc à une température intermédiaire T_i pour $x = e_1$. Les champs de température sont notés sous les formes habituelles : $T(x) = Ax + B$ (pour $0 < x < e_1$), et $T'(x) = A'x + B'$ (pour $e_1 < x < e_1+e_2$).

1- Exprimer l'égalité des flux de chaleur dans les deux parties du mur, et en déduire une relation entre les constantes et A et A' sous la forme $A'\lambda_2 = A\ \lambda_1$. En exprimant ce flux de chaleur ϕ sous la forme d'une différence finie sur les épaisseurs de chaque morceau du mur, calculer alors la température Ti, et montrer que : $T_i = \dfrac{T_1\lambda_1 e_2 + T_2\lambda_2 e_1}{\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1}$.

2- Les couches n°1 et n°2 sont interverties, c'est-à-dire que la couche n°1 d'épaisseur e_1 est dorénavant constituée du matériau 2 de conductivité λ_2 et vice-versa. Calculer le nouveau flux de chaleur ϕ' pour cette nouvelle configuration avec les mêmes hypothèses de calcul que pour la question précédente, et montrer alors la relation suivante : $\dfrac{\phi}{\phi'} = \dfrac{e_1\lambda_1 + e_2\lambda_2}{e_1\lambda_2 + e_2\lambda_1}$. Discuter le cas où $\phi > \phi'$ lorsque $\lambda_1 > \lambda_2$. Quelle contrainte obtenez-vous alors sur les épaisseurs e_1 et e_2 ? Conclure sur la notion de réciprocité pour les échanges de chaleur dans un mur double.

Solution :

1- Les expressions des champs de température pour chaque partie du mur, solution de l'équation de la chaleur sans terme source, sont $T(x) = Ax + B$ et $T'(x) = A'x + B'$ respectivement pour la première et la deuxième couche de matériau entre $x = 0$ et $x = e_1$ d'une part, et entre $x = e_1$ et $x = e_1 + e_2$ d'autre part. L'égalité du flux de chaleur ϕ dans les deux couches s'écrit sous la forme :

$$\phi = -\lambda_1 S \frac{dT}{dx} = -\lambda_1 SA \ ; \ \phi = -\lambda_2 S \frac{dT'}{dx} = -\lambda_2 SA' \ .$$

Lorsque ce flux est exprimé sous la forme de différences finies sur les épaisseurs des deux couches, on obtient :

$$\phi = -\lambda_1 S \left(\frac{T_i - T_1}{e_1} \right) \ ; \ \phi = -\lambda_2 S \left(\frac{T_2 - T_i}{e_2} \right),$$

ce qui permet finalement de calculer la température T_i à l'interface entre les deux couches sous la forme : $T_i = \dfrac{T_1\lambda_1 e_2 + T_2\lambda_2 e_1}{\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1}$.

En fait, cette température apparaît simplement comme le barycentre des deux températures de référence T_1 et T_2 avec une pondération qui s'écrit $\lambda_1 e_2$ et $\lambda_2 e_1$ (ou bien λ_1 / e_1 et λ_2 / e_2, cf. exercice n° 14).

2- Si l'on intervertit les deux couches, le calcul est tout à fait similaire :

$$\phi' = -\lambda_2 S\left(\frac{T_i' - T_1}{e_1}\right) \ ; \ \phi' = -\lambda_1 S\left(\frac{T_2 - T_i'}{e_2}\right).$$

Dans le premier cas, on obtient :

$$T_1 - T_i = \frac{\phi e_1}{\lambda_1 S} \ ; \ T_i - T_2 = \frac{\phi e_2}{\lambda_2 S}, \text{ soit : } T_1 - T_2 = \phi\left(\frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S}\right).$$

Dans le deuxième cas, on obtient :

$$T_1 - T_i' = \frac{\phi' e_1}{\lambda_2 S} \ ; \ T_i' - T_2 = \frac{\phi' e_2}{\lambda_1 S}, \text{ soit : } T_1 - T_2 = \phi'\left(\frac{e_1}{\lambda_2 S} + \frac{e_2}{\lambda_1 S}\right).$$

Soit au final, en comparant ces deux expressions : $\dfrac{\phi}{\phi'} = \dfrac{e_1\lambda_1 + e_2\lambda_2}{e_1\lambda_2 + e_2\lambda_1}$.

Supposons que $\phi > \phi'$, alors $\lambda_1(e_1 - e_2) > \lambda_2(e_1 - e_2)$. Donc si $\lambda_1 > \lambda_2$, $(e_1 - e_2) > 0$.

En fait, il y a réciprocité complète dans les échanges, à cause de la linéarité des expressions des champs de température. Pour $e_1 = e_2$, on observe $\phi = \phi'$. Pour $e_1 \neq e_2$, on observe $\phi \neq \phi'$, simplement à cause de $\lambda_1 \neq \lambda_2$, mais il n'y a pas de relation d'ordre du type de celle observée pour le cas d'un tuyau cylindrique à deux couches, à cause de la présence dans les solutions pour ce cas-là de la fonction logarithme (cf. exercice 20).

Exercice 20 : Calorifugeage d'une conduite avec deux couches d'isolants thermiques (B)

Une canalisation de rayon *a,* dans laquelle s'écoule à faible vitesse un fluide à la température T_0, est calorifugée à l'aide de deux gaines cylindriques concentriques, de rayons respectifs *b* et *c* et de conductivité λ_1 et λ_2 (cf. Figure jointe). La température à la jonction entre les deux gaines cylindriques (en $r = b$) est notée T_1, alors que la température de l'air extérieur est T_∞.

1- On suppose tout d'abord que la couche n°2 est bien montée sur la couche n°1, comme indiqué sur la figure. Calculer le flux de chaleur ϕ identique dans chaque couche n°1 et n°2. En déduire l'écart de température $T_\infty - T_0$ en décomposant en deux parties, $T_\infty - T_1$ puis $T_1 - T_0$.

2- On suppose dorénavant que c'est la couche n°1 qui est montée sur la couche n°2, c'est-à-dire l'inverse de ce qui est effectivement dessiné sur la figure. Dans ce cas, si l'on conserve bien le gradient de température global $T_\infty - T_0$, alors le flux de chaleur qui s'écoule dans les couches n°2 et n°1, noté ϕ' sera a priori différent, et la température à l'interface entre les deux gaines (toujours en $r = b$) sera notée T_2. Comme à la question précédente, en déduire $T_\infty - T_0 = (T_\infty - T_2) + (T_2 - T_0)$.

3- Ecrire l'égalité des deux expressions précédentes de $T_\infty - T_0$ obtenues aux questions 1- et 2-. En notant $m=ln(b/a)$ et $n=ln(c/b)$, aboutir alors à l'expression suivante :

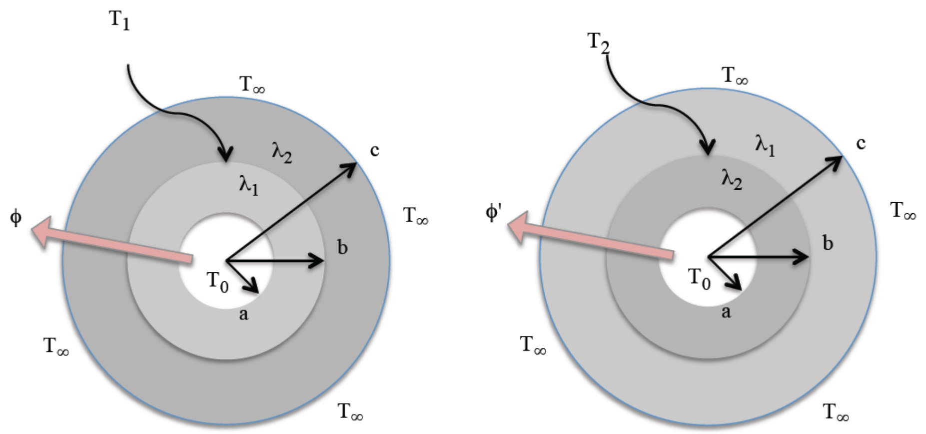
$$\phi'/\phi = (m\ \lambda_2+n\ \lambda_1)/(m\ \lambda_1+n\ \lambda_2).$$

Montrer alors que $\phi' > \phi$ impose que $\lambda_2 > \lambda_1$. Que pouvez-vous en déduire d'un point de vue pratique sur le calorifugeage d'une canalisation à l'aide de deux couches isolantes ? Faut-il disposer le couche de conductivité thermique la plus élevée en 1ère couche ou pas ? Justifier votre réponse.

Solution :

1- On repart ici des calculs classiques pour le cas d'une conduite cylindrique, en indiquant que le flux de chaleur doit être identique dans les deux couches n°1 et n°2 :

$$\phi = -\lambda_1.2\pi r\ell\frac{dT}{dr}\ (1)\ ;\ \phi = -\lambda_2.2\pi r\ell\frac{dT}{dr}\ (2)\ .$$



L'équation (1) est alors intégrée sur l'épaisseur de la couche d'isolant n°1, ce qui fournit :

$$\int_{T_0}^{T_1} dT = -\frac{\phi}{2\pi\lambda_1\ell}\int_a^b \frac{dr}{r}\text{, soit : } T_1 - T_0 = -\frac{\phi}{2\pi\lambda_1\ell}\ln\frac{b}{a}\ .$$

De même pour la couche n°2, l'équation (2) fournit des résultats tout à fait similaires :

$$\int_{T_1}^{T_\infty} dT = -\frac{\phi}{2\pi\lambda_2\ell}\int_b^c \frac{dr}{r}\text{, soit : } T_\infty - T_1 = -\frac{\phi}{2\pi\lambda_2\ell}\ln\frac{c}{b}\ .$$

Au final, on obtient donc :

$$T_\infty - T_0 = -\frac{\phi}{2\pi\ell}\left[\frac{1}{\lambda_1}\ln\frac{b}{a} + \frac{1}{\lambda_2}\ln\frac{c}{b}\right].$$

2- On refait dorénavant le calcul en intervertissant les deux couches n°1 et n°2, a priori pour un flux de chaleur différent, noté ϕ'. Les expressions obtenues sont tout à fait similaires à celles de la question 1-, à savoir :

$\phi' = -\lambda_2 .2\pi r\ell \dfrac{dT}{dr}$ (3) ; $\phi' = -\lambda_1 .2\pi r\ell \dfrac{dT}{dr}$ (4).

L'équation (3) est alors intégrée sur l'épaisseur de la couche d'isolant n°1, ce qui fournit :

$\displaystyle\int_{T_0}^{T_2} dT = -\frac{\phi'}{2\pi\lambda_2\ell}\int_a^b \frac{dr}{r}$, soit : $T_2 - T_0 = -\dfrac{\phi'}{2\pi\lambda_2\ell}\ln\dfrac{b}{a}$.

De même pour la couche n°2, l'équation (4) fournit des résultats tout à fait similaires :

$\displaystyle\int_{T_2}^{T_\infty} dT = -\frac{\phi'}{2\pi\lambda_1\ell}\int_b^c \frac{dr}{r}$, soit : $T_\infty - T_2 = -\dfrac{\phi'}{2\pi\lambda_1\ell}\ln\dfrac{c}{b}$.

Au final, on obtient donc :

$$T_\infty - T_0 = -\frac{\phi'}{2\pi\ell}\left[\frac{1}{\lambda_2}\ln\frac{b}{a} + \frac{1}{\lambda_1}\ln\frac{c}{b}\right].$$

3- Il suffit alors d'écrire l'égalité des deux expressions de $T_\infty - T_0$, obtenues aux questions 1- et 2-, ce qui s'écrit sous la forme :

$\phi\left[\dfrac{1}{\lambda_1}\ln\dfrac{b}{a} + \dfrac{1}{\lambda_2}\ln\dfrac{c}{b}\right] = \phi'\left[\dfrac{1}{\lambda_2}\ln\dfrac{b}{a} + \dfrac{1}{\lambda_1}\ln\dfrac{c}{b}\right]$, soit en notant : $m = \ln\dfrac{b}{a}$; $n = \ln\dfrac{c}{b}$,

$\dfrac{\phi'}{\phi} = \dfrac{m\lambda_2 + n\lambda_1}{m\lambda_1 + n\lambda_2}$. Si $\phi' > \phi$, alors : $m\lambda_2 + n\lambda_1 > m\lambda_1 + n\lambda_2$, soit : $(m-n)\lambda_2 > (m-n)\lambda_1$.

En fait, la géométrie impose que $m > n$, car $(\ln b - \ln a) > (\ln c - \ln b)$, si bien que la condition $\phi' > \phi$, impose simplement que $\lambda_2 > \lambda_1$. A l'inverse, pour réduire le flux thermique dans la canalisation, il faut donc utiliser la configuration pour laquelle c'est la première couche isolante qui possède la conductivité thermique la plus élevée.

Exercice 21 : Optimisation thermique d'un élément bicouche sphérique (B)

Soit un réacteur chimique sphérique de rayon interne *a* pour une température T_1, et de rayon externe *b* de température T_2. On supposera qu'il n'existe pas de condition aux limites de type convection, c'est-à-dire que la température du fluide intérieur T_0 est égale à T_1, et celle du fluide extérieur T_∞ est égale à T_2.

1- En reprenant les calculs du cours, résoudre l'équation de la chaleur $\Delta T = 0$, en utilisant l'expression habituelle pour le laplacien scalaire de la température, limitée à sa dépendance radiale : $\Delta T = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dT}{dr}\right)$. Montrer que l'expression générale du champ de température *T(r)* pour ce problème se met finalement sous la forme :

$T(r) = \left(\frac{1}{b-a}\right)\left[(T_2 b - T_1 a) - \frac{ab}{r}(T_2 - T_1)\right]$. Vérifier que l'on retrouve bien les deux conditions aux limites à partir de cette expression.

2- Utiliser cette expression *T(r)* du champ de température pour calculer le flux de chaleur ϕ à partir de la loi de Fourier écrite en coordonnée radiale $\phi = -\lambda S \frac{dT}{dr}$. Retrouver ainsi le résultat établi en cours pour ce problème, à savoir : $\phi = \frac{4\pi\lambda ab(T_1 - T_2)}{b-a}$.

On s'intéresse dorénavant à un réacteur chimique constitué de deux couches, l'une d'épaisseur *(b-a)* et de conductivité thermique λ_1, et l'autre d'épaisseur *(c-b)* et de conductivité thermique λ_2. Dans cette partie, la température intérieure sera notée T_0, celle à l'interface des deux couches T_i et celle de l'extérieur T_∞.

3- Exprimer le flux thermique ϕ, identique dans chacune des deux couches. Calculer alors la différence de température $T_0 - T_\infty$, et montrer qu'elle peut s'écrire : $T_0 - T_\infty = \frac{\phi}{4\pi b}\left[\frac{b-a}{a\lambda_1} + \frac{c-b}{c\lambda_2}\right]$. Refaire alors le même calcul, en intervertissant les deux couches d'isolant et en supposant dans ce cas que le flux observé est noté ϕ', a priori différent de ϕ, pour une température à l'interface entre les deux couches qui est notée T_i', alors que les températures de référence des fluides intérieurs et extérieurs restent inchangées (respectivement T_0 et T_∞). Calculer alors le rapport des flux de chaleurs ϕ/ϕ' lorsque les deux couches ont la même épaisseur, et conclure sur l'intérêt ou pas de mettre la couche de conductivité la plus élevée en premier pour optimiser les propriétés thermiques.

Solution :

1- Cet exercice est tout à fait analogue à celui qui précède au sujet cette fois-ci d'un élément bicouche sphérique. Les calculs et le raisonnement en sont tout à fait similaires. On repart de l'équation de la chaleur sans terme source, écrite pour l'occasion sous la forme d'une équation de Poisson $\Delta T = 0$, avec $\Delta T = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right)$, expression du laplacien scalaire en coordonnées sphériques, limité à la dépendance radiale en *r*. Il faut alors intégrer cette équation deux fois autour de la coordonnée *r*, ce qui fournit :

$$r^2 \frac{dT}{dr} = A \ ; \ T(r) = B - \frac{A}{r}.$$

Les deux constantes d'intégration *A* et *B* sont alors calculées à l'aide des conditions aux limites de l'exercice, à savoir : T_1 en $r = a$ et T_2 en $r = b$, ce qui fournit :

$A = \frac{ab}{b-a}(T_2 - T_1)$; $B = \frac{T_2 b - T_1 a}{b-a}$, soit au final pour le champ de température $T(r)$:

$$T(r) = \frac{1}{b-a}\left[(T_2 b - T_1 a) - \frac{ab}{r}(T_2 - T_1)\right].$$

2- A partir de l'expression générale de $T(r)$, il est aisé de calculer le flux de chaleur pour son expression radiale : $\phi = -\lambda S \dfrac{dT}{dr}$, soit en notant : $\dfrac{dT}{dr} = \dfrac{ab}{r^2}\left(\dfrac{T_2 - T_1}{b-a}\right)$ et avec $S = 4\pi r^2$, il reste finalement : $\phi = \dfrac{4\pi\lambda ab(T_1 - T_2)}{b-a}$.

3- On s'intéresse dorénavant à un élément bicouche sphérique. Le flux thermique est alors conservé dans chacune des deux couches, si bien qu'il est possible de l'écrire sous la forme :

$$\phi = \frac{4\pi\lambda_1 ab(T_0 - T_i)}{b-a} \; ; \; T_0 - T_i = \frac{(b-a)\phi}{4\pi\lambda_1 ab},$$

et $\phi = \dfrac{4\pi\lambda_2 bc(T_i - T_\infty)}{c-b}$; $T_i - T_\infty = \dfrac{(c-b)\phi}{4\pi\lambda_2 bc}$.

Ces expressions permettent de calculer $T_0 - T_\infty$, sous la forme :

$$T_0 - T_\infty = \frac{\phi}{4\pi b}\left[\frac{b-a}{a\lambda_1} + \frac{c-b}{c\lambda_2}\right].$$

Il est alors possible d'intervertir les deux couches n°1 et n°2, et dans ce cas on obtient des résultats légèrement différents, à savoir :

$$T_0 - T_\infty = \frac{\phi'}{4\pi b}\left[\frac{b-a}{a\lambda_2} + \frac{c-b}{c\lambda_1}\right].$$

Si les deux isolants ont la même épaisseur, alors $b-a = c-b$, et l'on obtient alors la relation :

$\dfrac{\phi}{\phi'} = \dfrac{c\lambda_1 + a\lambda_2}{c\lambda_2 + a\lambda_1} = \dfrac{n\lambda_1 + \lambda_2}{n\lambda_2 + \lambda_1}$, en posant $c = na$, avec $n > 1$, car $c > a$. Donc au final, si $\lambda_1 > \lambda_2, \phi > \phi'$, car $\dfrac{n\lambda_1 + \lambda_2}{n\lambda_2 + \lambda_1} > 1$ (le résultat $n\lambda_1 + \lambda_2 > n\lambda_2 + \lambda_1$ provenant de $(n-1)\lambda_1 > (n-1)\lambda_2$).

En conclusion, il vaut mieux mettre la couche la plus isolante en premier.

Exercice 22 : Conduction de la chaleur en régime dépendant du temps (B)

Le sol considéré comme un solide semi-infini est initialement à une température de 20 °C, puis il est porté brutalement à 1000 °C en surface pendant 24 heures par une coulée de lave d'un volcan proche.

1- Calculer le nombre de Biot pour une épaisseur de 1 m de sol. Conclusion ?

2- Ecrire l'équation générale de la conduction de la chaleur en fonction de *x* (profondeur de pénétration dans le sol), du temps *t*, et de la diffusivité thermique $a=\lambda/\rho C$.