



ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'INGENIEURS DU MANS - UNIVERSITE DU MAINE

Exercices corrigés

(sujets d'examens de 2006 à 2009)

du cours de VIBRATIONS et ACOUSTIQUE 2

Jean-Claude Pascal

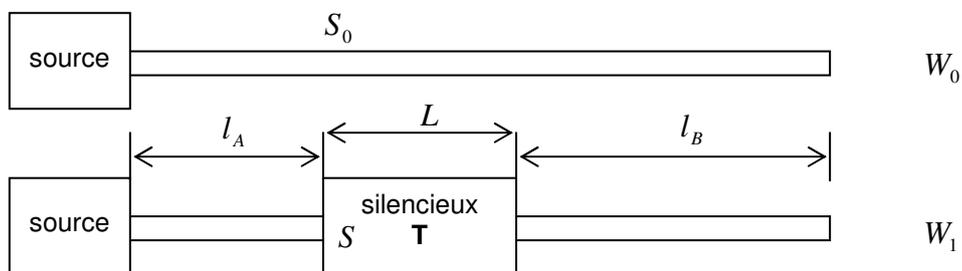
Ces sujets corrigés d'examen sont donnés comme des aides à la compréhension du cours.
Des erreurs peuvent toujours se trouver dans les corrigés : prière de les signaler à
jean-claude.pascal@univ-lemans.fr

EXAMEN VIBRATIONS & ACOUSTIQUE 2

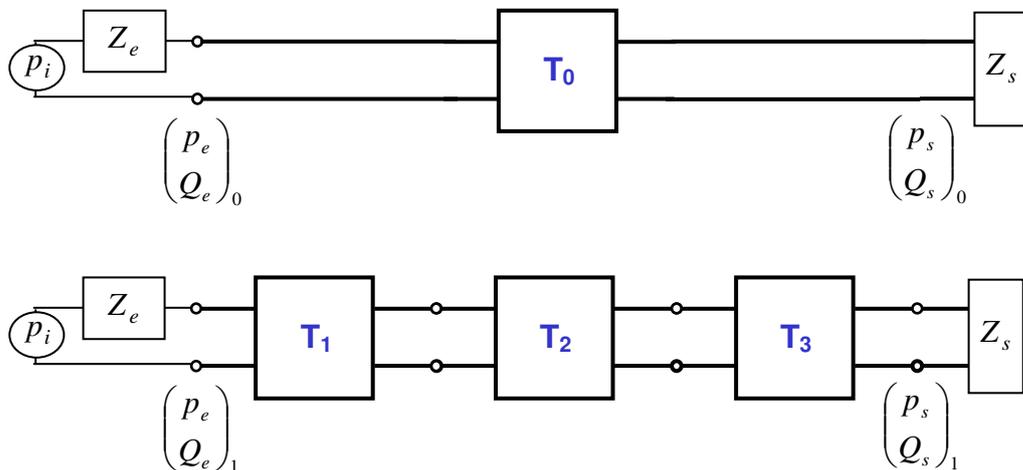
Problème 1 : modélisation de la mesure des pertes par insertion (7/20)

Dans le polycopié p.107-108 une modélisation des pertes de transmission est présentée en utilisant les éléments de la matrice de transfert \mathbf{T} d'un silencieux. A partir de la mesure de la puissance acoustique W_0 à l'extrémité du tube de section S_0 sans silencieux et de la puissance acoustique W_1 avec un simple silencieux à chambre d'expansion de section S , la perte par insertion est définie par

$$IL = 10 \log \frac{W_0}{W_1} \quad [\text{en dB}]$$



Les deux configurations conduisant à W_0 et W_1 sont modélisées à l'aide des circuits équivalents suivants :



- 1) Exprimer les matrices de transfert T_0 , T_1 , T_2 et T_3 en fonction des paramètres qui sont donnés sur les dessins.
- 2) Expliquer à quoi correspond Z_s .
- 3) Sans effectuer les calculs, expliquez la démarche que vous employez pour calculer W_0 et W_1 .
- 4) Est-ce que la perte par insertion est équivalente aux pertes par transmission ? Donner deux arguments pour étayer votre réponse.

Problème 2 : dimension d'un pavillon exponentiel (9/20)

L'extrémité d'un tube de diamètre 20 mm rayonne en espace libre. On constate qu'il y a peu d'émission dans les basses fréquences. Pour améliorer la transmission des fréquences graves au-dessus de 200 Hz, on décide d'utiliser en sortie de tube un pavillon exponentiel.

En considérant qu'il n'y a que des ondes planes dans le tube, répondre aux questions suivantes:

- 1) Le front d'onde à l'extrémité du pavillon vibre comme un piston. Montrer que son facteur de rayonnement peut s'exprimer par

$$\sigma = \operatorname{Re} \left\{ \frac{Z_r}{\rho_0 c} \right\}, \text{ avec l'impédance de rayonnement } Z_r = \frac{p}{u_x}$$

- 2) En considérant que l'impédance de rayonnement de l'extrémité du pavillon correspond à l'expression asymptotique basse fréquence de celle du tube non-bafflé (cours), calculer le diamètre de sortie du pavillon pour qu'à 200 Hz le facteur de rayonnement soit de -3 dB,
- 3) Expliquer quelle va être l'influence de la *longueur* du pavillon exponentiel dans la transmission des basses fréquences ?
- 4) Calculer la plus petite longueur que doit avoir le pavillon pour transmettre les fréquences supérieures à 200 Hz.

Problème 3 : rayonnement du piston (4/20)

Un piston circulaire monté dans un baffle infini rayonne en espace libre.

- 1) Expliquer comment calculer les fréquences qui correspondent à une pression nulle sur le plan du baffle en champ lointain
- 2) Comment pourriez vous exprimer en fonction de la fréquence l'angle θ_0 qui correspond à un affaiblissement de 3 dB du lobe principal ?

Remarque : vous pouvez dire que x_0 est l'argument pour lequel une fonction f prend la valeur $y_0 = f(x_0)$.

Corrigé Vibrations & Acoustique 2 – juin 2006

Problème 1 : modélisation de la mesure des pertes par insertion

1) Matrices de transfert : ce sont dans tous les cas des conduits droits dont seuls changent les diamètres et les longueurs. Avec la forme standard (pQ) en considérant $Q_1 = \rho_0 S u_1$ et $Q_2 = \rho_0 S u_2$ (cours)

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} p_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad T = \begin{bmatrix} \cos kl & j \frac{c}{s} \sin kl \\ j \frac{s}{c} \sin kl & \cos kl \end{bmatrix}$$

avec $T_0 \Rightarrow s = S_0$ et $l = l_A + L + l_B$

$T_1 \Rightarrow s = S_0$ et $l = l_A$

$T_2 \Rightarrow s = S$ et $l = L$

$T_3 \Rightarrow s = S_0$ et $l = l_B$

2) Z_s correspond à l'impédance de sortie de tube, vraisemblablement l'impédance du tube ouvert dont on pourra prendre l'approximation basse fréquence ($k\sqrt{S_0/\pi} < 1$) de Levine et Schwinger.

3) Dans les deux cas, il faut calculer la puissance en sortie de tube : la source et l'impédance de sortie sont les mêmes. Seule change la matrice globale T :

pour W_0 , $T = T_0$ et pour W_1 , $T = T_1 T_2 T_3$

La puissance de sortie (W_0 ou W_1) s'exprime par $W = \frac{S_0}{2} \operatorname{Re}\{p_s u_s^*\} = \frac{S_0 |p_s|^2}{2 \operatorname{Re}\{Z_s\}}$. Par ailleurs,

on peut écrire $p_i = p_e + Z_i Q_e / \rho_0 S_0$, où p_i et Z_i sont des invariants, respectivement la pression interne et l'impédance interne de la source. Il est donc possible d'écrire la pression de sortie p_e (donc W) en fonction de T , p_i et Z_i .

Attention : avec les pertes par insertion, la puissance incidente n'est pas la même dans les deux configurations car la matrice globale T change. La source voit donc une impédance d'entrée différente.

4) Les pertes par insertion ne sont pas équivalentes aux pertes par transmission :

- pour les pertes par transmission l'impédance de sortie est l'impédance caractéristique,
- la longueur du tube de sortie l_B influence le résultat pour les pertes par insertion, alors que ce n'est pas le cas pour les pertes par transmission car celui-ci est considéré infini,
- la longueur du tube d'entrée joue aussi un rôle en modifiant la matrice globale T .

Problème 2 : dimension d'un pavillon exponentiel

1) Facteur de rayonnement en fonction de l'impédance de rayonnement $Z_r = \frac{p}{u_x}$

$\sigma = \frac{W}{\rho_0 c S |u|^2 / 2}$ avec la puissance acoustique rayonnée $W = \frac{S}{2} \operatorname{Re}\{p u^*\} = \frac{S}{2} |u|^2 \operatorname{Re}\{Z_r\}$

d'où $\sigma = \text{Re}\{Z_r / \rho_0 c\}$.

2) Pour un tube non-bafflé $Z_r = \rho_0 c \left[(ka)^2 / 4 + j0.61ka \right]$ donc $\sigma = (ka)^2 / 4$ où a est le rayon de l'extrémité du pavillon. Pour $f_0 = 200$ Hz, $L_\sigma = -3$ dB, soit $\sigma = 1/2$. On peut donc calculer le diamètre D de l'extrémité du pavillon :

$$(ka)^2 = 2 \text{ conduit à } 2\pi f_0 a = c\sqrt{2} \text{ et } D = 2a = \frac{c\sqrt{2}}{\pi f_0} = \frac{344\sqrt{2}}{\pi 200} = 0.774 \text{ m.}$$

3) Le pavillon exponentiel ne transmet pas les basses fréquences dès que la variation de section n'est plus faible devant la longueur d'onde. En dessous de la fréquence de coupure $f_c = c\alpha / (4\pi)$ l'onde devient évanescente et ne transporte pas d'énergie (α représente la variation de la section en fonction de la distance : voir cours).

4) Le diamètre en sortie du pavillon peut s'exprimer en fonction de celui du tube cylindrique d'entrée

$$D = d e^{\frac{\alpha L}{2}} \quad \text{soit encore} \quad \ln \frac{D}{d} = \frac{\alpha}{2} L$$

D (0.774 m) et d (0.02 m) sont imposés et α est obtenu à partir de la condition $f_c < f_0 = 200$ Hz, soit $\alpha = 4\pi f_c / c < 4\pi f_0 / c$, ce qui permet de calculer la longueur du pavillon

$$L = \frac{2}{\alpha} \ln \frac{D}{d} > \frac{c}{2\pi f_0} \ln \frac{D}{d} = \frac{344}{2\pi 200} \ln \frac{0.774}{0.02} = 1 \text{ m}$$

Problème 3 : rayonnement du piston

La pression rayonnée en champ lointain s'écrit $p(r, \theta) = j\rho_0 c v_0 \frac{ka^2}{2} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[\frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]$

avec a le rayon du piston.

1) En champ lointain sur le plan du baffle $\theta = \pi/2$ (90°), la pression s'annule pour les zéros de la fonction $2J_1(x)/x$, $x = ka$. En dehors de $x = 0$, ces zéros sont aussi ceux de $J_1(x)$ qui correspondent à x_n ($n = \{1, 2, \dots, \infty\}$). Les fréquences correspondantes sont

$$2\pi f_n a / c = x_n, \quad \text{soit} \quad f_n = \frac{c x_n}{2\pi a}.$$

2) L'angle θ_0 qui correspond à un affaiblissement de 3 dB se définit par

$$20 \log \frac{|p(r, \theta_0)|}{|p(r, 0)|} = -3 \text{ dB, soit } \frac{2J_1(ka \sin \theta_0)}{ka \sin \theta_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ car } \frac{2J_1(x)}{x} \rightarrow 1 \text{ quand } x \rightarrow 0$$

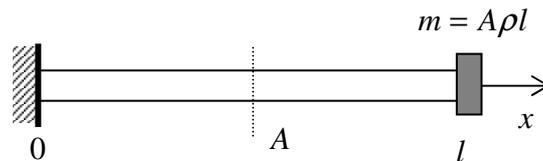
Soit x_0 tel que $\frac{2J_1(x_0)}{x_0} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$, $ka \sin \theta_0 = x_0$ et

$$\theta_0 = \arcsin \frac{x_0}{ka} = \arcsin \frac{c x_0}{2\pi f a}.$$

EXAMEN VIBRATIONS & ACOUSTIQUE 2

Exercice 1

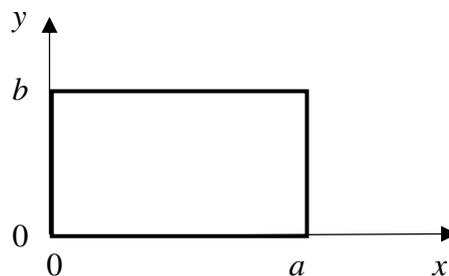
Un barre de section uniforme A , de longueur l , de masse volumique ρ et de module de Young E est encadrée à une de ses extrémités. A l'autre extrémité est fixée une masse ponctuelle égale à la masse de la barre elle-même.



- 1) Exprimer les conditions aux limites en considérant le déplacement sous la forme $w(x,t) = X(x)T(t)$
- 2) Exprimer l'équation caractéristique ou équation aux fréquences.
- 3) En utilisant une expression approchée $\tan(\sigma_n l) \approx \sigma_n l - (n-1)\pi$ quand $(\omega_n l)$ est proche de $(n-1)\pi$, donner les pulsations naturelles de la barre.
- 4) Pour la première pulsation naturelle, utiliser une approximation de la tangente exacte au second ordre ($\tan u \approx u + \frac{u^3}{3}$) pour améliorer l'estimation.

Exercice 2

Une plaque simplement supportée de dimension $a \times b$ (épaisseur h) est excitée en deux points $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$ et $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2)$, respectivement par des forces $F_1(t)$ et $F_2(t)$.



- 1) Exprimer les fréquences propres de la plaque.
- 2) Ecrire la réponse forcée de la plaque dans le cas général, pour les forces d'excitation suivantes : $F_1(t) = F_1 e^{j\omega t}$ et $F_2(t) = F_2 e^{j\omega t}$

On considère que le taux d'amortissement ζ est identique pour chaque mode.

- 3) Déterminer les conditions pour que la force modale généralisée correspondant à ces deux forces soit nulle.
- 4) La plaque est excitée par des forces correspondant chacune à un signal de période T et telles que $F_2 = -F_1$.

$$F_1(t) = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos((2n+1)\omega_T t)$$

Les points d'application sont

$$(x_1 = c, \quad y_1 = b/2) \quad \text{et} \quad (x_2 = a - c, \quad y_2 = b/2)$$

- a) Quels sont les modes excités ?
- b) Exprimer le signal capté par un accéléromètre placé au point $(x_3 = a/2, y_3 = b/4)$
- c) Exprimer le signal capté par un accéléromètre placé au point $(x_4 = a/4, y_4 = b/4)$

Corrigé

Exercice 1

1) La solution recherchée pour le déplacement longitudinal se présente sous la forme d'un produit de deux fonctions $w(x,t) = X(x)T(t)$, qui introduit dans l'équation différentielle conduit à l'expression

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\sigma^2$$

Les conditions aux limites se décrivent par :

$$\text{en } x=0, \quad \text{le déplacement est nul} \quad w(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0$$

$$\text{en } x=l, \quad \text{la contrainte est nulle} \quad -m \frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial t^2} = EA \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right|_{x=l}$$

$$\Rightarrow -m \ddot{T} X(l) = EA T X'(l) \quad \Rightarrow -m \frac{\ddot{T}}{T} X(l) = EA X'(l) \quad \Rightarrow mc^2 \sigma^2 X(l) = EA X'(l)$$

2) en considérant l'équation du mouvement sous forme de deux équations séparées

$$\begin{cases} X''(x) + \sigma^2 X(x) = 0 \\ \ddot{T}(t) + \sigma^2 c T(t) = 0 \end{cases}$$

dont les solutions sont

$$X(x) = \alpha \sin \sigma x + \beta \cos \sigma x$$

$$T(t) = a \sin \sigma c t + b \cos \sigma c t$$

il est possible d'écrire

$$\text{CL en } x=0: \quad X(0) = \beta \cos(\sigma 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0$$

d'où l'équation du déplacement $X(x) = \alpha \sin \sigma x$ et sa dérivée $X'(x) = \sigma \alpha \cos \sigma x$

$$\text{CL en } x=l: \quad mc^2 \sigma^2 \sin(\sigma l) = EA \sigma \cos(\sigma l)$$

qui compte tenu que $m = A\rho l$ et $c^2 = E/\rho$ conduit à l'équation caractéristique :

$$\tan(\sigma l) = \frac{1}{(\sigma l)}$$

3) Quand σl est aux alentours de $(n-1)\pi$, on peut écrire $\tan(\sigma_n l) \approx \sigma_n l - (n-1)\pi$ et trouver une solution de l'équation aux fréquences propres de la forme

$$(\sigma_n l)^2 - (n-1)\pi(\sigma_n l) - 1 = 0$$

et en ne considérant que les solutions positives

$$\sigma_n l = \frac{(n-1)\pi + \sqrt{(n-1)^2 \pi^2 + 4}}{2}$$

soient les valeurs approchées des pulsations naturelles

$$\omega_n = \sigma_n c \approx \frac{(n-1)\pi + \sqrt{(n-1)^2 \pi^2 + 4}}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

4) avec l'approximation précédente la première fréquence naturelle vaut $\omega_1 \approx \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

En considérant une approximation exacte au second ordre telle que $\tan(\sigma_1 l) \approx (\sigma_1 l) + \frac{(\sigma_1 l)^3}{3}$,

on obtient $(\sigma_1 l) + \frac{(\sigma_1 l)^3}{3} = \frac{1}{(\sigma_1 l)}$ soit $\chi^2 + 3\chi - 3 = 0$ où $\chi = (\sigma_1 l)^2$. La solution positive de cette équation est

$$\chi = \frac{\sqrt{21} - 3}{2} = 0.7913 \quad \text{d'où} \quad \sigma_1 l \approx \sqrt{\chi} = 0.8895$$

$$\text{donc} \quad \omega_1 \approx \frac{0.8895}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{alors que la valeur exacte est} \quad \omega_1 = \frac{0.8603}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Exercice 2

1) Fréquences propres de la plaque (voir cours p. 40) $f_{mn} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right] \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$

2) Réponse forcée de la plaque dans le cas général (voir cours p.50) avec le taux d'amortissement ζ identique pour chaque mode

$$w(x, y, \omega) = \frac{4e^{j\omega t}}{\rho h a b} \sum_m \sum_n \frac{\int_0^a \int_0^b f(u, v) \sin \frac{m\pi u}{a} \sin \frac{n\pi v}{b} du dv}{\omega_{mn}^2 - \omega^2 + j2\omega\omega_{mn}\zeta} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Pour les forces d'excitation $F_1(t) = F_1 e^{j\omega t}$ et $F_2(t) = F_2 e^{j\omega t}$

$$f(x, y) = F_1 \delta(x - x_1) \delta(y - y_1) + F_2 \delta(x - x_2) \delta(y - y_2)$$

l'équation du déplacement devient

$$w(x, y, \omega) = \frac{4e^{j\omega t}}{\rho h a b} \sum_m \sum_n \frac{F_1 \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi y_1}{b} + F_2 \sin \frac{m\pi x_2}{a} \sin \frac{n\pi y_2}{b}}{\omega_{mn}^2 - \omega^2 + j2\omega\omega_{mn}\zeta} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

3) Conditions pour que la force modale généralisée correspondant à ces deux forces soit nulle: elle ne peut se définir que pour un mode (m, n) donné. On peut trouver deux cas:

- les contribution à la force modale généralisée de chacune des deux forces est nulle : les points d'application se trouvent tous les deux sur une ligne nodale

$$\left(\sin \frac{m\pi x_1}{a} = 0 \text{ OU } \sin \frac{n\pi y_1}{b} = 0 \right) \text{ ET } \left(\sin \frac{m\pi x_2}{a} = 0 \text{ OU } \sin \frac{n\pi y_2}{b} = 0 \right),$$

- les contributions de chaque force et de même sont identique et de signe contraire

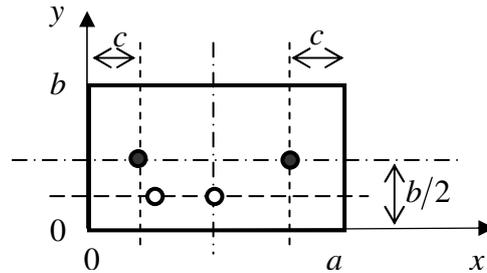
$$F_1 \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi y_1}{b} = -F_2 \sin \frac{m\pi x_2}{a} \sin \frac{n\pi y_2}{b}$$

(par exemple les forces sont d'amplitudes égales et situées symétriquement par rapport à une ligne nodale)

4) La plaque est excitée par des forces correspondant chacune à un signal de période T et telles que $F_2 = -F_1$.

$$F_1(t) = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos((2k+1)\omega_T t)$$

Les points d'application sont $(x_1 = c, y_1 = b/2)$ et $(x_2 = a - c, y_2 = b/2)$



a) Tous les modes dont l'indice n est impair sont excités.

b) Exprimer le signal capté par un accéléromètre placé au point $(x_3 = a/2, y_3 = b/4)$

$$w(x_3, y_3, t) = \frac{4A}{\rho h a b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos((2k+1)\omega_T t) \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{n\pi}{2} \left(\sin \frac{m\pi c}{a} - \sin \frac{m\pi(a-c)}{a} \right)}{\omega_{mn}^2 - (2k+1)^2 \omega_T^2 + j2(2k+1)\omega_T \zeta} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{4}$$

$\left(\sin \frac{m\pi c}{a} - \sin \frac{m\pi(a-c)}{a} \right)$ sera nul quand m sera pair et $\sin \frac{m\pi}{2}$ quand m sera impair, donc l'accéléromètre au point 3 ne verra aucun signal.

c) Exprimer le signal capté par un accéléromètre placé au point $(x_4 = a/4, y_4 = b/4)$

$$w(x_4, y_4, t) = \frac{4A}{\rho h a b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos((2k+1)\omega_T t) \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{n\pi}{2} \left(\sin \frac{m\pi c}{a} - \sin \frac{m\pi(a-c)}{a} \right)}{\omega_{mn}^2 - (2k+1)^2 \omega_T^2 + j2(2k+1)\omega_T \zeta} \sin \frac{m\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{4}$$

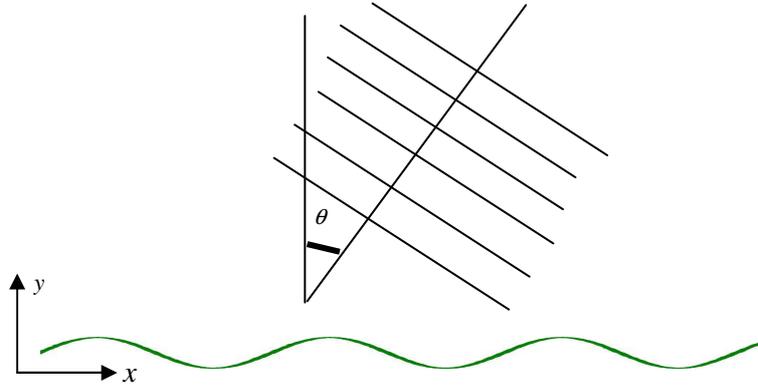
Les modes pour lesquels m est pair et n est impair ne sont pas visibles au point 4.

EXAMEN VIBRATIONS & ACOUSTIQUE 2

Tous documents autorisés

Barème : QCM (8) - Pb1 : (8) - Pb2 : (6)

Problème 1 : Rayonnement d'une plaque infinie



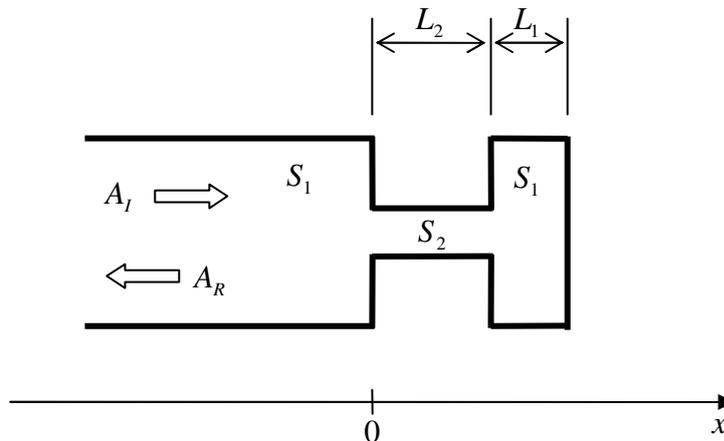
Une onde de flexion de nombre d'onde k_f se propage sur une plaque infinie en produisant une vitesse vibratoire normale $v(x) = v_0 e^{-jk_f x}$. Une onde est rayonnée dans l'espace à deux dimensions (x, y) dont la forme est $p(x, y) = A e^{-j(k_x x + k_y y)}$.

- 1) Utiliser cette équation de la pression dans l'équation d'onde $\nabla^2 p(x, y) + k^2 p(x, y) = 0$ pour obtenir une relation entre les deux composantes du nombre d'onde k_x et k_y . Comment s'appelle cette relation ?
- 2) Quelles relations existe-t-il entre le nombre d'onde de flexion k_f et les composantes du nombre d'onde acoustique k_x et k_y ? Expliquer pourquoi.
- 3) Expliquer votre démarche pour obtenir l'amplitude A de l'onde acoustique rayonnée. Donner l'expression complète de la pression rayonnée en fonction de v_0 , de k et de k_f .
- 4) Quelle est la formule qui vous permet de calculer les vitesses particulières acoustiques en fonction de la pression $p(x, y)$? Ecrire cette formule (sans faire les calculs : voir 5) pour $u_x(x, y)$ et $u_y(x, y)$.
- 5) En fonction du résultat de la question 3), exprimer $u_x(x, y)$ et $u_y(x, y)$.
- 6) Calculer les deux composantes $I_x(x, y)$ et $I_y(x, y)$ de l'intensité acoustique quand $k > k_f$. Quel commentaire pouvez-vous faire ?
- 7) Calculer les deux composantes $I_x(x, y)$ et $I_y(x, y)$ de l'intensité acoustique quand $k < k_f$. Quel commentaire pouvez-vous faire ?

Problème 2 au verso ... / ...

Problème 2 : Influence d'une cavité en fond de tube

Soit un tube de longueur L_2 et de section S_2 monté au fond d'un tube de Kundt de section S_1 . Ce tube débouche dans une cavité cylindrique de section S_1 et de profondeur L_1 .



La longueur d'onde acoustique est bien supérieure aux dimensions du système. En $x=0$, on nomme Z l'impédance définie par le rapport $p_1/(u_1 S_1)$ (p_1 est la pression dans le tube en $x=0$ et u_1 la vitesse particulière correspondante).

- 1) Exprimer le coefficient de réflexion de l'onde incidente A_I en fonction de l'impédance Z .
- 2) Exprimer Z en fonction des dimensions du petit tube et de la cavité en utilisant deux approches différentes
 - a) en utilisant le modèle du résonateur de Helmholtz (masse dans le col, raideur due à la pression dans le cavité),
 - b) en utilisant l'expression des ondes quasi-stationnaires dans le tronçon de section S_2 et dans la cavité cylindrique (continuité des pressions et conservation des débits).

Corrigé du problème 1 : Rayonnement d'une plaque infinie

1) En introduisant la solution $p(x, y) = A e^{-j(k_x x + k_y y)}$ dans l'équation des ondes $\nabla^2 p(x, y) + k^2 p(x, y) = 0$, on obtient

$$-(k_x^2 + k_y^2) A e^{-j(k_x x + k_y y)} + k^2 A e^{-j(k_x x + k_y y)} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

C'est la *relation de dispersion*.

2) Pour que la composante normale (direction y) de la vitesse particulière acoustique $u_y(x, y) = \frac{k_y}{k} \frac{A}{\rho_0 c} e^{-j(k_x x + k_y y)}$ corresponde en tout point à la vitesse vibratoire normale de la plaque, il faut que la fonction qui décrit l'évolution des grandeurs acoustiques selon x soit identique à celle de la vitesse vibratoire $e^{-jk_f x}$, donc que

$$k_x = k_f, \text{ d'où d'après la relation de dispersion } k_y = \sqrt{k^2 - k_x^2} = \sqrt{k^2 - k_f^2}.$$

3) Il suffit d'écrire la relation fondamentale du rayonnement acoustique $u_y(x,0) = v(x)$ pour tout x ,

$$\frac{k_y}{k} \frac{A}{\rho_0 c} e^{-jk_x x} = v_0 e^{-jk_f x} \quad k_x = k_f \text{ permet d'obtenir } A = \frac{k}{k_y} \rho_0 c v_0 \text{ et finalement l'expression de la}$$

pression rayonnée

$$p(x, y) = \rho_0 c v_0 \frac{k}{k_y} \exp(-jk_f x) \exp(-jk_y y) = \rho_0 c v_0 \frac{k}{\sqrt{k^2 - k_f^2}} \exp(-jk_f x) \exp(-jy\sqrt{k^2 - k_f^2}).$$

4) C'est la relation d'Euler : $u_x(x, y) = \frac{-1}{j\rho_0 ck} \frac{\partial p(x, y)}{\partial x}$ et $u_y(x, y) = \frac{-1}{j\rho_0 ck} \frac{\partial p(x, y)}{\partial y}$.

5) Composante x et y de la vitesse particulière acoustique

$$u_x(x, y) = \frac{-1}{j\rho_0 ck} \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} = v_0 \frac{k_f}{k_y} \exp(-jk_f x) \exp(-jk_y y)$$

$$u_y(x, y) = \frac{-1}{j\rho_0 ck} \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = v_0 \exp(-jk_f x) \exp(-jk_y y).$$

6) Intensité acoustique quand $k > k_f$. $k_y = \sqrt{k^2 - k_f^2}$ est réel et peut s'écrire aussi $k_y = k \cos \theta$, de même que $k_f = k_x = k \sin \theta$. L'intensité s'exprime par

$$I_x(x, y) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{p(x, y) u_x^*(x, y)\} = \frac{\rho_0 c |v_0|^2}{2} \frac{k k_f}{k_y^2} = \frac{\rho_0 c |v_0|^2}{2 \cos^2 \theta} \sin \theta$$

$$I_y(x, y) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{p(x, y) u_y^*(x, y)\} = \frac{\rho_0 c |v_0|^2}{2} \frac{k}{k_y} = \frac{\rho_0 c |v_0|^2}{2 \cos^2 \theta} \cos \theta$$

C'est une onde plane dont le vecteur intensité est orienté dans la direction θ par rapport à la normale.

7) Intensité acoustique quand $k < k_f$. Dans ce cas, $k_y = \sqrt{k^2 - k_f^2} = -j\sqrt{k_f^2 - k^2} = -j|k_y|$: le nombre d'onde est purement complexe et $\exp(-jk_y y) = \exp(-|k_y|y)$. Il s'agit d'une onde évanescente rayonnée dans la direction y. Son intensité $I_y(x, y)$ est nulle.

Corrigé du problème 2 : Influence d'une cavité en fond de tube

1) Dans la partie du tube où $x < 0$, pression et vitesse particulière s'écrivent

$$p(x) = A_I \exp(-jkx) + A_R \exp(jkx) \text{ et } u(x) = \frac{A_I}{\rho_0 c} \exp(-jkx) - \frac{A_R}{\rho_0 c} \exp(jkx)$$

En définissant l'impédance par $Z = p_1/(u_1 S_1)$ avec $p_1 = p(x) = A_I + A_R$ et

$$u_1 = u(0) = \frac{A_I}{\rho_0 c} - \frac{A_R}{\rho_0 c}, \text{ on obtient la relation } A_I + A_R = \frac{Z S_1}{\rho_0 c} (A_I - A_R) \text{ où encore}$$

$$1 + \frac{A_R}{A_I} = \frac{Z S_1}{\rho_0 c} \left(1 - \frac{A_R}{A_I}\right), \text{ d'où on peut extraire le coefficient de réflexion}$$

$$R = \frac{A_R}{A_I} = \frac{Z S_1 - \rho_0 c}{Z S_1 + \rho_0 c}.$$

2) Calcul de l'impédance Z : dans tous les cas on utilise les relations de conservation des pressions et de continuité des débits :

$$p_1 = p_2 \text{ et } Q = \rho_0 u_1 S_1 = \rho_0 u_2 S_2,$$

avec p_2 et u_2 la pression et la vitesse dans le tube de section S_2 en $x = 0$.

a) la première méthode utilise la relation du résonateur de Helmholtz qui lie la pression en sortie du col avec son débit

$$Q = \frac{-j\omega p_2}{\left[\frac{L_2}{S_2} \omega^2 - \frac{c^2}{V} \right]}$$

En reportant cette expression dans celle de l'impédance

$$Z = \frac{p_1}{u_1 S_1} = \frac{\rho_0 p_2}{Q} = \frac{-\rho_0}{j\omega} \left[\frac{L_2}{S_2} \omega^2 - \frac{c^2}{V} \right]$$

b) la deuxième méthode considère $Z = \frac{p_1}{u_1 S_1} = \frac{p_2}{u_2 S_2}$ et exprime la pression p_2 et la vitesse u_2 en fonction des ondes dans le tronçon $x > 0$. Pour $0 \leq x \leq L_2$

$$p(x) = A'_I \exp(-jkx) + A'_R \exp(jkx) \text{ et } u(x) = \frac{A'_I}{\rho_0 c} \exp(-jkx) - \frac{A'_R}{\rho_0 c} \exp(jkx).$$

Ces deux équations permettent de calculer p_2 et u_2 en posant $x = 0$ et d'exprimer l'impédance sous la forme

$$Z = \frac{p_2}{u_2 S_2} = \frac{\rho_0 c}{S_2} \frac{A'_I + A'_R}{A'_I - A'_R}.$$

Il reste à calculer A'_I et A'_R en utilisant les relations pour le tronçon $L_2 \leq x \leq L_1 + L_2$. L'onde est une onde stationnaire (fond rigide) et $A'' = A''_I = A''_R$

$$p(x) = 2A'' \cos k(x - L_1 - L_2) \text{ et } u(x) = -\frac{j2A''}{\rho_0 c} \sin k(x - L_1 - L_2).$$

On applique en $x = L_2$ la conservation des pressions et la continuité des débits, on obtient deux équations

$$A'_I \exp(-jkL_2) + A'_R \exp(jkL_2) = 2A'' \cos kL_1 \quad A'_I \exp(-jkL_2) - A'_R \exp(jkL_2) = j2 \frac{S_1}{S_2} A'' \cos kL_1$$

que l'on résout par rapport à A'_I et A'_R

$$A'_I = A'' \left(\cos kL_1 + j \frac{S_1}{S_2} \sin kL_1 \right) \exp(jkL_2) \quad \text{et} \quad A'_R = A'' \left(\cos kL_1 - j \frac{S_1}{S_2} \sin kL_1 \right) \exp(-jkL_2).$$

On voit que $A'_R = A'^*_I$, donc que

$$Z = \frac{\rho_0 c}{S_2} \frac{A'_I + A'_R}{A'_I - A'_R} = -j \frac{\rho_0 c}{S_2} \frac{\text{Re}\{A'_I\}}{\text{Im}\{A'_I\}} = -j \frac{\rho_0 c}{S_2} \frac{\cos kL_1 \cos kL_2 - (S_1/S_2) \sin kL_1 \sin kL_2}{\cos kL_1 \sin kL_2 + (S_1/S_2) \sin kL_1 \cos kL_2}.$$

Pour comparer cette relation à la précédente, il faut se rappeler que le résonateur de Helmholtz est basé sur l'hypothèse que la longueur d'onde acoustique est bien plus grande que ses dimensions. Elle conduirait donc à écrire $\cos kL_1 \approx \cos kL_2 \approx 1$, $\sin kL_1 \approx kL_1$ et $\sin kL_2 \approx kL_2$. L'impédance devient alors

$$Z = \frac{\rho_0 c}{S_2} \frac{A'_I + A'_R}{A'_I - A'_R} = -j \frac{\rho_0 c}{S_2} \frac{\text{Re}\{A'_I\}}{\text{Im}\{A'_I\}} = -j \rho_0 c \frac{1 - (S_1/S_2) k^2 L_1 L_2}{kL_2 S_2 + kL_1 S_1}.$$

On obtient bien le même résultat qu'en a) en posant $L_1 S_1 = V$ et en considérant que le volume du col $L_2 S_2$ est négligeable devant celui de la cavité pour que $V \approx L_1 S_1 + L_2 S_2$.

EXAMEN VIBRATIONS & ACOUSTIQUE 2

Documents autorisés

Exercice 1

L'équation des ondes dans une structure unidimensionnelle s'écrit, pour des déplacements s'exprimant en variables complexes, sous la forme

$$\alpha \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \omega^2 m w(x) = -F(x) \quad \text{avec} \quad w(x) = \sum_n a_n \phi_n(x),$$

dont la déformée modale $\phi_n(x)$ vérifie l'équation homogène $\alpha \frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2} + \omega_n^2 m \phi_n(x) = 0$, où ω_n est la pulsation propre.

1) Montrer que ces relations peuvent conduire à l'équation modale

$$(\omega_n^2 - \omega^2) a_n M_n = F_n.$$

2) Exprimer les paramètres M_n et F_n .

3) Interpréter ces paramètres en donnant des justifications, ainsi que pour la quantité $\omega_n^2 M_n$.

4) Qu'advierait-il si $m = m(x)$?

Exercice 2

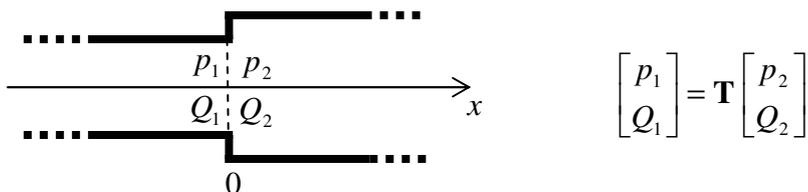
Il a été vu en cours que dans le cas du changement de section d'un conduit de S_1 vers S_2 , l'amplitude de l'onde plane transmise pouvait s'écrire en fonction de l'amplitude de l'onde incidente

$$A_t = \frac{2S_1}{S_1 + S_2} A_i.$$

1) Définissez les pertes de transmission et calculez les dans le cas de ce changement de section.

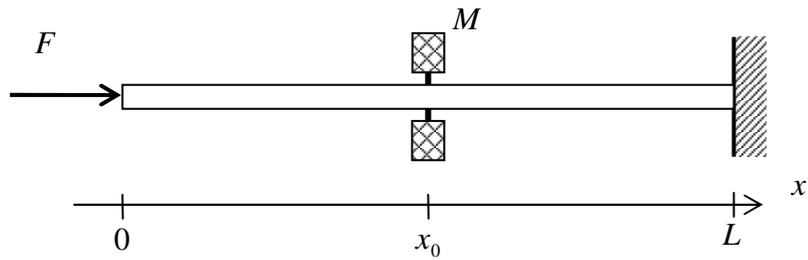
2) Si $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$ est une matrice représentant un système silencieux dont l'entrée est un tube de section S_1 et la sortie un tube de section S_2 , donnez l'expression des pertes de transmission en fonction des sections et des éléments de la matrice.

3) En considérant les pressions et les débits de part et d'autre de l'abscisse $x = 0$ dans la situation représentée par le schéma ci-dessous, donner la matrice \mathbf{T} du changement de section telle que



4) Utilisez cette matrice dans l'expression des pertes de transmission obtenues en 2) et vérifiez que vous obtenez le résultat trouvé en 1).

Exercice 3



Le schéma ci-dessus représente une barre excitée en traction-compression par une force harmonique F à son extrémité libre. L'autre extrémité est encastree. Elle comporte en x_0 une masse M fixée ponctuellement.

- 1) Quelle méthode allez vous utiliser pour obtenir le déplacement forcé de cette barre sans avoir recours à une description modale ?
- 2) Exprimer les conditions aux limites et de continuité en $x = 0$, $x = x_0$, et $x = L$.
- 3) Exprimer le déplacement $w(x)$

Corrigé de l'exercice 1

1) On remplace dans un premier temps la solution $w(x) = \sum_n a_n \phi_n(x)$ dans l'équation des ondes

$$\alpha \sum_n a_n \frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2} + \omega^2 m \sum_n a_n \phi_n(x) = -F(x)$$

L'équation homogène permet de remplacer $\alpha \frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2}$ par $-\omega_n^2 m \phi_n(x)$, d'où

$$-m \sum_n a_n \omega_n^2 \phi_n(x) + \omega^2 m \sum_n a_n \phi_n(x) = -F(x).$$

Dans l'équation précédente chaque terme est multiplié par $\phi_m(x)$, puis intégré sur le domaine D (la structure)

$$m \sum_n a_n \omega_n^2 \int_D \phi_m(x) \phi_n(x) dx - \omega^2 m \sum_n a_n \int_D \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \int_D F(x) \phi_m(x) dx.$$

En utilisant la relation d'orthogonalité $\int_D \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \begin{cases} N_n & \text{pour } m = n \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$, il apparaît qu'il ne reste dans la somme que le terme pour lequel $n = m$. Ainsi l'équation s'écrit

$$(\omega_n^2 - \omega^2) a_n m N_n = \int_D F(x) \phi_m(x) dx$$

et peut se mettre sous la forme

$$(\omega_n^2 - \omega^2) a_n M_n = F_n.$$

2) Les paramètres s'expriment donc par

$$M_n = m N_n = m \int_D \phi_n^2(x) dx \quad \text{et} \quad F_n = \int_D F(x) \phi_n(x) dx$$

3) Le terme $-\omega^2 a_n M_n$ a la dimension d'une force et $-\omega^2 a_n$ représente une accélération : M_n est la masse modale. F_n est la force modale généralisée.

4) Si la distribution de masse n'est pas homogène sur la structure, la relation d'orthogonalité des modes devient

$$\int_D m(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \begin{cases} M_n & \text{pour } m = n \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}.$$

Corrigé de l'exercice 2

1) Les pertes de transmission se définissent par $D = 10 \log \frac{W_I}{W_T} = 10 \log \frac{S_1 |A_I|^2}{S_2 |A_T|^2}$. En considérant que

$$|A_T|^2 = \frac{4S_1^2}{(S_1 + S_2)^2} |A_I|^2, \text{ obtient } D = 10 \log \frac{(S_1 + S_2)^2}{4S_1 S_2}.$$

2) Les pertes de transmission pour un système silencieux représenté par une matrice \mathbf{T} s'écrit en fonction de ses éléments par (cours)

$$D = 10 \log \frac{S_1 \left| T_{11} + \frac{S_2}{c} T_{12} + \frac{c}{S_1} T_{21} + \frac{S_2}{S_1} T_{22} \right|^2}{4 S_2}$$

3) Puisque les continuités des pressions et des débits s'appliquent, quelque soit la section des tronçons de tube, on a $p_1 = p_2$ et $Q_1 = Q_2$, donc la matrice du changement de section est une matrice diagonale

unitaire $\mathbf{T} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4) Les pertes de transmission s'écrivent alors $D = 10 \log \frac{S_1 \left(1 + \frac{S_2}{S_1} \right)^2}{4 S_2} = 10 \log \frac{(S_1 + S_2)^2}{4 S_1 S_2}$.

Corrigé de l'exercice 3

1) On va utiliser la méthode de décomposition en ondes forcées décrite au pages 64 à 71, en considérant deux tronçons :

- le tronçon 1 entre $x = 0$ et $x = x_0$,

- le tronçon 2 entre $x = x_0$ et $x = L$,

et en écrivant à chacune de leurs extrémités les conditions aux limite ou de continuité. Les déplacements longitudinaux dans chaque tronçons s'écrivent

$$w_1(x) = a_1 \sin kx + b_1 \cos kx$$

$$w_2(x) = a_2 \sin kx + b_2 \cos kx$$

avec le nombre d'onde longitudinal $k = \omega/c_L = \omega\sqrt{\rho/E}$. Dans les calculs suivants on considère des variables complexes en omettant $e^{j\omega t}$.

2) Condition de continuité en $x = 0$ (voir p. 61)

$$EA \frac{\partial w_1(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -F_0,$$

Continuité des déplacements et discontinuité de la force en $x = x_0$

$$w_1(x_0) = w_2(x_0)$$

$$EA \frac{\partial w_1(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} - EA \frac{\partial w_2(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = \omega^2 M w_1(x_0) \quad \text{en considérant } \ddot{w}(x) = -\omega^2 w(x)$$

Condition aux limite en $x = L$ (barre encastée)

$$w_2(L) = 0$$

3) Calculer le déplacement dans les deux tronçons, c'est exprimer les coefficients a_1 , a_2 , b_1 et b_2 à l'aide des 4 équations définissant les conditions aux limites et de continuité. On a

$$dw_1(x)/dx = k(a_1 \cos kx - b_1 \sin kx) \quad \text{et} \quad dw_2(x)/dx = k(a_2 \cos kx - b_2 \sin kx)$$

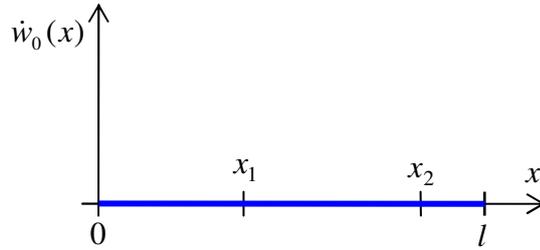
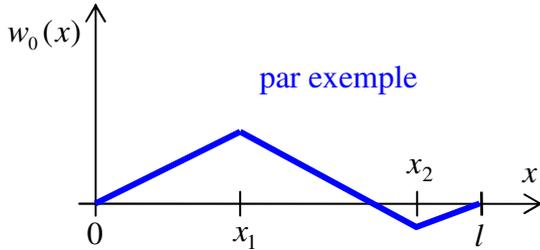
Les relation en $x = 0$ et $x = L$ conduisent à $a_1 = -\frac{F_0}{EAk}$ et $\frac{b_2}{a_2} = -\tan kL$. Les deux relations en

$x = x_0$ permettent de construire un système permettant d'obtenir b_1 et a_2 .

N° de table :

Test VIBRATIONS & ACOUSTIQUE 2

1) Une corde tendue entre deux points fixes $x = 0$ et $x = l$ est déplacée de sa position d'équilibre en deux points x_1 et x_2 ($0 < x_1 < x_2 < l$) puis lâchée à l'instant $t = 0$. Comment représentez vous les conditions initiales $w_0(x)$ et $\dot{w}_0(x)$ utilisées pour le déplacement de la corde à $t > 0$?



2) Une corde de piano de longueur $l = 0.8$ m et d'une masse totale de 4 g est tendue avec une tension de 800 N. La prise en compte des conditions aux limites a permis de calculer pour le fondamental $(\sigma_1 l) = 0.8\pi$:

a) exprimer la relation entre la fréquence du fondamental et $(\sigma_1 l)$

$$f = \frac{(\sigma_1 l) c}{2\pi l}$$

b) avez-vous tous les éléments pour calculer cette fréquence ? Sinon lesquels manquent ?

Puisque $c = \sqrt{\tau/m}$, on connaît donc toutes les quantités
 $\tau = 800$ N, $(\sigma_1 l) = 0.8\pi$, $l = 0.8$ m, $m = 0.004/0.8$

3) Une barre en traction compression a une extrémité libre en $x = l$. Sachant que la résultante des forces à une extrémité doit vérifier la relation

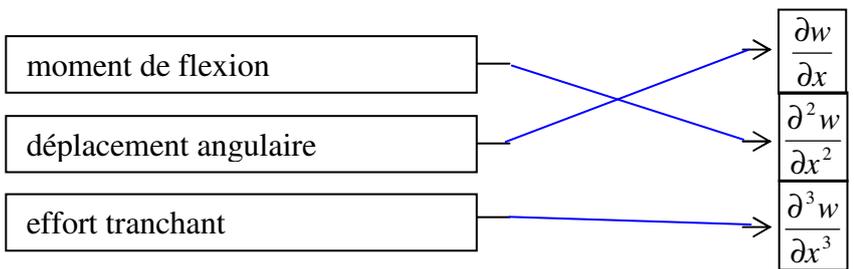
$$\sum F = EA \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right|_{x=l} + \text{forces extérieures} = 0$$

donner une équation en $x = l$ pour exprimer cette condition aux limites :

~~$w =$~~
 $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$

Contraintes nulles à l'extrémité $x = l$

4) Dans une poutre d'Euler-Bernouilli, associez à ces grandeurs à une dérivée spatiale du déplacement en les reliant par des traits



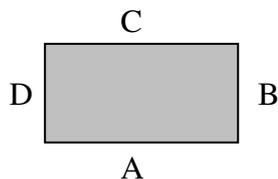
5) La fonction radiale d'une membrane circulaire solution de l'équation de Bessel est

$$R(r) = a J_m(\sigma r) + b Y_m(\sigma r)$$

Peut-on donner une précision sur la valeur des coefficients a et b qui soient indépendants des conditions aux limites ?

La fonction de Bessel de seconde espèce ne peut être une solution du problème car elle est infinie au centre de la membrane ($r = 0$), donc $b = 0$. Le coefficient a est déterminé avec les conditions initiales.

6) Mettez une croix devant les configurations de plaque pour lesquelles une solution analytique est possible. On utilise le codage suivant : A-B-C-D, où A, B, C et D peuvent prendre les valeurs L : libre, S : simplement supportée, E : encastrée



- | | | |
|--|---|--|
| <input type="checkbox"/> L-L-L-L (entièrement libre) | <input checked="" type="checkbox"/> S-S-S-S | <input checked="" type="checkbox"/> E-S-E-S |
| <input type="checkbox"/> S-S-E-E | <input type="checkbox"/> E-L-E-L | <input type="checkbox"/> S-L-E-L |
| <input checked="" type="checkbox"/> L-S-E-S | <input checked="" type="checkbox"/> S-E-S-E | <input checked="" type="checkbox"/> circulaire Encastrée |

7) Une plaque est excitée ponctuellement en $x = x_0$ et $y = y_0$ par une force sinusoïdale d'amplitude F_0 et de pulsation ω . Comment pouvez-vous exprimer l'amplitude du seul mode (m, n) connaissant sa déformé modale $\phi_{mn}(x, y)$ sa pulsation naturelle ω_{mn} et le facteur de perte η ?

$$w_{mn}(x, y, \omega) = \frac{F_0 \phi_{mn}(x_0, y_0) \phi_{mn}(x, y)}{M_{mn} [\omega_{mn}^2 - \omega^2 + j\eta\omega_{mn}^2]} \quad \text{avec} \quad M_{mn} = \frac{\rho h L_x L_y}{4}$$

voir pp. 53 et 58.

8) Dans une poutre d'Euler-Bernouilli, préciser les paramètres qui sont nuls (en mettant une croix dans la case) pour les conditions aux limites suivantes

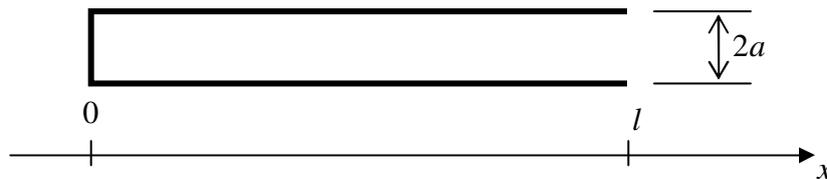
	simplement supportée	libre	encastrée	guidée
déplacement transversal	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
moment de flexion	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
déplacement angulaire	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
effort tranchant	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

EXAMEN VIBRATIONS & ACOUSTIQUE 2

Documents autorisés

Exercice 1

Flûte de Pan : utilisation des conditions aux limites pour calculer les fréquences propres d'un tube de bambou bouché à une extrémité et ouvert à l'autre



- 1) Question de cours simple : qu'elle est la relation qui relie pression acoustique et vitesse particulaire ? Ecrivez-la.
- 2) Ecrire l'équation d'onde en variables séparées $p(x,t) = X(x) T(t)$.
- 3) Ecrire l'équation de $T(t)$ et donner sa solution en identifiant la pulsation ω .
- 4) Exprimer les conditions aux limites à l'aide de la solution générale de $X(x)$.
 - a) pour l'extrémité rigide
 - b) pour l'extrémité ouverte en prenant pour impédance de rayonnement $Z_r = 0$.
- 5) Ecrire la déformée modale de la pression $X(x)$ en utilisant la solution particulière dépendante des conditions aux limites.
- 6) Exprimer les pulsations propres du tube.
- 7) Déterminer la longueur du tube de bambou pour la première pulsation propre ω_1 , en introduisant une correction de longueur Δl dépendant du rayon a . Exprimer cette condition en fonction de la configuration.
- 8) Comment pouvez-vous écrire la condition à la limite $x=l$ pour une impédance de rayonnement $Z_r = j\rho_0 c k \Delta l$? (on remarque que $k = \omega/c = \sigma$, la constante utilisée avec la méthode de séparation des variables)
- 9) Exprimer l'équation aux fréquences (équation caractéristique). Expliquer comment vous feriez pour trouver les solutions.

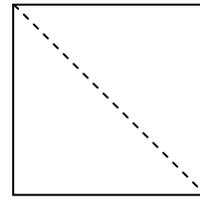
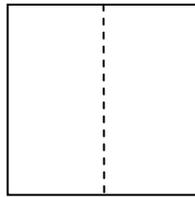
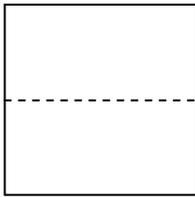
Exercice 2 au verso...

Exercice 2

Plaque carrée en flexion : fréquences propres et déformées modales

- 1) Ecrire les fréquences propres d'une plaque *rectangulaire* simplement supportée en fonction de ses dimensions (largeur, longueur, épaisseur) et des caractéristiques du matériau (masse volumique, module de Young et coefficient de poisson).
- 2) Ecrire les déformées modales de cette même plaque rectangulaire.
- 3) Considérer maintenant la plaque *carrée*. Exprimer les fréquences propres et les déformées modales. Quels commentaires pouvez-vous faire ?

Les figures suivantes représentent 3 déformées (avec une ligne nodale en trait interrompu)



$$\phi_A = \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi y}{L} \quad \phi_B = \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L} \quad \phi_C = \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi y}{L} + \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L}$$

- 4) Expliquer comment vous faites pour déterminer s'il s'agit de mode. Tester votre méthode sur les trois déformées A, B et C. Conclure.
- 5) Exprimer la force modale généralisée des modes identifiés pour une force ponctuelle située en (a, a) (l'origine est le coin inférieur gauche).

Corrigé

Exercice 1

1) La relation d'Euler entre la pression acoustique et la vitesse particulière (ici dans la direction x) s'écrit

$$u(x, t) = \frac{-1}{j\rho_0 c k} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}.$$

2) L'équation d'onde $\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} = 0$ s'écrit alors $X''(x)T(t) - \frac{1}{c^2} X(x)\ddot{T}(t) = 0$.

3) En mettant la relation précédente sous la forme

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\sigma^2$$

l'équation de associée à la variable $T(t)$ est $\ddot{T}(t) + \sigma^2 c^2 T(t) = 0$ et sa solution

$$T(t) = \alpha \sin \sigma c t + \beta \cos \sigma c t = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t.$$

Il est évident d'après la solution harmonique de l'équation différentielle que $\omega = \sigma c$ correspond à une pulsation.

4) Conditions aux limites en fonction de $X(x) = A \sin \sigma x + B \cos \sigma x$.

a) extrémité rigide : vitesse nulle $u(0, t) = \frac{-1}{j\rho_0 c k} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow X'(0) = 0$

$$X'(x) = \sigma A \cos \sigma x - \sigma B \sin \sigma x \\ X'(0) = \sigma A \cos \sigma 0 = 0 \Rightarrow A = 0.$$

b) extrémité avec $Z_r = 0$, c'est à dire que $p(l, t) = 0$ ou $X(l) = 0$

$$X(l) = B \cos \sigma l = 0.$$

Les solutions de cette équation caractéristique $\cos \sigma l = 0$ sont $\sigma_n = \frac{2n-1}{2l} \pi$

5) D'après les résultats précédents, la déformée modale est $X(x) = B \cos \sigma_n x = B \cos \frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{l}$

6) Les pulsations propres du tube sont $\omega_n = \sigma_n c = \frac{2n-1}{2} \frac{\pi c}{l}$.

7) La longueur du tube de bambou en fonction de la première pulsation propre et avec une correction Δl est

$$L = l + \Delta l = \frac{\pi c}{2\omega_1} + 0.61a$$

La correction $\Delta l = 0.61a$ correspond à une terminaison non-bafflée (cours).

7) Condition aux limites en terme d'impédance de rayonnement $Z_r = j\rho_0 c k \Delta l$

La relation entre pression et vitesse est donc $p(l,t) = Z_r u(l,t) = j\rho_0 c k \Delta l u(l,t)$. On peut écrire également $u(l,t) = \frac{-1}{j\rho_0 c k} X'(l)T(t)$, donc $X(l) = \left(-\frac{j\rho_0 c \Delta l k}{j\rho_0 c k} \right) X'(l)$, soit finalement

$$X(l) = -\Delta l X'(l)$$

9) L'équation aux fréquences ou équation caractéristique s'obtient en remplaçant dans la relation précédente les expressions de $X(l)$ et $X'(l)$, ce qui conduit à

$$\cos \sigma l = -\Delta l \sigma \sin \sigma l \quad \text{ou encore} \quad \cot \sigma l = -\frac{\Delta l}{l} \sigma l.$$

Les solutions $(\sigma_n l)$ correspondent aux intersections entre deux réseaux de courbes : les courbes représentant les $\cot \sigma l$ et une droite de pente $-\Delta l/l$. Les solutions $(\sigma_n l)$ pourront être calculées numériquement. Ainsi les pulsations propres s'obtiennent par

$$\omega_n = \sigma_n c = (\sigma_n l) \frac{c}{l}.$$

Exercice 2

1) Les fréquences propres d'une plaque *rectangulaire* simplement supportée (cours) de dimensions $L_x \times L_y$ sont

$$f_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi} = \frac{\pi}{2} \left[\left(\frac{m}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n}{L_y} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}}$$

2) Les déformées modales correspondantes (cours)

$$\phi_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_y}$$

3) Fréquences propres et déformées modales de la plaque carrée ($L = L_x = L_y$)

$$f_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi} = \frac{\pi}{2L^2} [m^2 + n^2] \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}}$$

$$\phi_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{L}$$

Un mode (m, n) et un mode (n, m) auront une même valeur de fréquence propre car $f_{mn} = f_{nm}$. Par contre, les déformées modales restent différentes : la permutation de m et de n ne conduit pas à la même fonction de x et de y .

4) Deux modes d'indices i et j (orthogonaux par définition) doivent vérifier la relation d'orthogonalité sur le domaine D (surface de la plaque carrée)

$$\iint_D \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) dx dy = 0.$$

Pour vérifier que les déformées A , B et C correspondent à des modes, il suffit de tester les couples (i, j) suivants : (A, B) , (A, C) et (B, C) , sachant que $\int \sin m\alpha x \sin n\alpha x dx = 0$ pour $n \neq m$ et $\int \sin^2 m\alpha x dx \neq 0$ quand $n = m$.

$$\iint_D \phi_A(x, y) \phi_B(x, y) dx dy = \int_0^L \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} dx \int_0^L \sin \frac{2\pi y}{L} \sin \frac{\pi y}{L} dy = 0$$

les déformées (A, B) vérifient la relation d'orthogonalité

$$\begin{aligned} \iint_D \phi_A(x, y) \phi_C(x, y) dx dy &= \iint_D \left[\sin^2 \frac{\pi x}{L} \sin^2 \frac{2\pi y}{L} + \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{2\pi y}{L} \sin \frac{\pi y}{L} \right] dx dy \\ &= \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx \int_0^L \sin^2 \frac{2\pi y}{L} dy + \int_0^L \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} dx \int_0^L \sin \frac{2\pi y}{L} \sin \frac{\pi y}{L} dy \\ &= \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx \int_0^L \sin^2 \frac{2\pi y}{L} dy \neq 0 \end{aligned}$$

les déformées (A, C) ne vérifient pas la relation d'orthogonalité. On a aussi une relation similaire pour les déformées (B, C)

$$\iint_D \phi_B(x, y) \phi_C(x, y) dx dy = \int_0^L \sin^2 \frac{2\pi x}{L} dx \int_0^L \sin^2 \frac{\pi y}{L} dy \neq 0$$

qui montre qu'elles ne vérifient pas la relation d'orthogonalité.

Les déformées A et B correspondent à des modes. La déformée C qui est une combinaison linéaire des modes A et B n'en est pas un.

5) Une force ponctuelle située en (a, a) s'écrit $F(x, y) = F_0 \delta(x - a) \delta(y - a)$. La force modale généralisée est

$$F_{mn} = \iint_D F(x, y) \phi_{mn}(x, y) dx dy = F_0 \iint_D \phi_{mn}(x, y) \delta(x - a) \delta(y - a) dx dy = F_0 \phi_{mn}(a, a)$$

soit pour les modes A et B

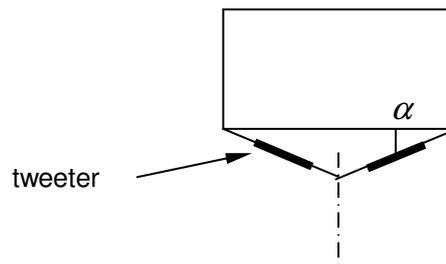
$$F_A = F_0 \sin \frac{\pi a}{L} \sin \frac{2\pi a}{L} \quad \text{et} \quad F_B = F_0 \sin \frac{2\pi a}{L} \sin \frac{\pi a}{L}$$

(mais $F_A = F_B$ seulement pour la position de 1)

EXAMEN VIBRATIONS & ACOUSTIQUE 2

Exercice 1

Une enceinte acoustique utilise deux haut-parleurs "tweeter" pour la reproduction des aigus. Ils sont disposés de la façon suivante (vue de dessus) :



Les haut-parleurs sont supposés se comporter comme des pistons circulaires de rayon a montés dans des baffles infinis inclinés chacun d'un angle θ . On considère la courbe de directivité en de l'intensité en champ lointain

$$L_I(r, \theta) = 10 \log \frac{I_r(r, \theta)}{10^{-12}}$$

1) On définit la limite haute fréquence f_2 quand l'intensité de chaque tweeter présente une atténuation de 3dB dans l'axe de l'enceinte par rapport l'intensité sur l'axe du piston (c'est à dire quand $\theta = \alpha$). Exprimer cette fréquence en fonction de a et α .

On utilisera l'approximation $\frac{2J_1(x)}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{8}$

2) La fréquence limite basse f_1 correspond à la valeur $ka = 1$. Sachant que l'on veut que f_2 soit deux octaves au dessus de f_1 , déterminer l'angle α que satisfait les conditions de la question précédente.

3) Est-ce que l'hypothèse d'un comportement assimilable à celui de pistons bafflés vous semble raisonnable ?

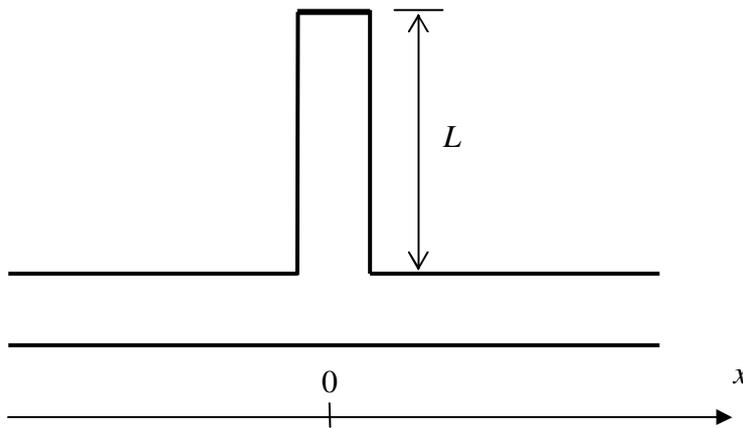
Exercice 2

Un piston est monté dans un tube cylindrique dont l'aire de la section est S

- déterminer la fréquence limite pour que seul le mode plan (0,1) puisse se propager dans le tube,
- donner la fonction dont le premier passage à zéro correspond à cette fréquence limite
- donner les indices du premier mode propagatif qui apparaît après le mode plan

Exercice 3

- 1) Donner la définition des pertes de transmission d'un silencieux.
- 2) Un tube de longueur L et de section S fermé par une extrémité rigide est monté en dérivation sur un autre tube de même section (*voir schéma*).
Exprimer ses pertes de transmission en utilisant la même démarche que celle employée dans le cas du silencieux à résonateur.
- 3) Pourquoi appelle t-on ce système "résonateur quart d'onde" ?



Exercice 4

Un tube circulaire est ouvert à une extrémité.

- 1) Expliquer la relation qui existe entre l'impédance de rayonnement de son extrémité et le coefficient de réflexion des ondes planes à l'intérieur.
- 2) Exprimer ce coefficient de réflexion en onde plane de cette extrémité sachant que l'impédance de rayonnement d'un tube circulaire non-bafflé dans la gamme de fréquence considérée est

$$Z_r = \rho_0 c \left[(ka)^2 / 4 + j0.61ka \right]$$

- 3) Est-ce que le coefficient de réflexion changerait si l'extrémité du tube se terminait par une ouverture pratiquée dans un baffle ?

Corrigé

Exercice 1

1) L'intensité en champ lointain est (cours) $I_r(r, \theta) = A \left[\frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]^2$. Une atténuation de

3dB est constatée quand $\left[\frac{2J_1(x)}{x} \right]^2 \approx \left[1 - \frac{x^2}{8} \right]^2 = \frac{1}{2}$, avec $x = ka \sin \alpha$, c'est à dire quand $x^2 = 8 \left(1 - 1/\sqrt{2} \right)$, ce qui conduit à $x = ka \sin \alpha = 1.53$ (alors que la valeurs calculée sans approximation est 1.618). Dans cette relation la valeur du nombre d'onde est $k = 2\pi f_2/c$ ce qui conduit à l'expression suivante

$$f_2 = \frac{1.53 c}{2\pi a \sin \alpha}.$$

2) La fréquence limite $f_2 = 4f_1$, ce qui correspond donc à $ka = 4$. L'angle α doit vérifier la relation $4 \sin \alpha = 1.53$, soit

$$\alpha = \arcsin \frac{1.53}{4} = 0.39 \text{ rad, soit environ } 22.5^\circ.$$

3) Le modèle de piston monté sur un baffle infini ne correspond pas à la configuration expérimentale mais peut constituer une bonne approximation pour dimensionner l'enceinte dans le cadre d'une approche industrielle.

Exercice 2

a) La fréquence limite pour que seul le mode plan (0,1) puisse se propager dans le tube correspond à la fréquence de coupure du mode suivant qui sera un mode $(m, 1)$

$$f_{c,m1} = \frac{c \chi_{m1}}{2\pi a} = \frac{c \chi_{m1}}{2\pi \sqrt{S/\pi}} \text{ avec } a \text{ le rayon du tube de section } S$$

χ_{m1} est le premier zéro de la dérivée de la fonction J_m (c'est aussi le 1^{er} maximum).

b) La fonction de Bessel de première espèce représente la distribution radiale de la pression. La condition aux limites sur les parois rigides du tube font que la vitesse est nulle sur les parois du tube. Par la relation d'Euler, c'est donc la dérivée de cette fonction de Bessel qui correspond à cette fonction dont le premier passage à zéro donne la fréquence limite.

c) Les représentations des fonctions de Bessel sur le polycopié montre que celle qui présente le premier maximum est la fonction de Bessel d'ordre $m = 1$.

Exercice 3

1) Les pertes de transmission d'un silencieux se définissent comme la valeur en dB (10 fois le log base 10) de la puissance incidente à l'entrée du silencieux sur la puissance transmise en sortie, sur une terminaison correspondant à l'impédance caractéristique (tube infini).

2) Un tube de longueur L et de section S fermé par une extrémité rigide est monté en dérivation sur un autre tube de même section (voir schéma). La pression et la vitesse particulaire dans le tronçon d'entrée ($x < 0$) du tube sont

$$p_1(x) = A_I \exp(-jkx) + A_R \exp(jkx) \text{ et } u_1(x) = \frac{A_I}{\rho_0 c} \exp(-jkx) - \frac{A_R}{\rho_0 c} \exp(jkx)$$

La pression et la vitesse particulaire dans le tronçon en dérivation ($0 < y \leq L$) sont

$$p_2(y) = A'_I \exp(-jky) + A'_R \exp(jky) \text{ et } u_2(y) = \frac{A'_I}{\rho_0 c} \exp(-jky) - \frac{A'_R}{\rho_0 c} \exp(jky).$$

A l'extrémité rigide de ce tube ($y = L$) la vitesse particulaire est nulle ce qui conduit à la relation $A'_R = A'_I \exp(-j2kL)$.

La pression et la vitesse particulaire dans le tronçon de sortie ($x > 0$) du tube sont

$$p_3(x) = A_T \exp(-jkx) \text{ et } u_3(x) = \frac{A_T}{\rho_0 c} \exp(-jkx)$$

car il n'y a pas de réflexion.

A l'origine ($x = 0$ et $y = 0$), on vérifie la continuité des pression et la conservation des débits

$$p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) \text{ et } Q_1 = Q_2 + Q_3 = \rho_0 S u_1(0) = \rho_0 S u_2(0) + \rho_0 S u_3(0)$$

A l'entrée du tube en dérivation ($y = 0$), la pression et la vitesse s'écrivent

$$p_2(0) = A'_I + A'_R = A'_I [1 + \exp(-j2kL)] \text{ et } u_2(0) = \frac{A'_I}{\rho_0 c} - \frac{A'_R}{\rho_0 c} = \frac{A'_I}{\rho_0 c} [1 - \exp(-j2kL)].$$

L'équation de continuité des pression $A_I + A_R = A_T = A'_I [1 + \exp(-j2kL)]$ permet d'écrire

$$A_R = A_T - A_I \text{ et } A'_I = \frac{A_T}{1 + \exp(-j2kL)}$$

En reportant ces relations dans l'équation de conservation des débits on obtient

$$A_I - A_R = A_T + A'_I [1 - \exp(-j2kL)] \text{ soit } 2A_I - A_T = A_T + A_T \left[\frac{1 - \exp(-j2kL)}{1 + \exp(-j2kL)} \right]$$

qui permet d'exprimer l'amplitude A_T en fonction de A_I

$$A_T = \frac{2A_I}{2 + j \tan kL}.$$

Les pertes de transmission s'obtiennent alors facilement par

$$TL = 10 \log \frac{S |A_I|^2}{S |A_T|^2} = 10 \log \left[1 + \frac{1}{4} \tan^2 kL \right].$$

3) Les pertes de transmission sont maximales (infinies, sans dissipation) quand $kL = \frac{\pi}{2} + n\pi$ avec $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Le premier maximum apparaît pour $kL = \pi/2$, c'est à dire quand $L = \lambda/4$, d'où sont nom de "résonateur quart d'onde".

Exercice 4

1) En fonction de l'impédance de rayonnement en sortie de tube, une quantité plus ou moins importante d'énergie sera transmise à l'extérieur.

2) En considérant $p(x) = A[\exp(-jkx) + R \exp(jkx)]$ et $u(x) = \frac{A}{\rho_0 c} [\exp(-jkx) - R \exp(jkx)]$

l'impédance s'exprime par $Z = \frac{p(0)}{u(0)} = \rho_0 c \frac{1+R}{1-R}$ et le coefficient de réflexion par

$$R = \frac{Z - \rho_0 c}{Z + \rho_0 c} = \frac{(ka)^2/4 - 1 + j0.61ka}{(ka)^2/4 + 1 + j0.61ka}$$

Quand $ka \rightarrow 0$, R tend vers -1 .

3) Si l'extrémité du tube se termine par une ouverture pratiquée dans un baffle, l'impédance est modifiée et en conséquence le coefficient de réflexion.