Vibrations d'un système à plusieurs degrés de liberté
(Résumé du cours et 3 séries de TD)

I - VIBRATIONS D'UN SYSTEME A UN DEGRE DE LIBERTE (Rappels L2-S3)

1 – Oscillations forcées non amorties

L'équation du mouvement est de la forme :

$$m\,\ddot{x}(t) + k\,x(t) = F\cos\Omega\,t \tag{1}$$

et peut s'écrire :

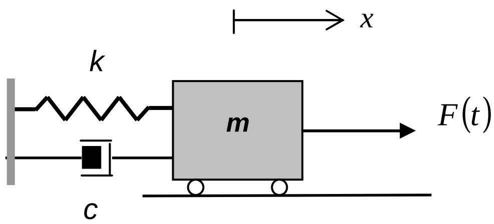
$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = \frac{F}{m}\cos\Omega t = f\,\cos\Omega t \tag{2}$$

La solution générale est :

$$x(t) = A_1\sin\omega_0 t + A_2\cos\omega_0 t + \frac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos\Omega t \tag{3}$$

où la première partie est la réponse transitoire et la seconde représente la réponse permanente.

2 – Oscillations forcées amorties



$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F\cos\Omega t \tag{4}$$

La solution particulière (réponse permanente) est de la forme :

$$x_p(t) = X\cos(\Omega t - \varphi) \tag{5}$$

Réponse permanente

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F\cos(\Omega t)$$

$$x = X\cos(\Omega t - \varphi)$$

$$X = \frac{F}{((k - m\Omega^2)^2 + a^2\Omega^2)^{1/2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}$$

Variables réduites

$h = \Omega/\omega_0$ **avec** $\omega_0{}^2 = k/m$

$\eta = c/2m\omega_0$

$\mu = X/X_s =$ **kX/F** $=$ **kH avec** $\mathbf{X_s} = F/k$ **(amplitude statique)**

H **:** fonction de transfert

On obtient ainsi le facteur d'amplification μ **et le déphasage** φ **:**

$$\mu = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{(\mathbf{1 - h^2})^2 + 4\eta^2 h^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{2\eta h}{1 - h^2}$$

Résonance

On obtient X_{max} pour $h = \sqrt{1 - 2\eta^2} \approx 1$ si l'amortissement est faible

Facteur de qualité

$Q = X_{max}/X_s$; on montre que $Q = 1/2\eta$ (calculer μ pour $h = 1$)

Bande passante

Pour

$\mu = Q/\sqrt{2} = 1/(2\eta\sqrt{2})$

on trouve (quand l'amortissement est faible) :

$h_1 = 1 - \eta$

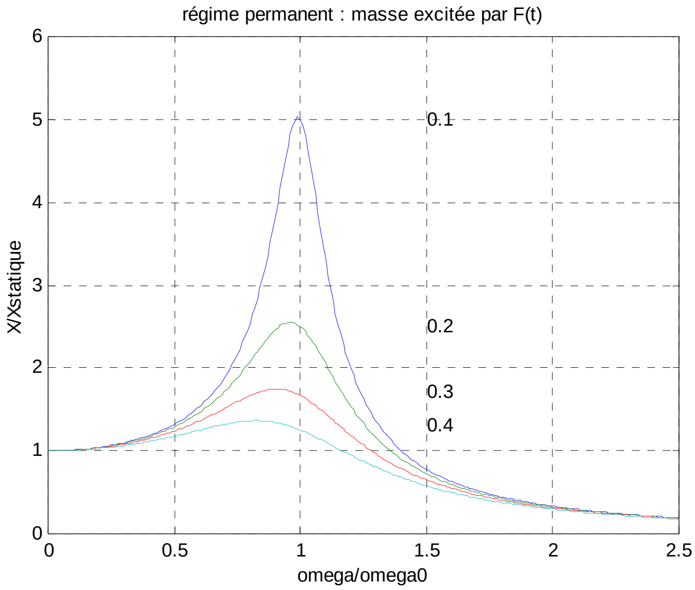
$h_2 = 1 + \eta$

ainsi :

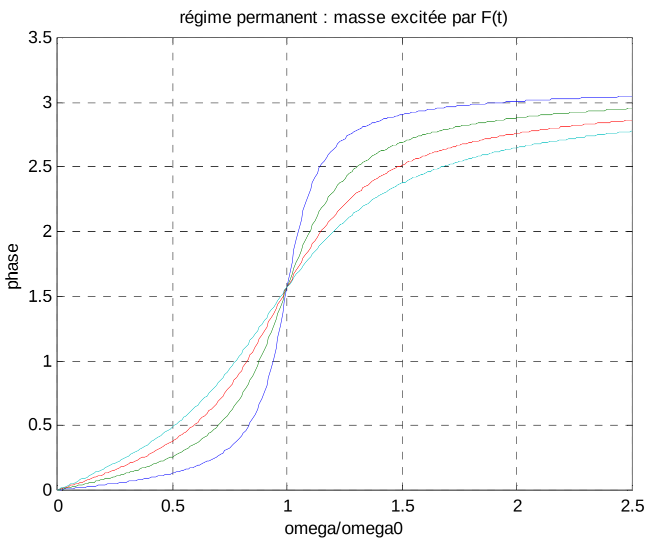
$\Delta h = 2\eta$

Remarques :
sur une ordonnée logarithmique ($20\log\mu$), on calcule la bande passante à -3dB ($20\log 2^{1/2} = 10\log 2 = -3$).

Courbes de résonance (diagramme de Bode)



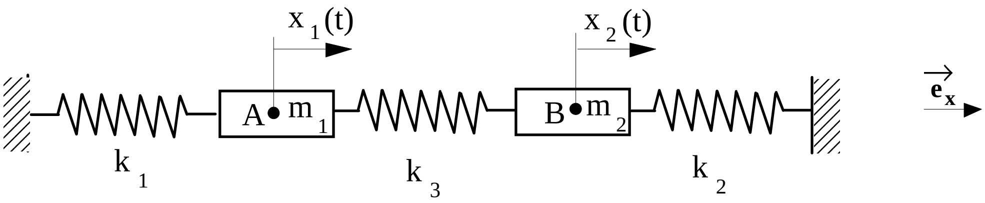
Amplitude $X(\Omega)$ pour différentes pour 4 valeurs de η (pour un amortissement nul, l'amplitude tend vers l'infini).



Phase $\varphi(\Omega)$ pour différentes valeurs de η (pour un amortissement nul, la phase tend vers 0 puis π).

II - VIBRATIONS D'UN SYSTEME A DEUX DEGRES DE LIBERTE

1 – Vibrations libres d'un système conservatif (non amorti)



-Equations du mouvement (2 équations différentielles couplées):

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_3)x_1 - k_3x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_3x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

- Pulsations propres et modes de vibrations (vibrations libres des 2 masse à la même pulsation)

En cherchant une solution de la forme : $x_1 = A_1e^{j(\omega t+\varphi)}$ et $x_2 = A_2e^{j(\omega t+\varphi)}$, on obtient le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} (k_1 + k_3 - m_1\omega^2)A_1 - k_3A_2 = 0 \\ -k_3A_1 + (k_2 + k_3 - m_2\omega^2)A_2 = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

dont la solution permet d'obtenir deux pulsations propres ω_1 et ω_2 (classées dans l'ordre croissant). Pour chacune de ces pulsations on trouve un rapport A_2/A_1 qui définit les deux modes de vibrations.

- Ecriture matricielle

Les équations du mouvement peuvent également s'écrire :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (8)$$

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \qquad (9)$$

$[M]$ et $[K]$ sont les matrices des masses (ou d'inertie) et de raideur d'ordre 2x2.

La recherche des pulsations propres et des modes de vibrations revient à résoudre l'équation :

$$([K] - \omega^2[M])\{\phi\} = \{0\} \qquad (10)$$

où $\{\phi\}$ est le vecteur $\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}$

Il s'agit ici de trouver les valeurs propres (ω_1 et ω_2) et les vecteurs propres ($\{\phi_1\}$ et $\{\phi_1\}$) associés aux matrices K et M.

Remarque : les pulsations propres ω_1 et ω_2 sont les racines de l'équation :

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0 \qquad (10a)$$

Les vibrations libres d'un système à 2 ddl sont décrites par les équations :

$$\{x\} = (a_1 \cos\omega_1 t + b_1 \sin\omega_1 t)\{\phi_1\} + (a_2 \cos\omega_2 t + b_2 \sin\omega_2 t)\{\phi_2\} \qquad (11)$$

où les constantes a_1 ,a_2 , b_1 et b_2 dépendent des conditions initiales.
On peut également écrire :

$$\{x\} = \{\phi_1\}c_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \{\phi_2\}c_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad (12)$$

avec les constantes c_1 ,c_2 , φ_1 et φ_2 .

Propriétés
Les matrices K et M et la matrice modale $[\Phi] = [\{\phi_1\}\{\phi_2\}]$ ont la propriété suivante :

$[\Phi]^T[M][\Phi]$ et $[\Phi]^T[K][\Phi]$ sont diagonales.

2 – Vibrations forcées d'un système conservatif (non amorti)
Quand les masses m_1 et m_2 soumises à une excitation de pulsation Ω, les vibrations sont régies par l'équation :

$$\begin{bmatrix} m_1 ... 0 \\ 0 .... m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_3 . - k_3 \\ - k_3 .... k_2 + k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \sin\Omega t \qquad (13)$$

c'est-à-dire :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\}\sin\Omega t \qquad (14)$$

On cherche une solution permanente de la forme :

$$\{x(t)\} = \{X\}\sin\Omega t \qquad (15)$$

ou :

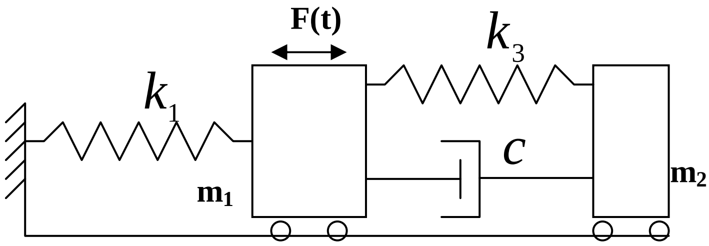
$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin\Omega t \qquad (16)$$

On obtient le système linéaire d'équations :

$$([K] - \Omega^2[M])\{X\} = \{F\} \qquad (17)$$

où les inconnues sont X_1 et X_2 du vecteur $\{X\}$.

3 – Vibrations forcées d'un système amorti



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin \Omega t \qquad (18)$$

Notation complexe :

$$\{f(t)\} = \{F\} e^{j\Omega t} \qquad (19)$$

On cherche une solution permanente de la forme :

$$\{x(t)\} = \{\hat{X}\} e^{j\Omega t}$$
$$\ldots\ldots\ldots = \begin{Bmatrix} X_1 e^{-j\varphi_1} \\ X_2 e^{-j\varphi_2} \end{Bmatrix} e^{j\Omega t} \qquad (20)$$

Ainsi :

$$([K] + j\Omega[C] - \Omega^2[M])\{\hat{X}\} = \{F\} \qquad (21)$$

où C représente la matrice d'amortissement ; l'équation (21) est un système linéaire d'équations dont les inconnues sont $\hat{X}_1$ et $\hat{X}_2$ ou X_1 , X_2 , φ_1 et φ_2 .
Rem : le système étudié est connu sous le nom d'absorbeur dynamique de Frahm ; il consiste à réduire les vibrations de la masse principale m_1 excitée par la force f(t) en accrochant une masse secondaire m_2.
En prenant les variables réduites (sans dimension) :

$\varepsilon = m_2/m_1$

$\omega_{01} = \sqrt{k_1/m_1}$ pulsation propre de l'oscillateur principal isolé

$\omega_{02} = \sqrt{k_3/m_2}$ pulsation propre de l'oscillateur secondaire isolé

$a = \omega_{02}/\omega_{01}$

$h = \Omega/\omega_{01}$ pulsation d'excitation normalisée

$\eta = c/2m_2\omega_{01}$ amortissement relatif

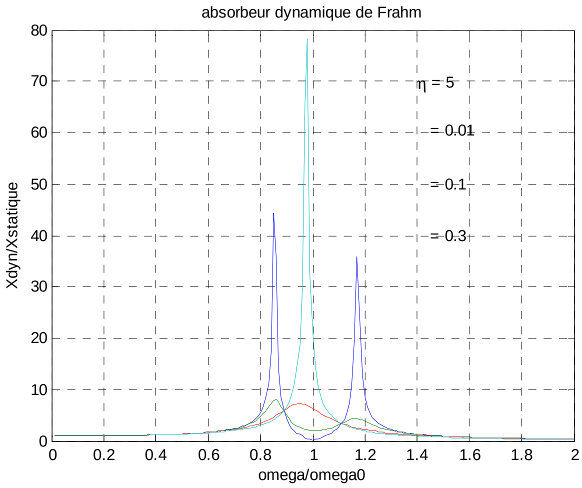
$X_{1s} = F_1/k_1$ déplacement statique de la masse principale

$\mu = X_1/X_{1s}$ facteur d'amplification dynamique du déplacement de m_1

on obtient :

$$\mu^2 = \frac{4\eta^2 h^2 + (h^2 - a^2)^2}{4\eta^2 h^2 (h^2(1+\varepsilon)-1)^2 + (\varepsilon a^2 h^2 - (h^2-1)(h^2-a^2))^2} \qquad (22)$$

La fonction $\mu(h)$ est tracée ci-dessous pour $\varepsilon = 0{,}05$ et différentes valeurs de η.



Remarques :
- quand l'amortissement est très faible, la masse m_1 s'immobilise quand la pulsation d'excitation est égale à la pulsation de la masse principale isolée ; on observe également deux pics de résonance.
- quand l'amortissement est très élevé, les 2 masses sont solidaires et se comportent comme un système à un degré de liberté.

III- VIBRATIONS D'UN SYSTEME A N DEGRES DE LIBERTE

On considère n masses m_1, m_2,..., m_n reliées entre elles par des ressorts de raideurs k_i. Tous les résultats obtenus dans le paragraphe II se généralisent quand n > 2 et l'utilisation du calcul matriciel est fortement conseillée.

Les vibrations libres de ce système conservatif sont régies par :

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\} \tag{23}$$

$\{x\}^T=(x_1,x_2,...x_n)$; $[M]$ et $[K]$ sont les matrices des masses (ou d'inertie) et de raideur .

Toutes les propriétés étudiées ci-dessus pour un système à 2 ddl se généralisent pour un système à n ddl.

On obtient ainsi n pulsations propres (classées dans l'ordre croissant) et n modes de vibrations.

Les vibrations libres d'un système à n ddl sont décrites par les équations :

$$\{x\}=\sum_{i=1}^{n}\{\phi_i\}(a_i\cos\omega_i t+b_i\sin\omega_i t) \tag{24}$$

Les vibrations forcées d'un système conservatif sont décrites par :

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{F\}\sin\Omega t \tag{25}$$

Voir ci-dessus (eq . 14) pour la résolution de l'équation (25).

Propriétés

Les matrices K et M et la matrice modale $[\Phi]=[\{\phi_1\}\{\phi_2\},...\{\phi_n\}]$ ont la propriété suivante : $[\Phi]^T[M][\Phi]$ et $[\Phi]^T[K][\Phi]$ sont diagonales ; $\{\phi_1\}\{\phi_2\},...\{\phi_n\}$ sont les modes de vibrations.

Normalisation : $[\Phi]^T[M][\Phi]=[I]$ matrice identité. Dans ce cas, $[\Phi]^T[K][\Phi]=[\mathrm{diag}\,\omega^2]$

Changement de coordonnées : si on utilise les coordonnées modales $\{y\}$ données par $\{x\}=[\Phi]\{y\}$, on obtient n équations découplées. L'équation (25) devient :

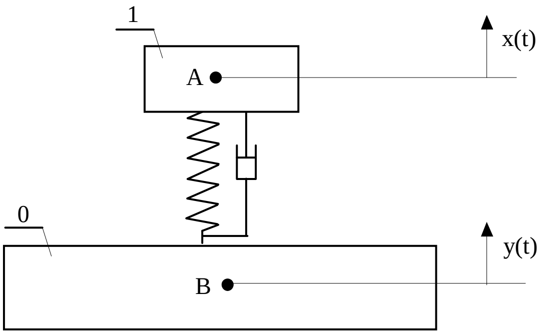
$$[\Phi]^T[M][\Phi]\{\ddot{y}\}+[\Phi]^T[K][\Phi]\{y\}=[\Phi]^T\{F\}\sin\Omega t \tag{26}$$

Systèmes amortis : $[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{F\}\sin\Omega t$

Dans la cas particulier où $[C]=\alpha[M]+\beta[K]$, on peut diagonaliser les équations en utilisant les coordonnées modales du système conservatif associé.

TD1 : Rappels 1 ddl

A Isolement d'un appareil



Figure

Une grosse machine ⓪ est soumise à des vibrations qui perturbent un appareil de mesure ① de masse m. Afin de diminuer l'effet des vibrations de la machine ⓪, l'appareil ① est fixé sur un ressort de raideur k et sur un amortisseur de constante c (voir Figure).

On supposera que $a^2 - 4mk < 0$. Les déplacements seront référencés dans le repère ayant pour origine la position d'équilibre de l'appareil ①, les déplacements du point A et du point B, lié à la machine ⓪, étant respectivement notés $x(t)$ et $y(t)$.

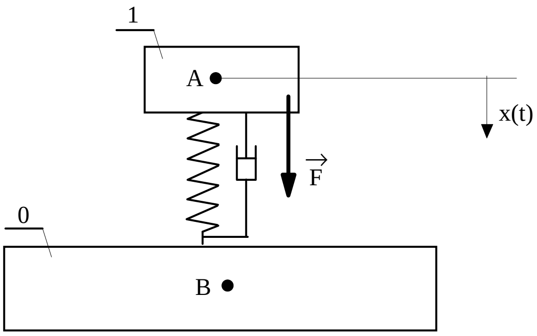
1/ Le déplacement $y(t)$ étant supposé connu en fonction du temps, écrire l'équation du mouvement de la masse m : les vibrations de la machine ⓪ étant supposées harmoniques, le déplacement $y(t)$ est de la forme : $y(t) = Y_0 \sin(\Omega t)$.

2/ Donner la forme de la solution particulière de l'équation du mouvement (réponse permanente) ; on utilisera la notation complexe $\hat{y}(t) = Y_0 e^{j\Omega t}$ et $\hat{x}(t) = X_0 e^{j(\Omega t - \phi)}$

3/ Déterminer l'expression de la fonction de transfert (transmissibilité en déplacement) notée $H(\Omega)$, qui relie $y(t)$ à $x(t)$.

4/ On cherche à écrire la solution en en fonction de la pulsation propre du système non-amorti $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et du paramètre $\xi = \frac{c}{2m\omega_0}$. Donner l'expression des paramètres X_0, ϕ question 2/ en fonction de ω_0, ξ et Ω.

B Transmission d'un force vibratoire à un socle



Figure

On considère maintenant le problème inverse suivant : une machine ① de masse m vibre sous l'action d'une force excitatrice $F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$ et transmet à un socle ⓪ une force $F_T(t)$. Afin d'empêcher la transmission de cette force, la machine ① est fixée sur un ressort de raideur k et sur un amortisseur de constante c

On supposera que la masse M est beaucoup plus grande que la masse m ($m << M$) et que $a^2 - 4mk < 0$.

1/ Ecrire l'équation du mouvement de A et donner la solution du régime permanent en posant $\hat{x}(t) = X_0 e^{j(\Omega t - \phi)}$.

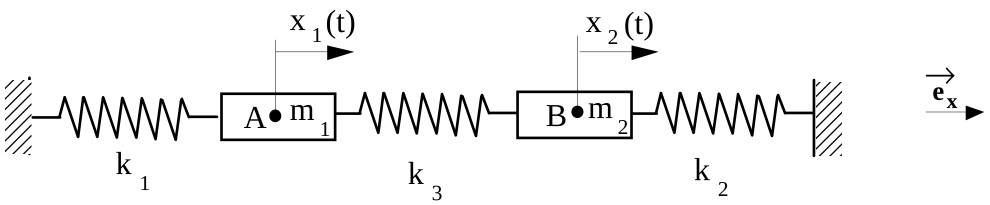
2/ La force $F_T(t)$ transmise au socle ⓪ est la force exercée par la masse m sur le ressort et l'amortisseur. Donner l'expression de cette force en fonction des données du problème.

3/ On souhaite maintenant déterminer le rapport entre la force transmise et la force d'excitation. Déterminer l'expression de cette fonction de transfert notée $H(\Omega)$, qui relie $F(t)$ à $F_T(t)$. Commenter le résultat.

TD2 : Systèmes à deux ddl

1 – Vibrations libres

1/ On s'intéresse au système suivant :



Les déplacements des points matériels A et B de masses respectives m_1 et m_2 sont référencés dans le repère ayant pour origine leur position d'équilibre respective. Ces déplacements sont respectivement notés $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

a) Ecrire les équations du mouvement des points matériels A et B.

b) En cherchant une solution de la forme :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 e^{j\omega t} \\ A_2 e^{j\omega t} \end{pmatrix}$$

écrire l'équation caractéristique du système et calculer les pulsations propres ω_1 et ω_2

Ecrire également les valeurs des rapports $\dfrac{A_2}{A_1}$ suivant la valeur de chaque pulsation propre.

2/ On s'intéresse maintenant au cas particulier $m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k$.

a) Procéder de manière analogue à la question 1/. Ecrire les équations du mouvement de chacune des masses. Calculer les pulsations propres du système. Calculer les rapports des amplitudes $\dfrac{A_2}{A_1}$.

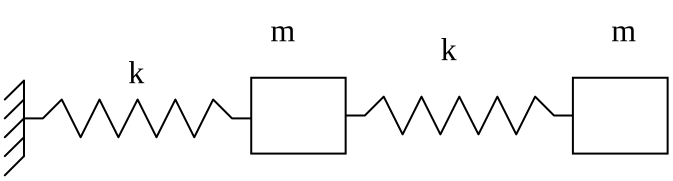
b) Pour chacune des trois conditions initiales suivantes, déterminer la solution générale de l'équation du mouvement du système :

① : $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ -x_0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ② : $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

③ : $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2 – Pulsations propres et modes

Déterminer les pulsations propres et les modes de vibrations des systèmes suivants et vérifier l'orthogonalité des modes.



3 – Vibrations libres (calcul matriciel)
Un système à deux degrés de liberté est régi par l'équation différentielle :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{d^2}{dt^2} x_1 \\ \dfrac{d^2}{dt^2} x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

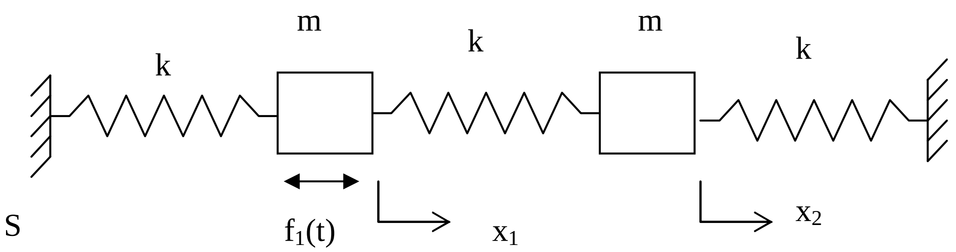
- En utilisant le calcul matriciel, retrouver les fréquences propres et les modes de vibrations, calculer la matrice modale $[\Phi]$ puis réécrire les équations du mouvement en faisant le changement de variables $\{x\} = [\Phi]\{y\}$.
- Vérifier que la solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = A_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + A_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

et trouver les constantes $A_1, A_2, \varphi_1 \; et \; \varphi_2$ avec les conditions initiales suivantes :

$x_1(0) = 1 \qquad x_2(0) = 1 \qquad \dot{x}_1(0) = 0 \qquad \dot{x}_2(0) = 1$

4 – Vibrations forcées
On considère un système à deux degrés de liberté représenté par la figure ci-dessous.
a) Déterminer les pulsations propres et les modes de vibrations.
b) La première masse est soumise à la force : $f_1(t) = F_1 \sin \Omega t$. Exprimer la réponse permanente $x_1(t)$ et $x_2(t)$.



5 - L'absorbeur dynamique
La table optique ① représentée sur la Figure 1 peut être modélisée par une masse M et deux ressorts identiques de raideur $k/2$ chaque (voir Figure 2). Afin de réduire les vibrations de cette table, excitée par une force d'excitation sinusoïdale, un système masse-ressort constitué de la masse m_a et du ressort de raideur k_a est ajouté au système initial.

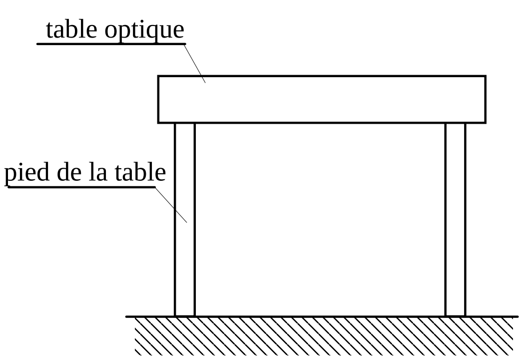


Figure 1

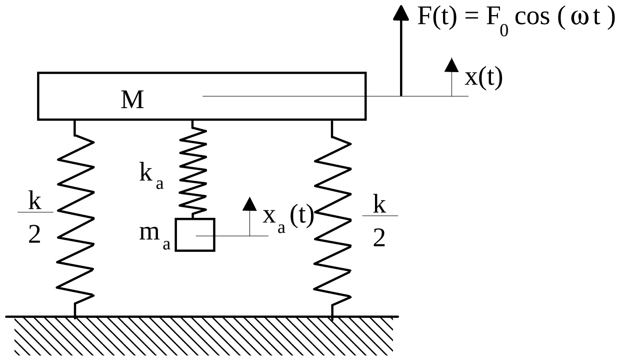


Figure 2

La force d'excitation sinusoïdale appliquée sur la masse M, est notée $F(t)=F_0\cos(\Omega t)$. Le déplacement de la masse M par rapport à sa position à l'équilibre est noté $x(t)$. Le déplacement de la masse m_a par rapport à sa position à l'équilibre est noté $x_a(t)$.

1/ Ecrire les équations du mouvement de l'ensemble du système. Rappeler la démarche pour trouver les pulsations propres et les modes de vibrations

2/ En cherchant une solution sous la forme $\begin{pmatrix} x(t) \\ x_a(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X\cos(\Omega t) \\ X_a\cos(\Omega t) \end{pmatrix}$, déterminer X et X_a en fonction des paramètres du problème.

3/ Sous quelle condition le déplacement de la masse M est nul ? Dans ces conditions (on parle alors d'absorbeur dynamique accordé), écrire l'équation du mouvement de la masse m_a correspondant au régime permanent.

4/ Refaire l'exercice en tenant compte de la présence d'un amortisseur de constante c en parallèle avec le ressort de raideur k_a.

5/ Représenter graphiquement la réponse permanente X en fonction de Ω pour chacun des deux cas (non amorti et amorti).

TD3 Systèmes à n ddl

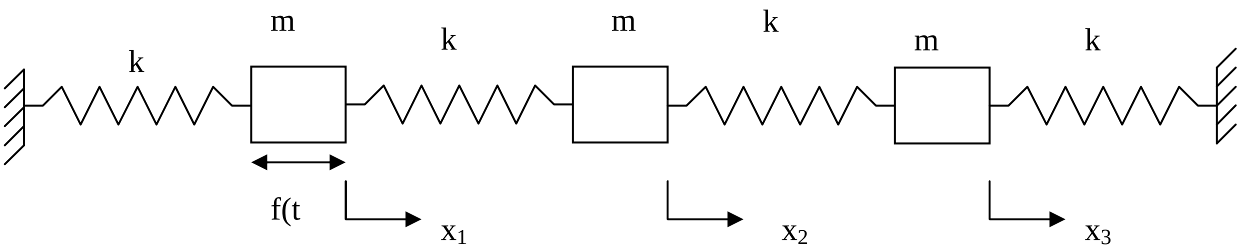
1 – Système à 3 ddl

On considère 3 masses m reliées en série à 4 ressorts de raideur k.

a) Déterminer les pulsations propres et les modes de vibrations ; vérifier que ces derniers sont orthogonaux

b) Donner l'expression des vibrations libres en prenant les conditions initiales $x_{10}, \dot{x}_{10}, x_{20}, \dot{x}_{20}, x_{30}, \dot{x}_{30}$.

c) La première masse est excitée par la force $f(t) = F \sin \Omega t$. Calculer la réponse permanente.



2 - On reprend le système mécanique de l'exo 1 mais dans lequel la masse centrale vaut 2m.

a) Déterminer les modes de vibrations et construire la matrice modale $[\Phi]$. Vérifier que les matrices :

$[\Phi]^T[M][\Phi]$ et $[\Phi]^T[K][\Phi]$

sont diagonales (où K et M sont les matrices de rigidite et d'inertie).

b) On fait le changement de variables $\{x\} = [\Phi]\{y\}$. Donner l'expression de l'équation du mouvement avec les coordonnées x_i (dites coordonnées modales) et montrer que les équations du mouvement sont découplées.

3 - Modélisation d'une corde vibrante

Une corde de longueur ℓ et de masse linéique ρ est fixée à deux points A et B sous une tension T. Cette corde est modélisée par le système discret "équivalent" à trois degrés de liberté constitué d'une corde de longueur ℓ de masse négligeable et de trois masses identiques m concentrées aux points M_1, M_2 et M_3. La corde est alors découpée en quatre tronçons identiques de longueur a (voir Figure 3). Le déplacement transversal du point M_i $(i = 1,2,3)$ est noté y_i.

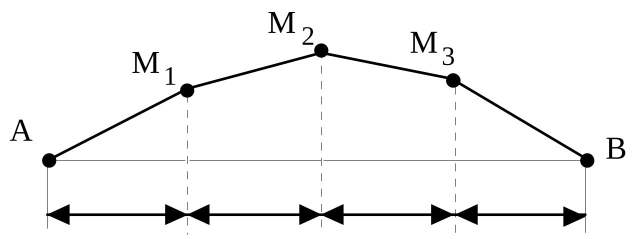


Figure 3

On pose : $m = \rho \frac{\ell}{4}$, $a = \frac{\ell}{4}$ et $\omega_0^2 = \frac{T}{ma}$.

1/ Montrer que les oscillations linéaires de ce système mécanique sont régies par le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} + \omega_0^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

<u>N.B</u>. : Les masses affectées aux points A et B valent $m/2$ *mais n'interviennent pas dans les équations (A et B sont fixes).*

2/ Déterminer les pulsations propres et les modes de vibration. Quelle interprétation peut-on faire des modes obtenus ?