

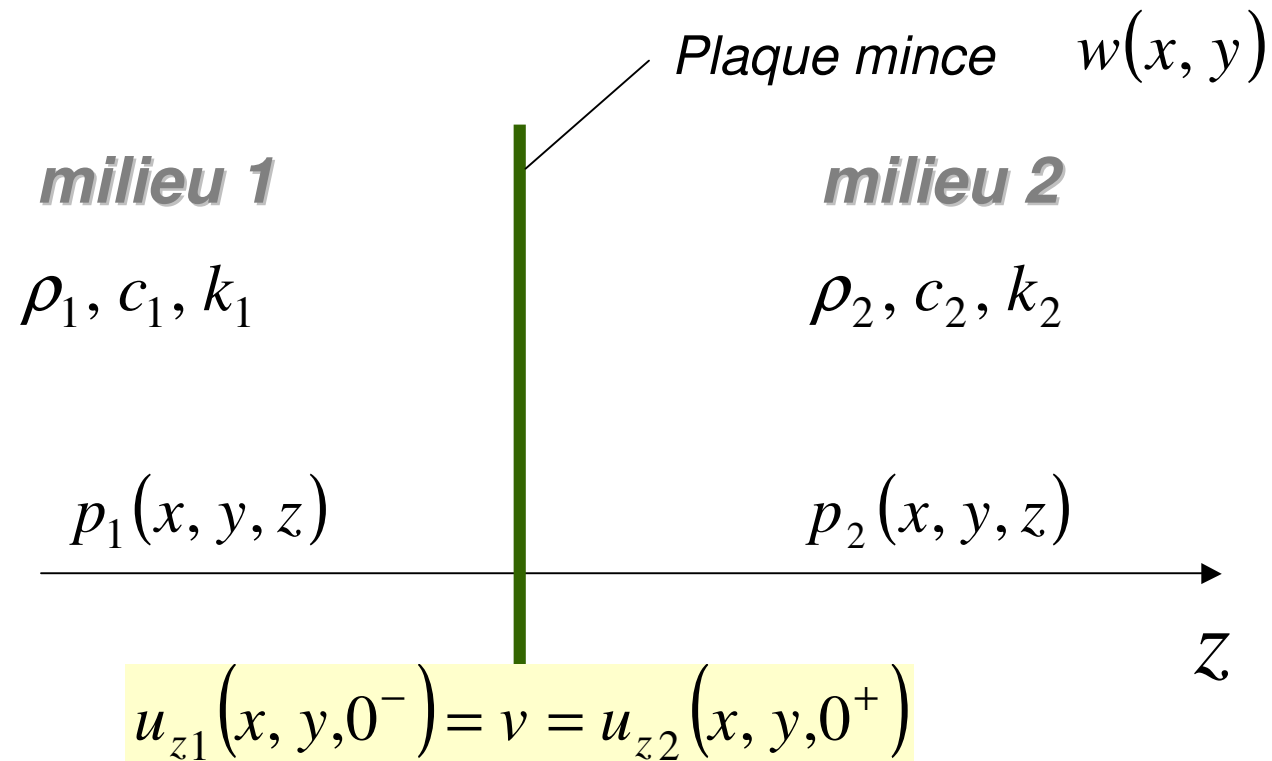
VIBROACOUSTIQUE DES STRUCTURES PLANES

**3 - ANALYSE ET REPRESENTATION DANS LE CAS D'UNE
PLAQUE INFINIE**

4 - RAYONNEMENT D'UNE PLAQUE RECTANGULAIRE

5 - PUISSANCE ACOUSTIQUE RAYONNEE

Transparence acoustique: CAS D'UNE PLAQUE INFINIE



- Rayonnement acoustique*
- Transparence acoustique***

Transparence acoustique d'une plaque infinie

Milieu 1 : ondes acoustiques

$$\nabla^2 p_1(x, y, z) + k_1^2 p_1(x, y, z) = 0$$

Interface milieu 1 / plaque : continuité des vitesses acoustiques et vibratoires

$$\left. \frac{\partial p_1(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \omega^2 \rho_1 w(x, y)$$

Plaque : déplacement du aux ondes de flexion

$$D \nabla^4 w(x, y) - \omega^2 \rho h w(x, y) = p_1(x, y, 0) - p_2(x, y, 0)$$

Interface milieu 2 / plaque : continuité des vitesses acoustiques et vibratoires

$$\left. \frac{\partial p_2(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \omega^2 \rho_2 w(x, y)$$

Milieu 2 : ondes acoustiques

$$\nabla^2 p_2(x, y, z) + k_2^2 p_2(x, y, z) = 0$$

Transparence acoustique d'une plaque infinie

Milieu 1 : ondes acoustiques

$$\nabla^2 p_1(x, y, z) + k_1^2 p_1(x, y, z) = 0$$

Onde plane incidente : angles θ et φ

$$p_{\text{inc}}(x, y, z) = P e^{-jkx \sin \theta \sin \phi - jky \sin \theta \cos \phi - jkz \cos \theta}, \quad k = \frac{\omega}{c}$$
$$= p(x, y) e^{-jkz \cos \theta}$$

Ondes planes incidente + réfléchie

$$p_1(x, y, z) = p(x, y) \left[e^{-jkz \cos \theta} + R e^{jkz \cos \theta} \right]$$

Continuité des vitesses $\Rightarrow p_2(x, y, z) = p(x, y) T e^{-jk_z z}$

$$k_z = \sqrt{k_t^2 - (k_x^2 + k_y^2)} = \sqrt{k_t^2 - k^2 \sin^2 \theta}$$

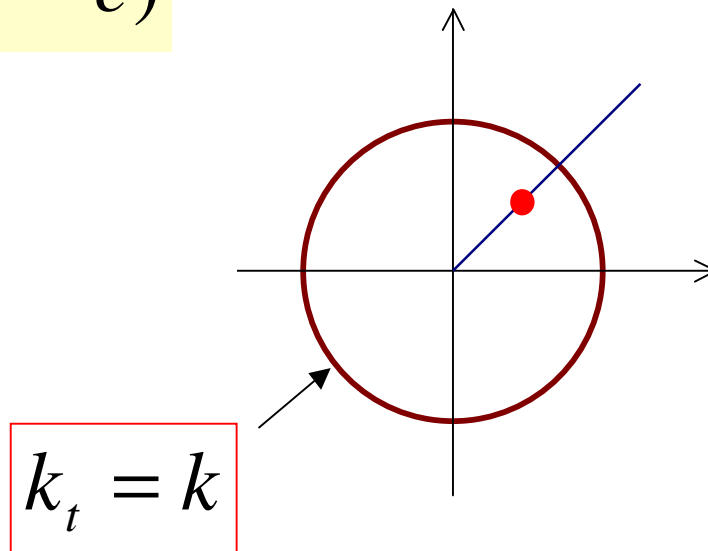
$$k_t = \frac{\omega}{c_t}$$

Transparence acoustique d'une plaque infinie

$$k_t = k \quad (c_t = c)$$

Onde transmise

Toujours propagative

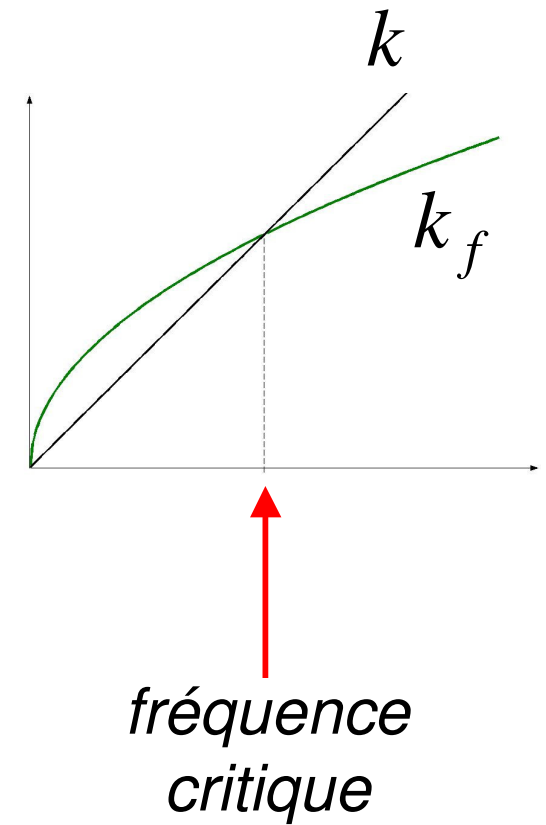
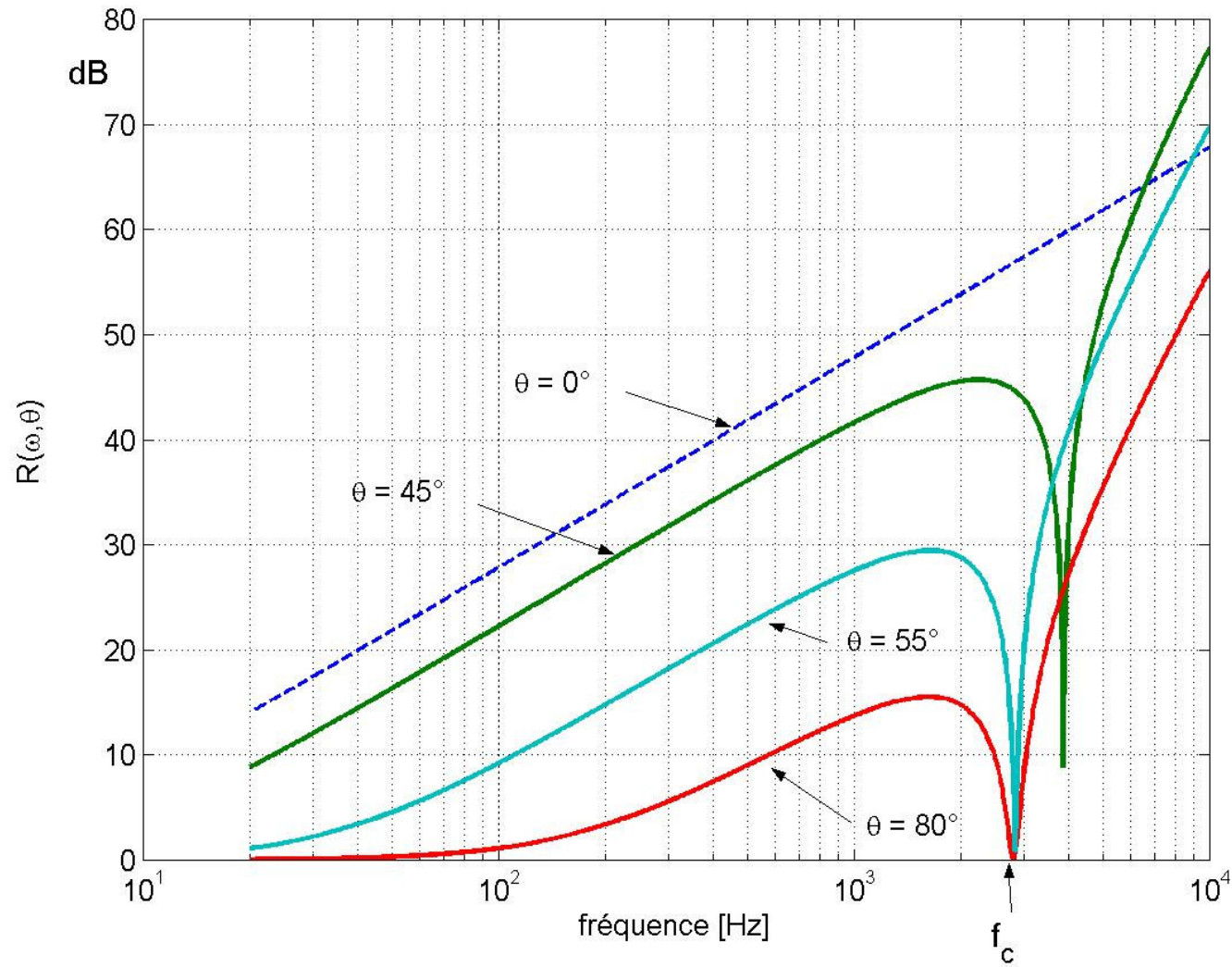


$$\theta_t = \theta$$

$$k \sin \theta = k_t \sin \theta_t$$

$$\theta_t = \arcsin \frac{k \sin \theta}{k_k} = \arcsin \frac{c_t \sin \theta}{c}$$

Transparence acoustique d'une plaque infinie

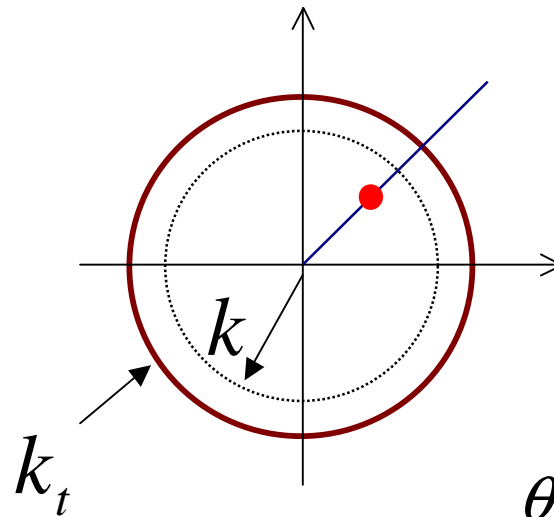


Transparence acoustique d'une plaque infinie

$$k_t > k \quad (c_t < c)$$

Onde transmise

Toujours propagative



$$0 \leq \theta_t \leq \theta_{\max}$$

$$\theta_{\max} = \arcsin \frac{k}{k_t} = \arcsin \frac{c_t}{c}$$

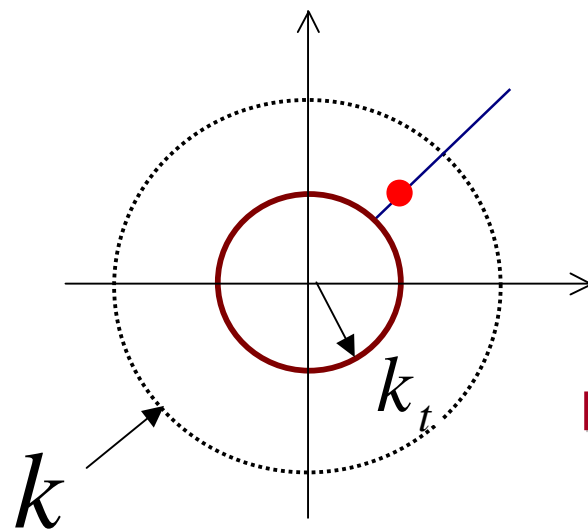
$$k \sin \theta = k_t \sin \theta_t$$

$$\theta_t = \arcsin \frac{k \sin \theta}{k_t} = \arcsin \frac{c_t \sin \theta}{c}$$

Transparence acoustique d'une plaque infinie

$$k_t < k \quad (c_t > c)$$

Onde transmise



Propagative ($k_t > k \sin \theta$)

$$0 \leq \theta_t \leq \frac{\pi}{2}$$

Evanescente ($k_t < k \sin \theta$)

$$\theta_{LIM} = \arcsin \frac{k_t}{k} = \arcsin \frac{c}{c_t}$$

$$k \sin \theta = k_t \sin \theta_t$$

$$\theta_t = \arcsin \frac{k \sin \theta}{k_k} = \arcsin \frac{c_t \sin \theta}{c}$$

VIBROACOUSTIQUE DES STRUCTURES PLANES

**3 - ANALYSE ET REPRESENTATION DANS LE CAS D'UNE
PLAQUE INFINIE**

4 - RAYONNEMENT D'UNE PLAQUE RECTANGULAIRE

5 - PUISSANCE ACOUSTIQUE RAYONNEE

CAS D'UNE PLAQUE FINIE

Conditions
aux limites

$$\text{CL}\{w(x, y)\} = 0$$

Plaque mince $w(x, y)$

milieu 1

$$\rho_1, c_1, k_1$$

milieu 2

$$\rho_2, c_2, k_2$$

$$p_1(x, y, z)$$

$$p_2(x, y, z)$$

$$u_{z1}(x, y, 0^-) = v = u_{z2}(x, y, 0^+)$$

Rayonnement acoustique

Transparence acoustique

PLAQUE FINIE

Milieu 1 : ondes acoustiques

$$\nabla^2 p_1(x, y, z) + k_1^2 p_1(x, y, z) = 0$$

Interface milieu 1 / plaque : continuité des vitesses acoustiques et vibratoires

$$\left. \frac{\partial p_1(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \begin{cases} 0 & \text{ailleurs} \\ \omega^2 \rho_1 w(x, y) & \text{sur } S \end{cases}$$

Plaque : déplacement du aux ondes de flexion

$$D \nabla^4 w(x, y) - \omega^2 \rho h w(x, y) = F(x, y) + p_1(x, y, 0) - p_2(x, y, 0) \quad \text{CL}\{w(x, y)\} = 0$$

Interface milieu 2 / plaque : continuité des vitesses acoustiques et vibratoires

$$\left. \frac{\partial p_2(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \begin{cases} 0 & \text{ailleurs} \\ \omega^2 \rho_2 w(x, y) & \text{sur } S \end{cases}$$

Milieu 2 : ondes acoustiques

$$\nabla^2 p_2(x, y, z) + k_2^2 p_2(x, y, z) = 0$$

Transformée de Fourier Spatiale

Transformée de Fourier Spatiale 2D (TFS)

$$W(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, y) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

analyse

$$w(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y)} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi}$$

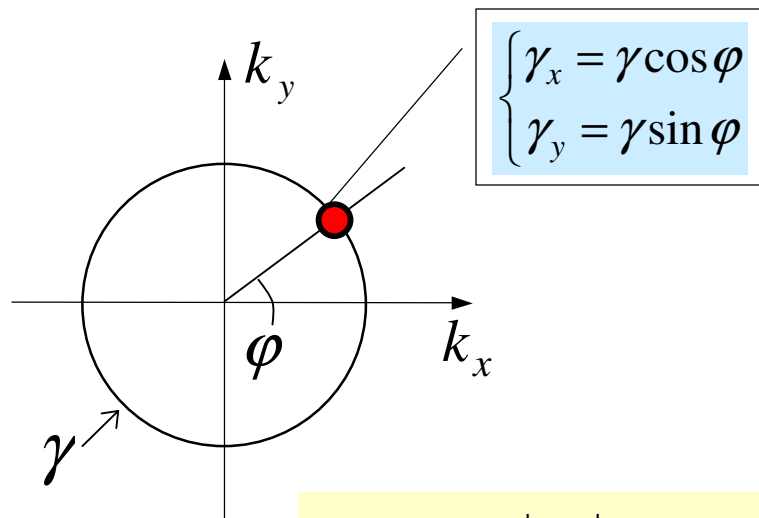
synthèse

La TFS 2D permet de généraliser les résultats de la plaque infinie à une structure plane quelconque :

- Pour une **plaque infinie** une composante de flexion est représentée par **un point** sur le spectre des nombres d'onde
- Pour une **plaque finie** les *multiples réflexions* sur les bords conduiront à de **multiples points** sur le spectre des nombres d'onde

Exemple

Transformée de Fourier Spatiale 2D (TFS)



Si le spectre de nombre d'onde est représentée par

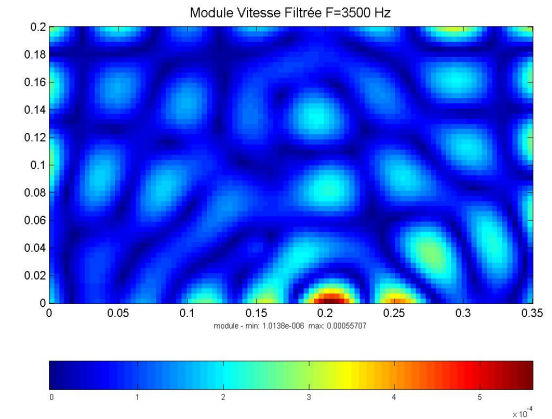
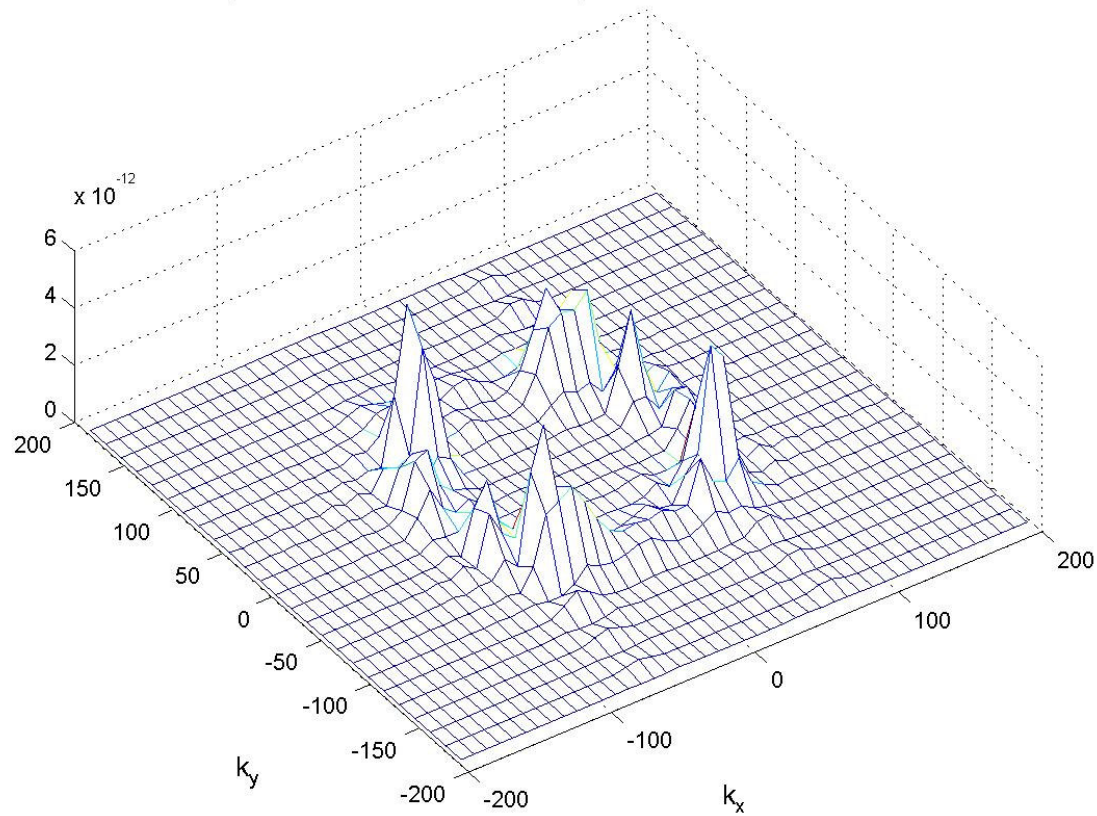
$$W(k_x, k_y) = W_0 \delta(k_x - \gamma_x) \delta(k_y - \gamma_y)$$

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y)} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \\ &= W_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(k_x - \gamma_x) e^{-jk_x x} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(k_y - \gamma_y) e^{-jk_y y} \frac{dk_y}{2\pi} \\ &= \frac{W_0}{4\pi^2} e^{-j(\gamma_x x + \gamma_y y)} \end{aligned}$$

Exemple

Transformée de Fourier Spatiale 2D (TFS)

Plaque cuivre 0.35 m x 0.20 m - épaisseur 3 mm - F = 3500 Hz



Plaque finie : solution générale

Pour simplifier $p_2 = p$, $c_2 = c$, $k_2 = k$ et $\rho_0 = \rho_2$

Transformée de Fourier Spatiale 2D (TFS) de la pression

$$P(k_x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

analyse

$$p(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(k_x, k_y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi}$$

synthèse

Transformée de Fourier de l'équation de Helmholtz

$$TFS\{\nabla^2 p(x, y, z) + k^2 p(x, y, z)\} = TFS\{\nabla^2 p(x, y, z)\} + k^2 P(k_x, k_y, z) = 0$$

Plaque finie : solution générale

Dérivée de la pression $p(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(k_x, k_y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(k_x, k_y, z) \frac{\partial}{\partial x} e^{-j(k_x x + k_y y)} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} -jk_x P(k_x, k_y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \end{aligned}$$

donc

$$TFS \left\{ \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x} \right\} = -jk_x P(k_x, k_y, z)$$

$$TFS \left\{ \frac{\partial^n p(x, y, z)}{\partial x^n} \right\} = (-jk_x)^n P(k_x, k_y, z)$$

$$TFS \left\{ \frac{\partial^{m+n} p(x, y, z)}{\partial x^m \partial y^m} \right\} = (-jk_x)^m (-jk_y)^n P(k_x, k_y, z)$$

$$TFS \left\{ \nabla^2 p(x, y, z) \right\} = TFS \left\{ \frac{\partial^2 p(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p(x, y, z)}{\partial y^2} \right\} = -(k_x^2 + k_y^2) P(k_x, k_y, z)$$

Plaque finie : solution générale

Transformée de Fourier de l'équation de Helmholtz

$$TFS\{\nabla^2 p(x, y, z)\} + k^2 P(k_x, k_y, z) = 0$$

avec $TFS\{\nabla^2 p(x, y, z)\} = -(k_x^2 + k_y^2) P(k_x, k_y, z)$

devient

$$\frac{\partial^2 P(k_x, k_y, z)}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2 - k_y^2) P(k_x, k_y, z) = 0$$

avec pour solution

$$P(k_x, k_y, z) = A(k_x, k_y) e^{-jk_z z} + B(k_x, k_y) e^{jk_z z}$$

Éliminé par la condition de Sommerfeld

Plaque finie : solution générale

relation de continuité

$$\left. \frac{\partial P(k_x, k_y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \omega^2 \rho_0 W(k_x, k_y)$$

$$W(k_x, k_y) = \iint_S w(x, y) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

Pression rayonnée dans le domaine des nombres d'onde

$$P(k_x, k_y, z) = j\omega \frac{\rho_0 c k}{k_z} e^{-jk_z z} W(k_x, k_y)$$

et dans l'espace après TFS inverse

$$p(x, y, z) = j\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\rho_0 c k}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} e^{-j\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z} W(k_x, k_y) \right] e^{-j(k_x x + k_y y)} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi}$$

Solution pour la pression en champ lointain

coordonnées sphériques

$$x = R \sin \theta \cos \phi$$

$$y = R \sin \theta \sin \phi$$

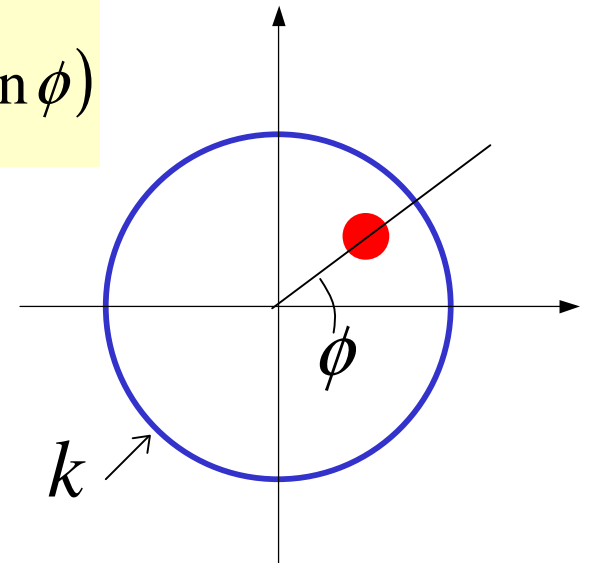
$$z = R \cos \theta$$

$$p(R, \theta, \phi) = j\omega \rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jR(k_x \sin \theta \cos \phi + k_y \sin \theta \sin \phi + k_z \cos \theta)}}{k_z} W(k_x, k_y) \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi}$$

Quand $kR \gg 1$ **méthode de la phase stationnaire**

$$p(R, \theta, \phi) \approx -\omega^2 \rho_0 \frac{e^{-jkR}}{R} W(k \sin \theta \cos \phi, k \sin \theta \sin \phi)$$

$$k_x = k \sin \theta \cos \phi \quad \text{et} \quad k_y = k \sin \theta \sin \phi$$



Utilisation de la représentation modale

Conditions aux limites : 4 bords simplement supportés

Solution libre

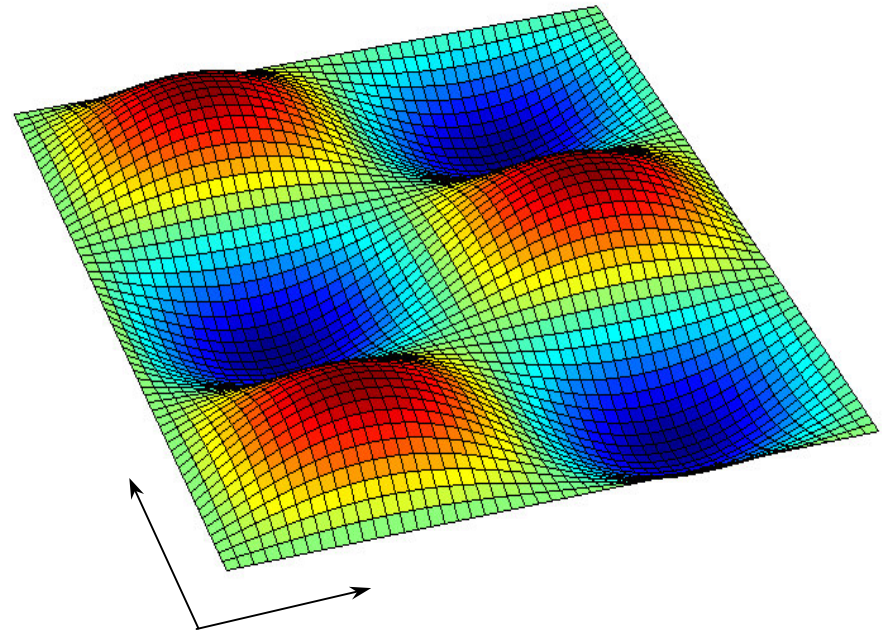
$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn} \sin \omega_{mn} t + B_{mn} \cos \omega_{mn} t] \phi_{mn}(x, y)$$

Pulsation propres

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left[\left(\frac{m}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n}{L_y} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

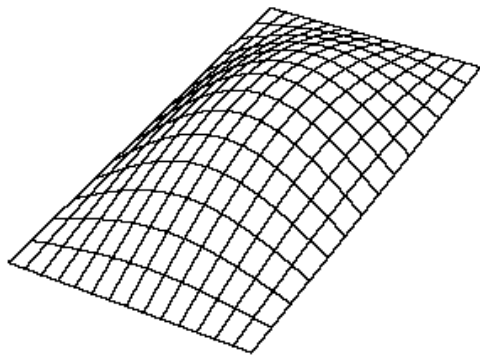
Déformée modale

$$\phi_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_y}$$



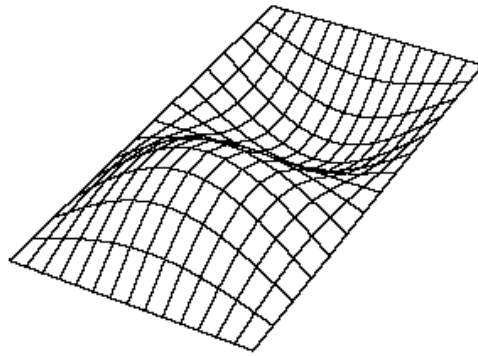
Plaque rectangulaire SS

Mode (1, 1)



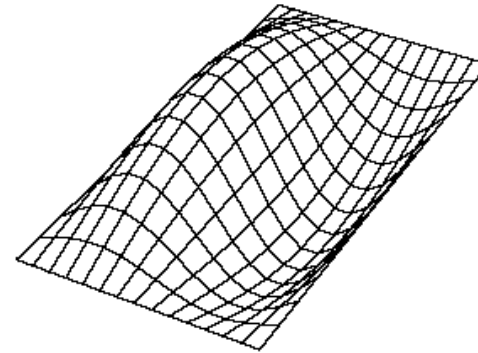
$$\phi_{11}(x, y)$$

Mode (2, 1)



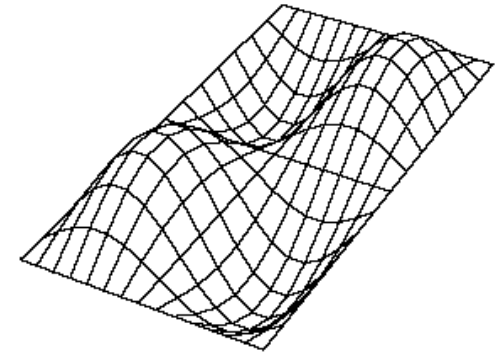
$$\phi_{21}(x, y)$$

Mode (1, 2)



$$\phi_{12}(x, y)$$

Mode (2, 2)



$$\phi_{22}(x, y)$$

d'après Dan Russell, www.kettering.edu/~drussell/

Excitation forcée des plaques

Equation du déplacement

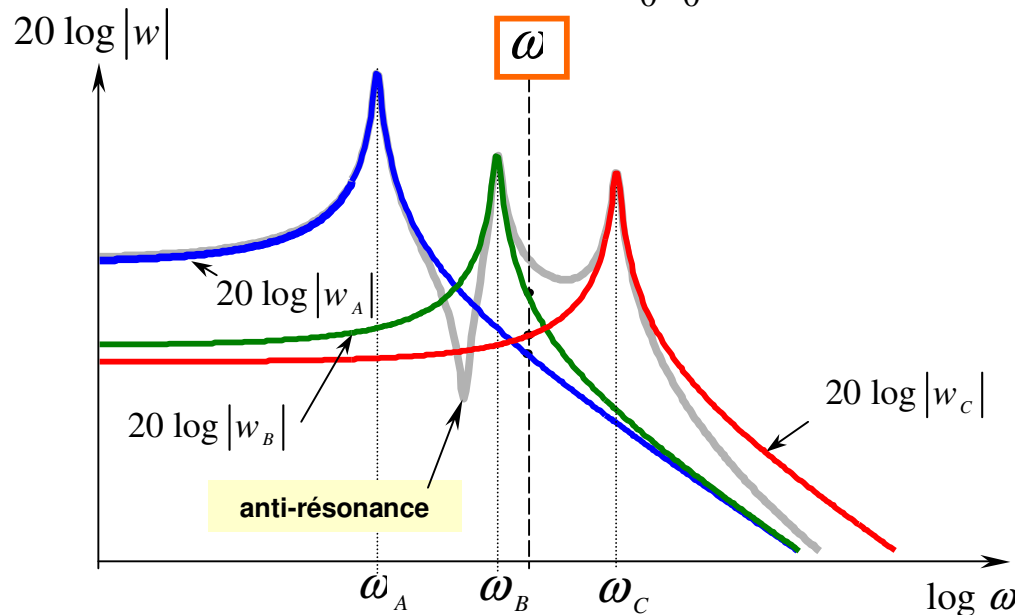
$$w(x, y, \omega) = \sum_m \sum_n \frac{F_{mn} e^{j\omega t}}{M_{mn} [\omega_{mn}^2 - \omega^2 + j2\omega\omega_{mn}\zeta_{mn}]} \phi_{mn}(x, y)$$

masse modale généralisée

$$M_{mn} = \rho h \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_{mn}^2(x, y) dx dy$$

force modale généralisée

$$F_{mn} = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} f(x, y) \phi_{mn}(x, y) dx dy$$



Pression sur la plaque

Pression pariétale

$$p(x, y, 0) = j\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_0 c k W(k_x, k_y)}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} e^{-j(k_x x + k_y y)} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi}$$

Utilisation de la base modale

$$w(x, y) = \sum_{m,n} a_{mn}(\omega) \phi_{mn}(x, y)$$

$$\iint_S \phi_{mn}(x, y) \phi_{kl}(x, y) dx dy = \begin{cases} N_{mn} & \text{quand } (k, l) = (m, n) \\ 0 & \text{quand } (k, l) \neq (m, n) \end{cases}$$

Objectif : exprimer le déplacement dans la base modale pour la pression pariétale

$$W(k_x, k_y) = \sum_{m,n} a_{mn}(\omega) \Phi_{mn}(k_x, k_y)$$

Pression sur la plaque

Pression pariétale s'écrit de deux façons différentes

... en exprimant la vitesse sur la base modale

$$p(x, y, 0) = j\omega \rho_0 c k \sum_{m,n} a_{mn}(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_{mn}(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y)}}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi}$$

... en recherchant une décomposition de la pression pariétale sur la base des fonctions orthogonales $\phi_{pq}(x, y)$

$$p(x, y, 0) = \sum_{k,l} b_{kl} \phi_{kl}(x, y)$$

Pression sur la plaque

En multipliant chaque terme par $\phi_{pq}(x, y)$ et en utilisant la relation d'orthogonalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y, 0) \phi_{pq}(x, y) dx dy = \sum_{k,l} b_{kl} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{kl}(x, y) \phi_{pq}(x, y) dx dy = b_{pq} N_{pq}$$

L'utilisation de la seconde expression pour la pression

conduit aux coefficients $b_{pq} = \frac{1}{N_{pq}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y, 0) \phi_{pq}(x, y) dx dy$

$$b_{pq} = \frac{j\omega \rho_0 c k}{N_{pq}} \sum_{m,n} a_{mn}(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_{mn}(k_x, k_y)}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{pq}(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi}$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{pq}(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy}_{\Phi_{pq}(-k_x, -k_y)}$$

Pression sur la plaque

La pression pariétale peut s'écrire sous la forme suivante

$$b_{pq} = j\omega \sum_{m,n}^{\infty} a_{mn}(\omega) Z_{mnpq}(\omega)$$

avec l'impédance de rayonnement

$$Z_{mnpq}(\omega) = \frac{\rho_0 c}{N_{pq}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} \Phi_{mn}(k_x, k_y) \Phi_{pq}(-k_x, -k_y) \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi}$$

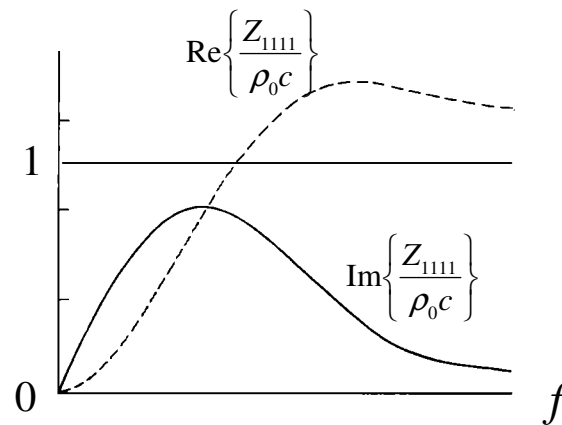
Pression pariétale prend la forme

$$p(x, y, 0) = \sum_{p,q}^{\infty} b_{pq} \phi_{pq}(x, y) = j\omega \sum_{p,q}^{\infty} \sum_{m,n}^{\infty} a_{mn}(\omega) Z_{mnpq}(\omega) \phi_{pq}(x, y)$$

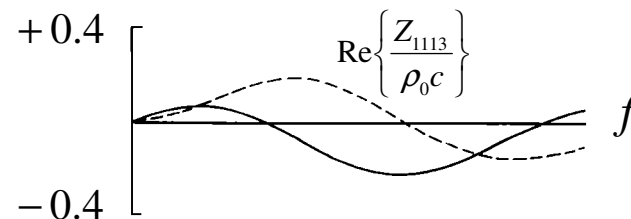
Impédance de rayonnement

Quantité complexe $Z_{mnpq}(\omega) = R_{mnpq}(\omega) + j I_{mnpq}(\omega)$

- les **termes directs** sont positifs avec une partie réelle qui tend en hautes fréquences vers l'impédance caractéristique



- les **termes croisés** oscillent autour de zéro



d'après Sandman 1975

Réponse vibratoire couplée de la plaque

Equation dynamique (*pression dans le demi espace $z>0$*)

$$D \nabla^4 w(x, y) - \omega^2 \rho h w(x, y) = F(x, y) - p(x, y, 0)$$

$$\begin{aligned} D \sum_{m,n}^{\infty} a_{mn}(\omega) \nabla^4 \phi_{mn}(x, y) - \omega^2 \rho h \sum_{m,n}^{\infty} a_{mn}(\omega) \phi_{mn}(x, y) \\ = F(x, y) - \sum_{k,l}^{\infty} \sum_{p,q}^{\infty} j\omega a_{kl}(\omega) Z_{klpq}(\omega) \phi_{pq}(x, y) \end{aligned}$$

Les déformées modales satisfont les conditions aux limites et vérifient l'équation homogène

$$D \nabla^4 \phi_{mn}(x, y) - \omega_{mn}^2 \rho h \phi_{mn}(x, y) = 0$$

 Pulsation propre du mode (m,n)

Réponse vibratoire couplée de la plaque

Equation dynamique (*pression dans le demi espace $z>0$*)

$$D \sum_{m,n}^{\infty} a_{mn}(\omega) \nabla^4 \phi_{mn}(x, y) - \omega^2 \rho h \sum_{m,n}^{\infty} a_{mn}(\omega) \phi_{mn}(x, y) \\ = F(x, y) - \sum_{k,l}^{\infty} \sum_{p,q}^{\infty} j\omega a_{kl}(\omega) Z_{klpq}(\omega) \phi_{pq}(x, y)$$

module de Young complexe avec un facteur de perte η

$$\underline{\omega}_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 (1 + j\eta) \quad \text{et} \quad \underline{D} \nabla^4 \phi_{mn}(x, y) = \omega_{mn}^2 (1 + j\eta) \rho h \phi_{mn}(x, y)$$

$$\rho h \sum_{m,n}^{\infty} a_{mn}(\omega) [\omega_{mn}^2 (1 + j\eta) - \omega^2] \phi_{mn}(x, y) \\ = F(x, y) - j\omega \sum_{l,k}^{\infty} \sum_{p,q}^{\infty} a_{kl}(\omega) Z_{lkpq}(\omega) \phi_{pq}(x, y)$$

Réponse vibratoire couplée de la plaque

En réalisant l'opération $\iint_S \phi_{rs}(x, y) \{\mathbf{Eq}\} dx dy$

orthogonalité des déplacements modaux

$$\rho h N_{rs} a_{mn}(\omega) [\omega_{rs}^2 (1 + j\eta) - \omega^2] = F_{rs}(x, y) - j\omega \sum_{m,n} a_{mn}(\omega) Z_{mnrs}(\omega) N_{rs}$$

avec la force modale généralisée appliquée au mode (r,s)

$$F_{rs} = -j\omega \iint_S F(x, y) \phi_{rs}(x, y) dx dy$$

$$\sum_{m,n} A_{mnrs} a_{mn}(\omega) = \frac{F_{rs}}{N_{rs}}$$

$$A_{mnrs} = \rho h [\omega_{rs}^2 - \omega^2 + j\eta \omega_{rs}^2] \delta_{mr} \delta_{ns} + j\omega Z_{mnrs}(\omega)$$

Réponse vibratoire couplée de la plaque

L'expression

$$\sum_{m,n} A_{mnrs} a_{mn}(\omega) = \frac{F_{rs}}{N_{rs}}$$

Peut se mettre sous forme matricielle en utilisant une base modale tronquée

indices $i \Rightarrow$ modes (r,s)

indices $j \Rightarrow$ modes (m,n)

$$[A_{ij}] | a_j | = [f_i]$$

$$A_{ij} = A_{rsmn}$$

$$a_j = a_{mn}(\omega)$$

$$f_i = \frac{F_{rs}}{N_{rs}}$$

$$A_{mnrs} = \underbrace{\rho h [\omega_{rs}^2 - \omega^2 + j\eta\omega_{rs}^2]}_{\text{éléments diagonaux}} \delta_{mr} \delta_{ns} + j\omega Z_{mnrs}(\omega)$$

éléments diagonaux

$$\mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{f}$$

Réponse vibratoire couplée de la plaque

Détermination des coefficients $a_{mn}(\omega)$ en inversant la matrice associée à la base modale tronquée

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}$$

$$w(x, y) = \sum_{m,n}^N a_{mn}(\omega) \phi_{mn}(x, y)$$

Pour les fluides légers (air), les termes non diagonaux peuvent être négligés

$$w(x, y) = \sum_{m,n}^N \frac{F_{mn}}{N_{mn} A_{mnmn}} \phi_{mn}(x, y)$$

VIBROACOUSTIQUE DES STRUCTURES PLANES

**3 - ANALYSE ET REPRESENTATION DANS LE CAS D'UNE
PLAQUE INFINIE**

4 - RAYONNEMENT D'UNE PLAQUE RECTANGULAIRE

5 - PUISSANCE ACOUSTIQUE RAYONNEE

PUISSANCE ACOUSTIQUE RAYONNEE

La puissance acoustique

$$\Pi = \int_S \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{Re}\{p u_n^*\} \, dS = \frac{\omega^2}{2} \int_S \operatorname{Re}\{Z_r\} |w|^2 \, dS$$

facteur de rayonnement

$$\sigma = \frac{\int_S \operatorname{Re}\{Z_r / \rho_0 c\} |w|^2 \, dS}{\int_S |w|^2 \, dS}$$

$$\sigma = \frac{\Pi}{\frac{\rho_0 c \omega^2}{2} \int_S |w|^2 \, dS}$$

Essentiellement deux approches :

- calculer la pression pariétale en utilisant l'impédance modale de rayonnement (*méthode du **champ proche***)
- calculer la pression par l'intégrale de Rayleigh en ***champ lointain***

Puissance rayonnée par une plaque finie

méthode du *champ lointain*

Intensité radiale sur un hémisphère de rayon infini

$$I_r(R, \theta, \phi) \approx \frac{|p(R, \theta, \phi)|^2}{2\rho_0 c}$$

conduit à la puissance acoustique rayonnée

$$\Pi(\omega) = \frac{\rho_0 \omega^4}{8c\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} |W(k_x, k_y)|^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$k_x = k_0 \sin \theta \cos \phi$$

$$k_y = k_0 \sin \theta \sin \phi$$

Inconvénient: calcul long avec les expressions analytiques de

$$W(k_x, k_y) = \sum_{m,n} a_{mn}(\omega) \Phi_{mn}(k_x, k_y)$$

Autres solutions : calcul purement numérique en réalisant la transformée de Fourier du champ vibratoire (Williams)

Puissance rayonnée par une plaque finie

méthode du *champ proche*

Milieu 2

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_s \operatorname{Re} \{ p(x, y, 0) u_z^*(x, y, 0) \} dx dy$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\omega^2}{2} \iint_s \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m,n}^{\infty} \sum_{p,q}^{\infty} a_{mn}(\omega) Z_{mnpq}(\omega) \phi_{pq}(x, y) \sum_{r,s}^{\infty} a_{rs}^*(\omega) \phi_{rs}(x, y) \right\} dx dy \\ &= \frac{\omega^2}{2} \sum_{m,n}^{\infty} \sum_{p,q}^{\infty} \sum_{r,s}^{\infty} \operatorname{Re} \{ a_{mn}(\omega) Z_{mnpq}(\omega) a_{rs}^*(\omega) \} \underbrace{\iint_s \phi_{pq}(x, y) \phi_{rs}(x, y) dx dy} \end{aligned}$$

Relation d'orthogonalité $(r, s) = (p, q) \Rightarrow \iint_s \phi_{pq}^2(x, y) dx dy = N_{pq}$

$$\Pi = \frac{\omega^2}{2} \sum_{m,n}^{\infty} \sum_{p,q}^{\infty} \operatorname{Re} \{ a_{mn}(\omega) Z_{mnpq}(\omega) a_{pq}^*(\omega) \} N_{pq}$$

Puissance rayonnée par une plaque finie

fluide léger : seuls les termes diagonaux de $Z_{mnpq}(\omega)$ sont conservés

$$\Pi = \frac{\omega^2}{2} \sum_{m,n} |a_{mn}(\omega)|^2 \operatorname{Re}\{Z_{mnmn}(\omega)\} N_{mn}$$

Facteur de rayonnement

$$\sigma = \frac{\Pi}{\frac{\rho_0 c \omega^2}{2} \iint_S |w(x, y)|^2 dx dy} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{mn} = \frac{\frac{\omega^2}{2} |a_{mn}(\omega)|^2 \operatorname{Re}\{Z_{mnmn}(\omega)\} N_{mn}}{\frac{\rho_0 c \omega^2}{2} |a_{mn}(\omega)|^2 N_{mn}} \\ = \frac{\operatorname{Re}\{Z_{mnmn}(\omega)\}}{\rho_0 c} \end{array} \right.$$

$$\iint_S |w(x, y)|^2 dx dy = \sum_{r,s} |a_{rs}(\omega)|^2 N_{rs}$$

Facteur de rayonnement modal

Wallace (1972) obtient une expression du **facteur de rayonnement** pour les modes (p, q) à partir d'une expression analytique de la **pression en champ lointain**

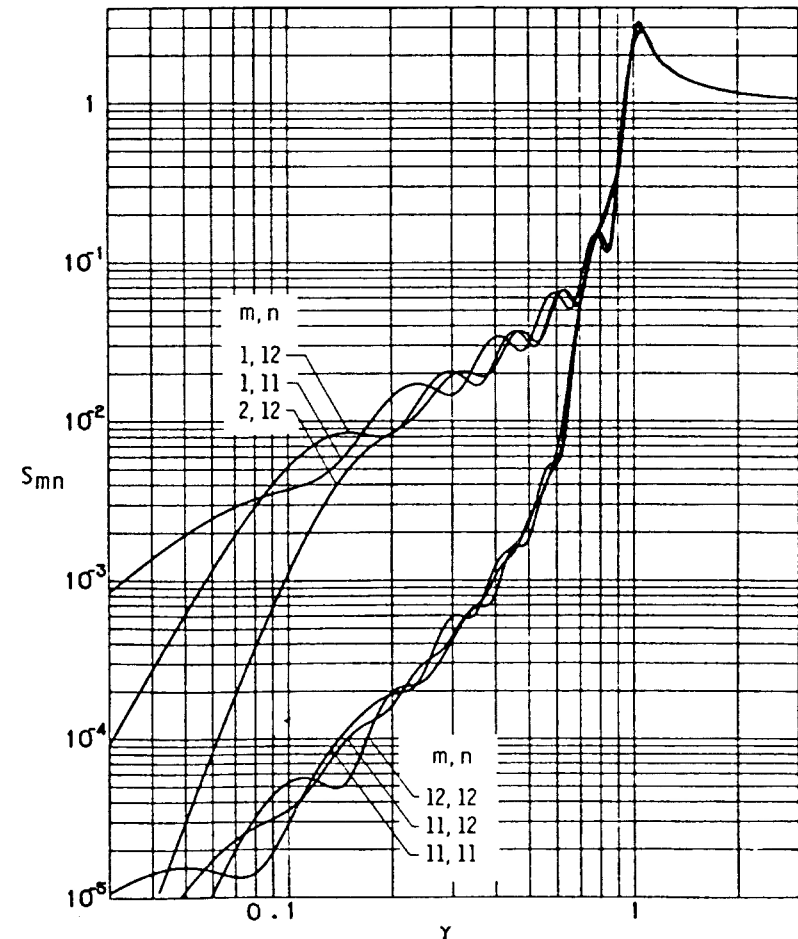
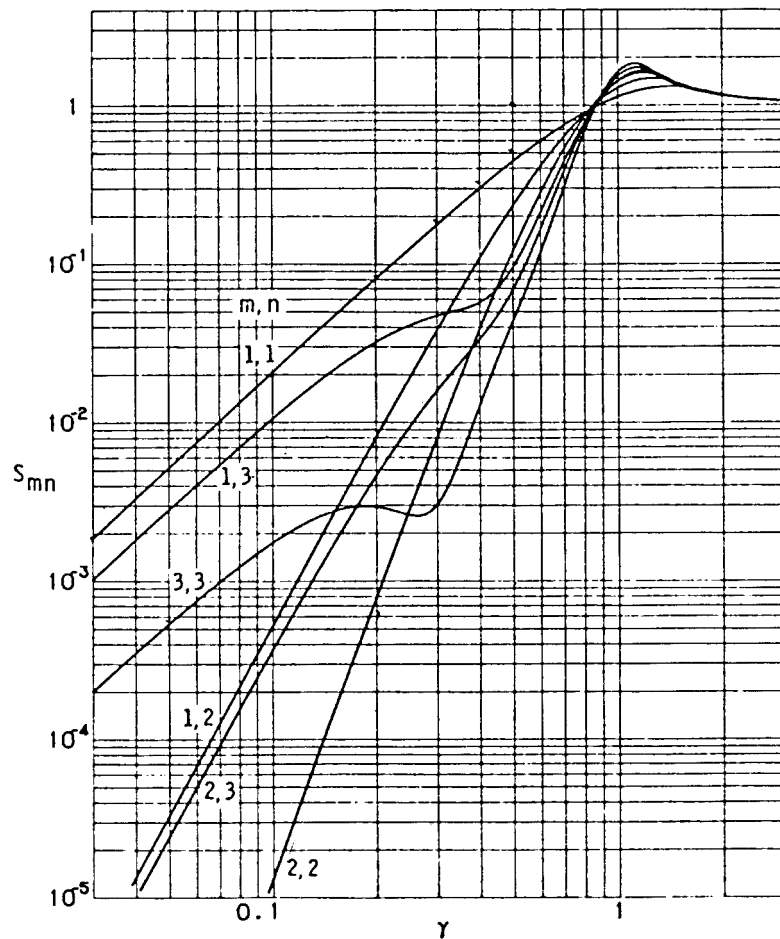
$$p(r, \theta, \phi) = \frac{-\omega^2 \rho_0 a_{pq}}{2\pi} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{\sin(p\pi x/L_x) \sin(q\pi y/L_y) e^{-jkR}}{R} dx dy$$

pour une plaque rectangulaire simplement supportée

$$w_{pq}(x, y) = a_{pq} \sin(p\pi x/L_x) \sin(q\pi y/L_y)$$

Facteur de rayonnement modal

plaque rectangulaire simplement supportée



Wallace (1972)

Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire

Sans introduire tout de suite la notion de mode (*th. Parseval*)

$$\frac{1}{2} \iint_s \operatorname{Re}\{p(x, y, 0) u_z^*(x, y, 0)\} dx dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}\{P(k_x, k_y, 0) U_z^*(k_x, k_y, 0)\} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi}$$

En exprimant $P(k_x, k_y, 0)$ et $U_z^*(k_x, k_y, 0)$

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\omega^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\rho_0 c k W(k_x, k_y) W^*(k_x, k_y)}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} \right\} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \\ &= \frac{\rho_0 c \omega^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{k |W(k_x, k_y)|^2}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} \right\} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \end{aligned}$$

Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire

quatre bords simplement supportés $\phi_{pq}(x, y) = \phi_p(x)\phi_q(y)$

$$\phi_{pq}(x, y) = \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right)$$

Simplification : la dimension y est supposée infinie

$$\Pi = \frac{\rho_0 c \omega^2 |a_p(\omega)|^2}{2} \int_{-k}^{+k} \frac{k \Phi_p^2(k_x, k_y)}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} \frac{dk_x}{2\pi}$$

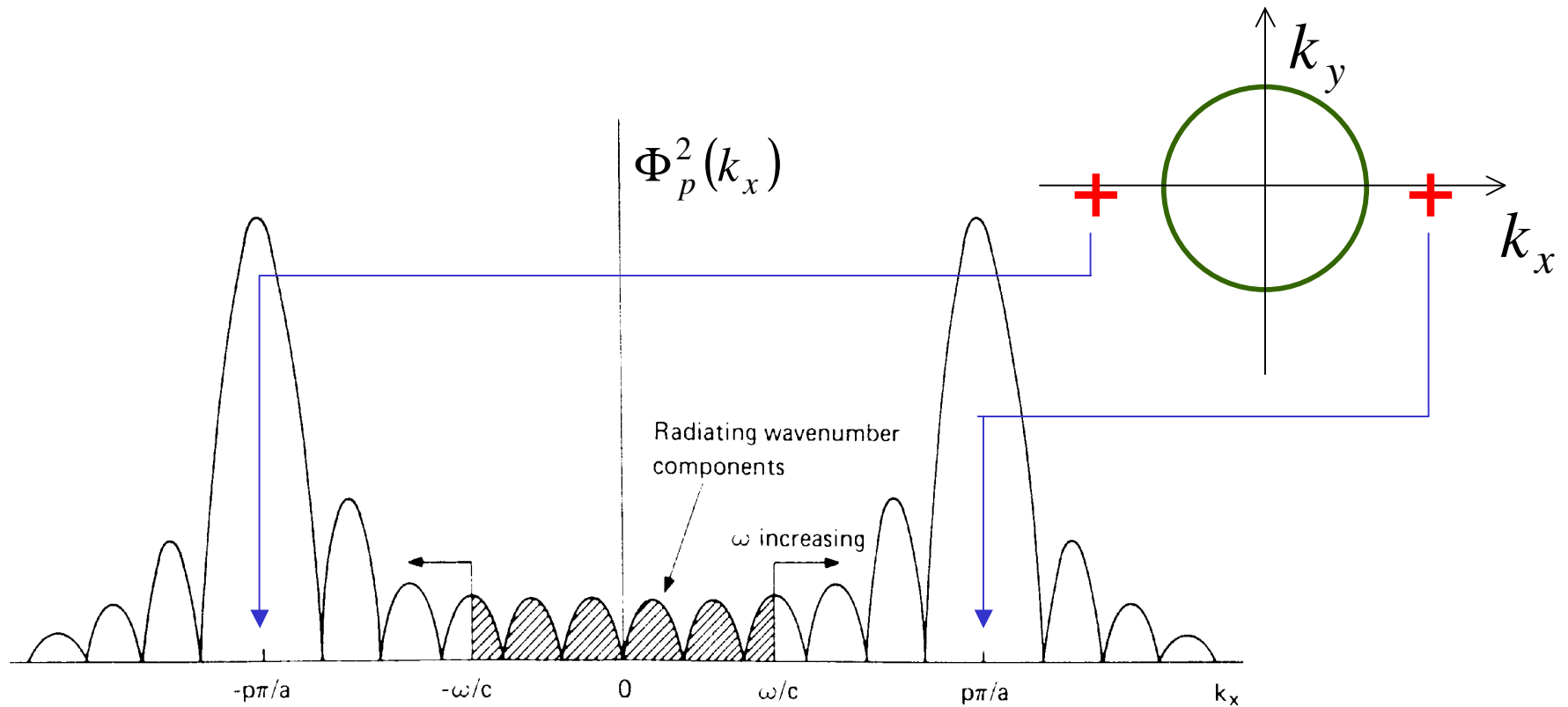
$$TF\{ \phi_p(x) = \sin(p\pi x/a) \} \Rightarrow \Phi_p^2(k_x) = (\pi p a)^2 \left[\frac{\sin(k_x a - p\pi)/2}{(k_x a - p\pi)/2} \right]^2$$

Puissance rayonnée par une plaque

quatre bords simplement supportés

$$\Pi = \frac{\rho_0 c \omega^2 |a_p(\omega)|^2}{2} \int_{-k}^{+k} \frac{k \Phi_p^2(k_x, k_y)}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} \frac{dk_x}{2\pi}$$

$$\Phi_p^2(k_x) = (\pi p a)^2 \left[\frac{\sin(k_x a - p\pi)/2}{(k_x a - p\pi)/2} \right]^2$$

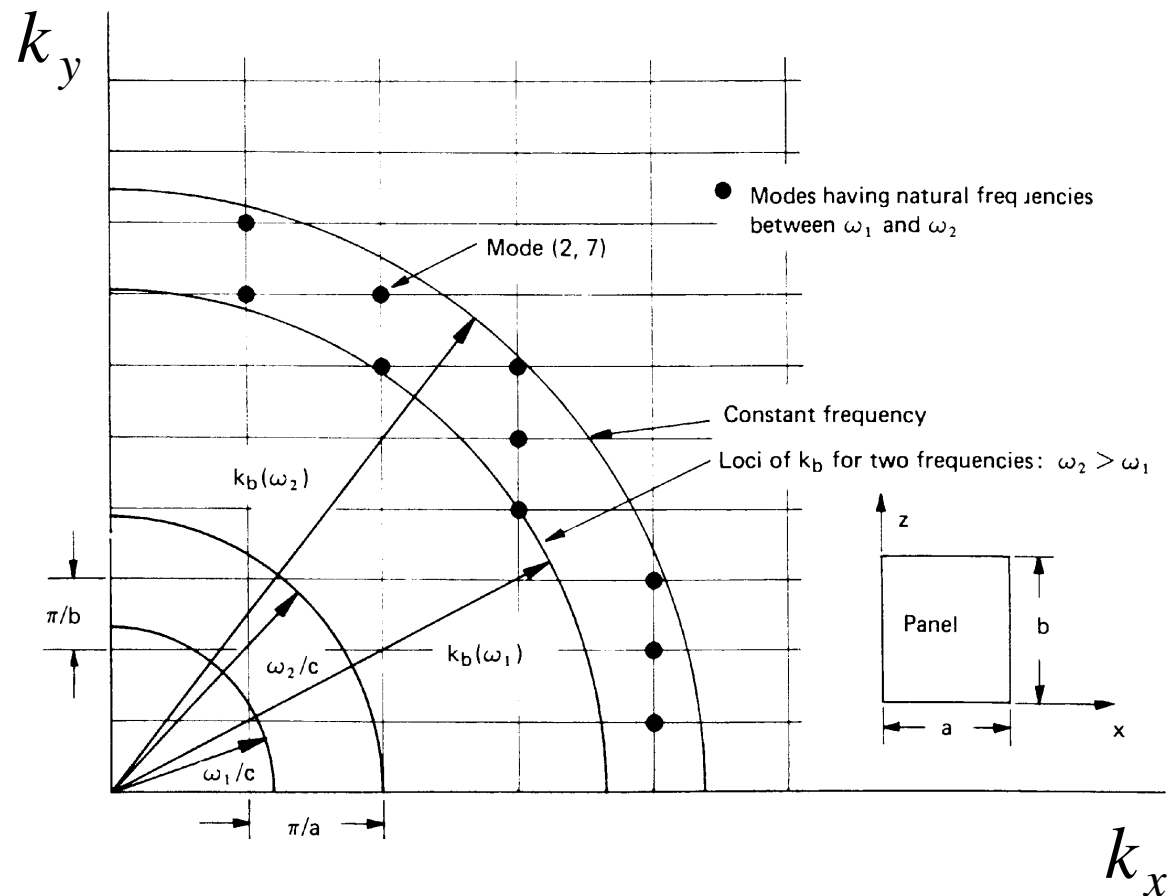


Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire

quatre bords simplement supportés

valeurs maximales du spectre quadratique de nombre d'onde

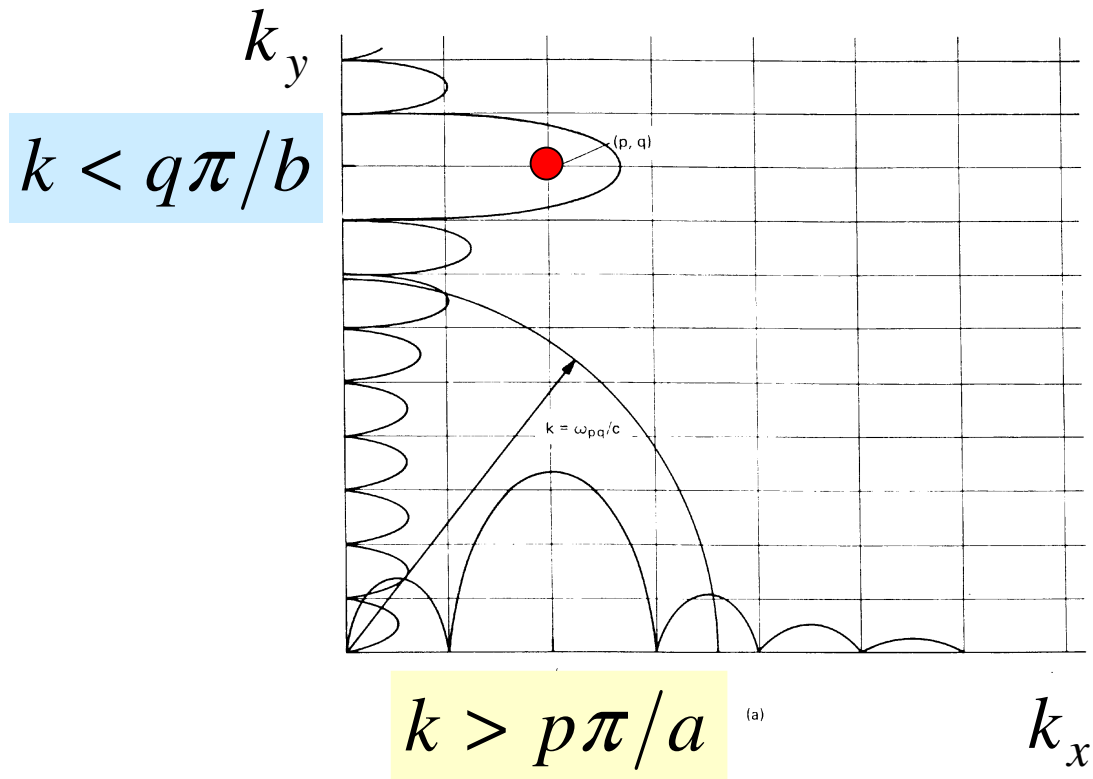
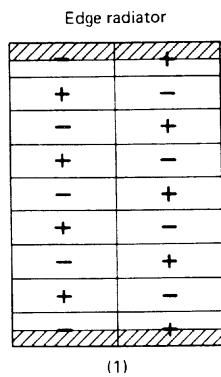
$$k_x = \pm p\pi/a$$
$$k_y = \pm q\pi/b$$



Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire

quatre bords simplement supportés

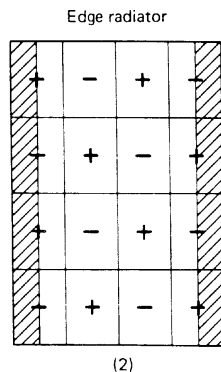
Mode de bord



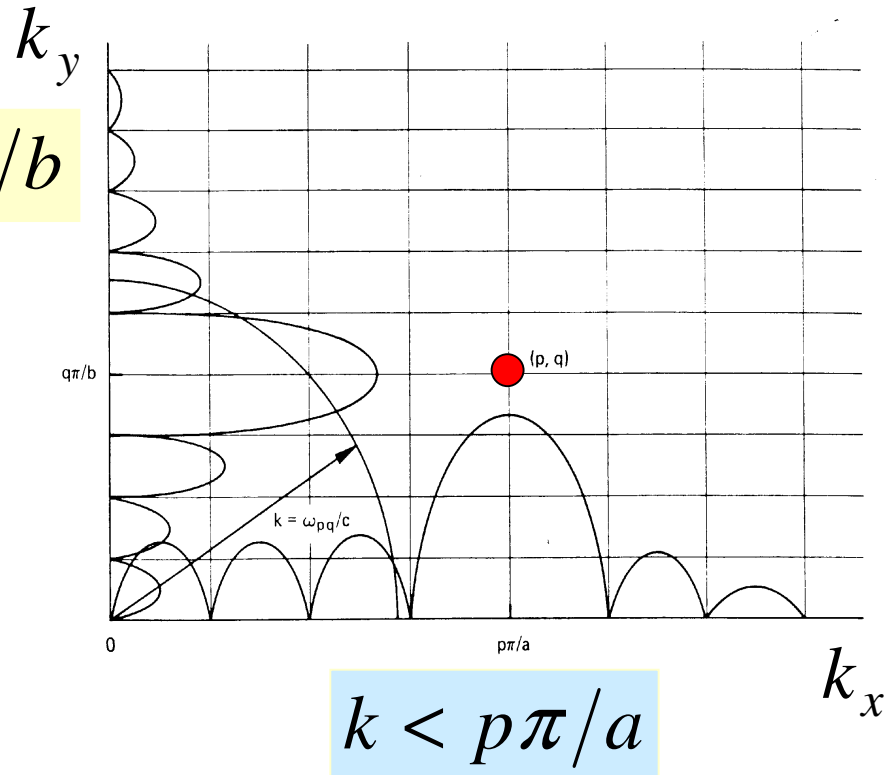
Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire

quatre bords simplement supportés

Mode de bord



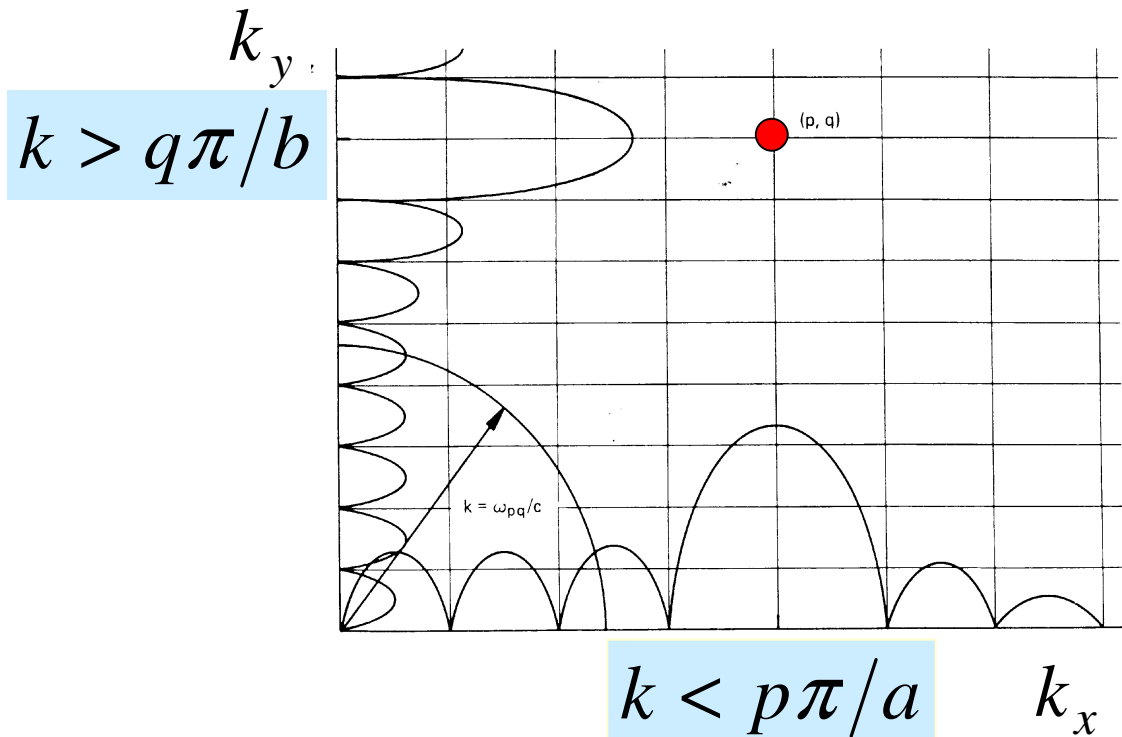
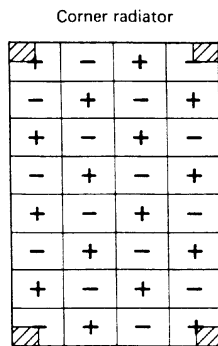
$$k > q\pi/b$$



Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire

quatre bords simplement supportés

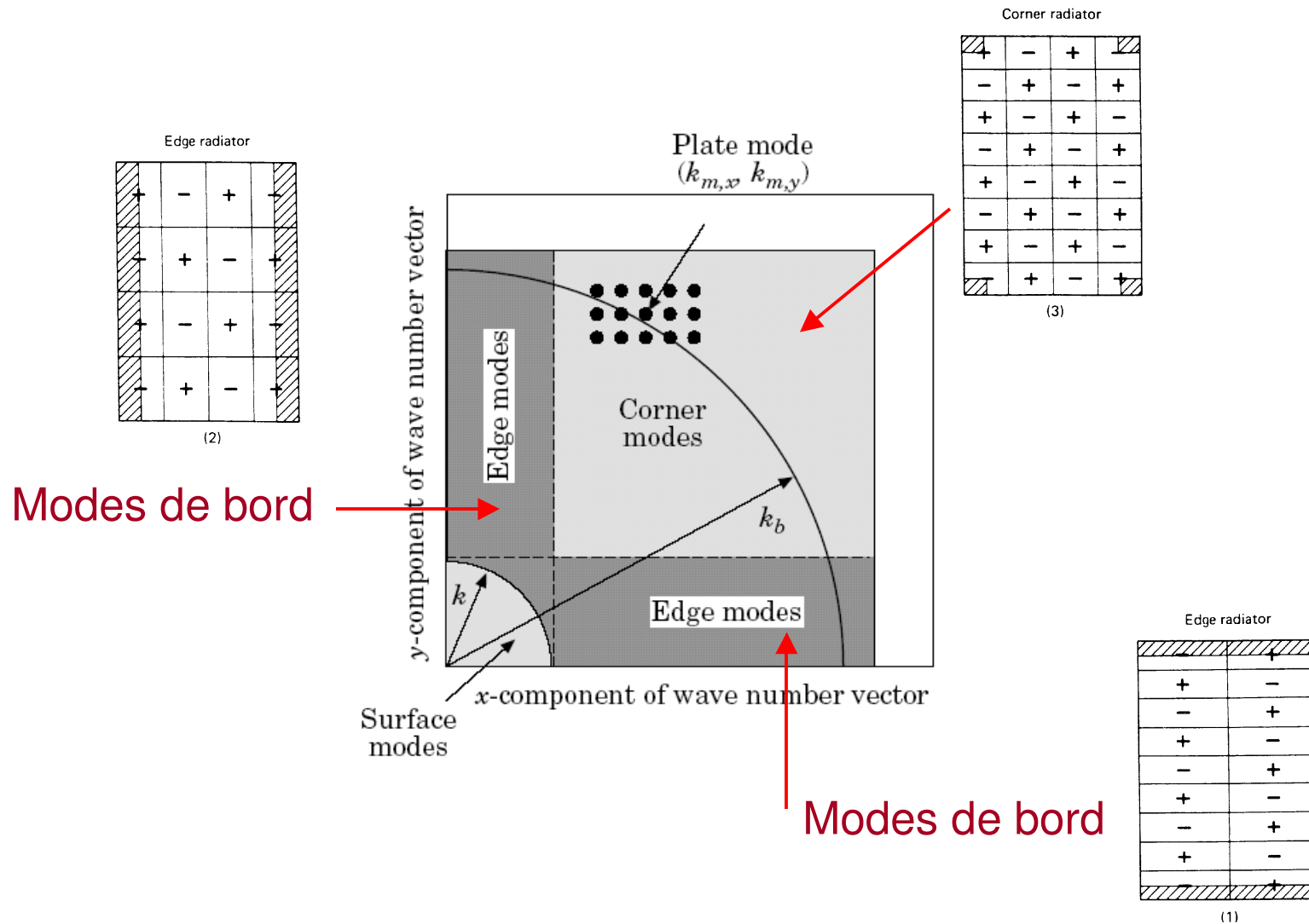
Mode de coin



Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire

quatre bords simplement supportés

Modes de coin



Facteur de rayonnement approché pour une plaque rectangulaire

Formule de Mainanik

$$\sigma = \begin{cases} 2r(\lambda_c/a)^2 g_1(\alpha) + 2(1+r)(\lambda_c/a) g_2(\alpha), & f < f_c \\ \sqrt{a/\lambda_c} (1 + 1/\sqrt{r}), & f \approx f_c \\ (1 - f_c/f)^{-1/2}, & f > f_c \end{cases}$$

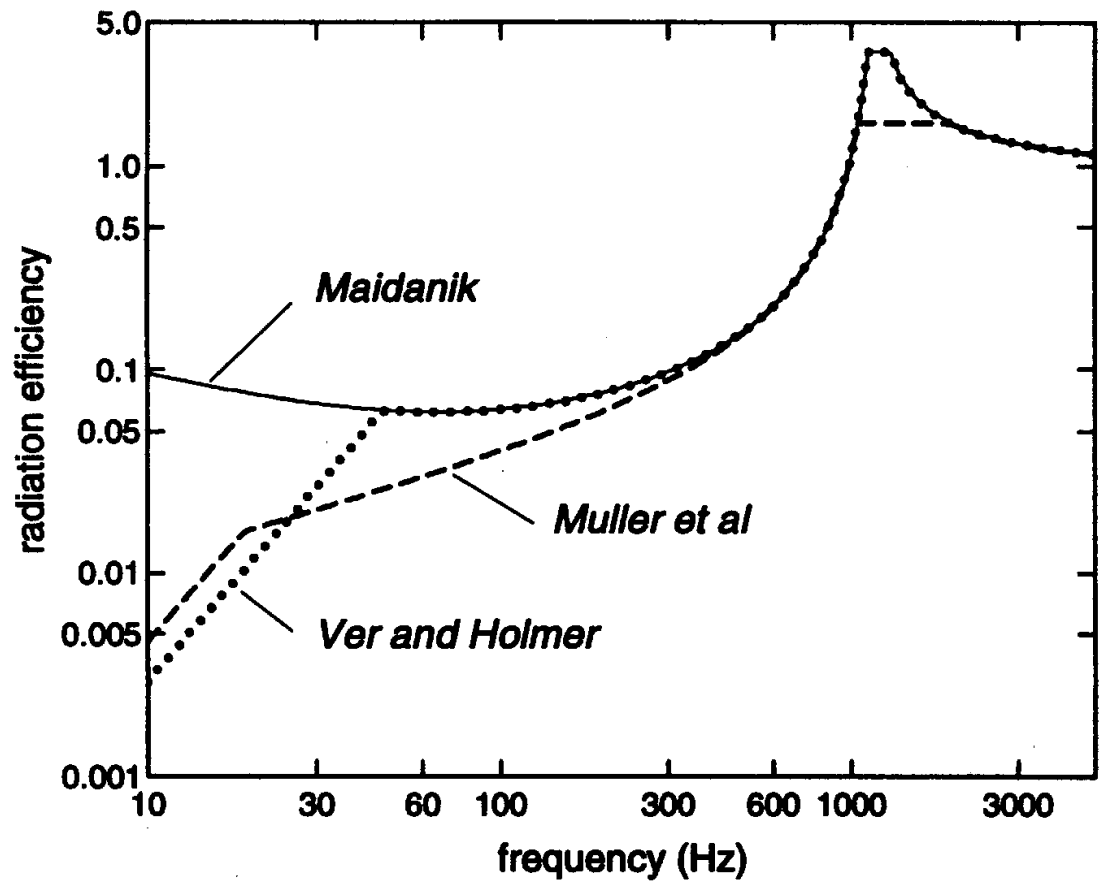
$$r = a/b \quad \lambda_c = c/f_c \quad f_c = (c^2/2\pi)\sqrt{\rho h/D}$$

$$g_1(\alpha) = \begin{cases} \frac{4}{\pi^4} \frac{1-2\alpha^2}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} & f < 0.5f_c \\ 0 & f > 0.5f_c \end{cases} \quad g_2(\alpha) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{(1-\alpha^2)\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + 2\alpha}{(1-\alpha^2)^{3/2}}$$

$$\alpha = \sqrt{f/f_c}$$

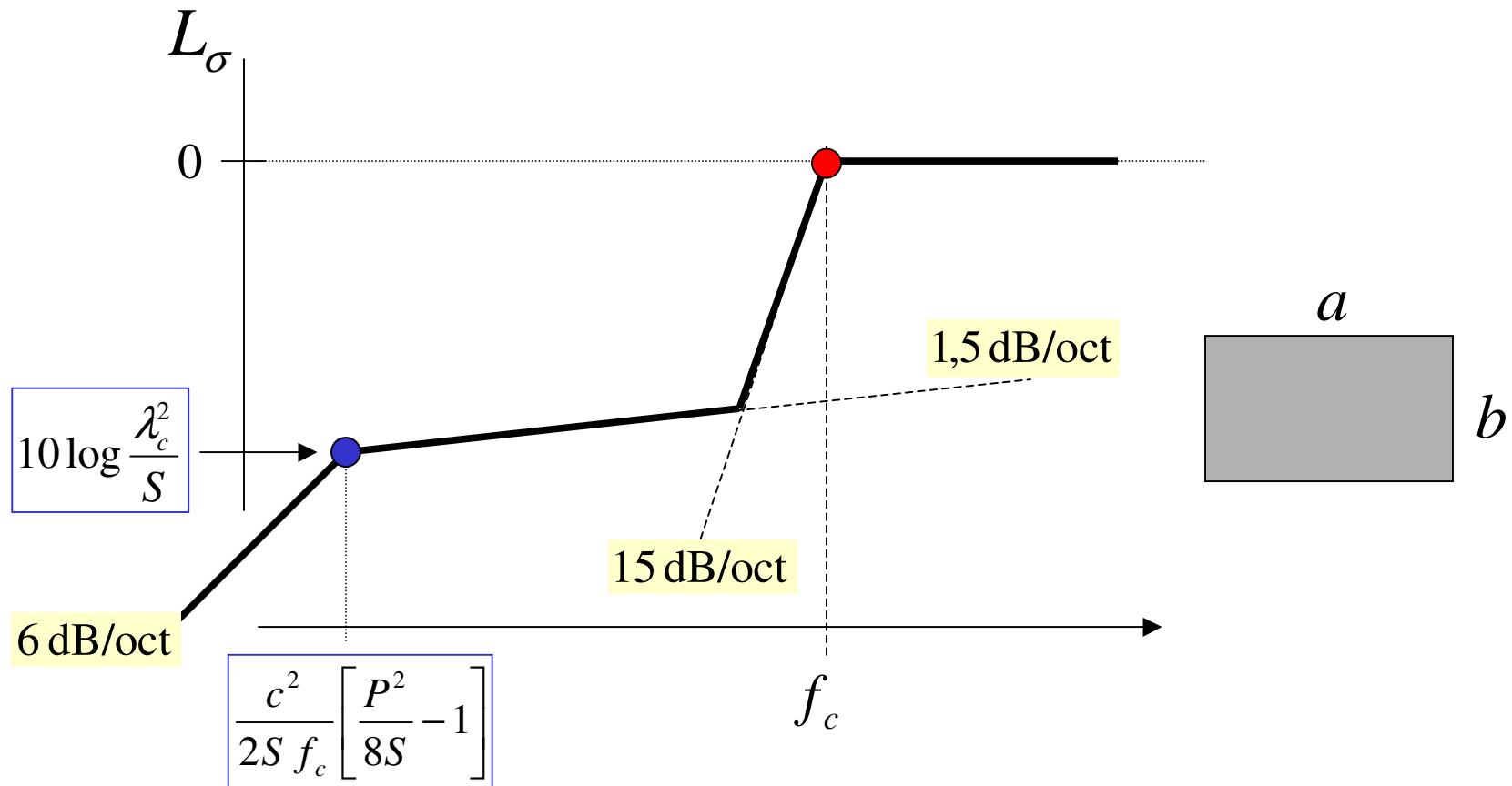
Facteur de rayonnement approché pour une plaque rectangulaire

Formule de Mainanik



Méthode simplifiée de Müller et al

Facteur de rayonnement pour une plaque finie



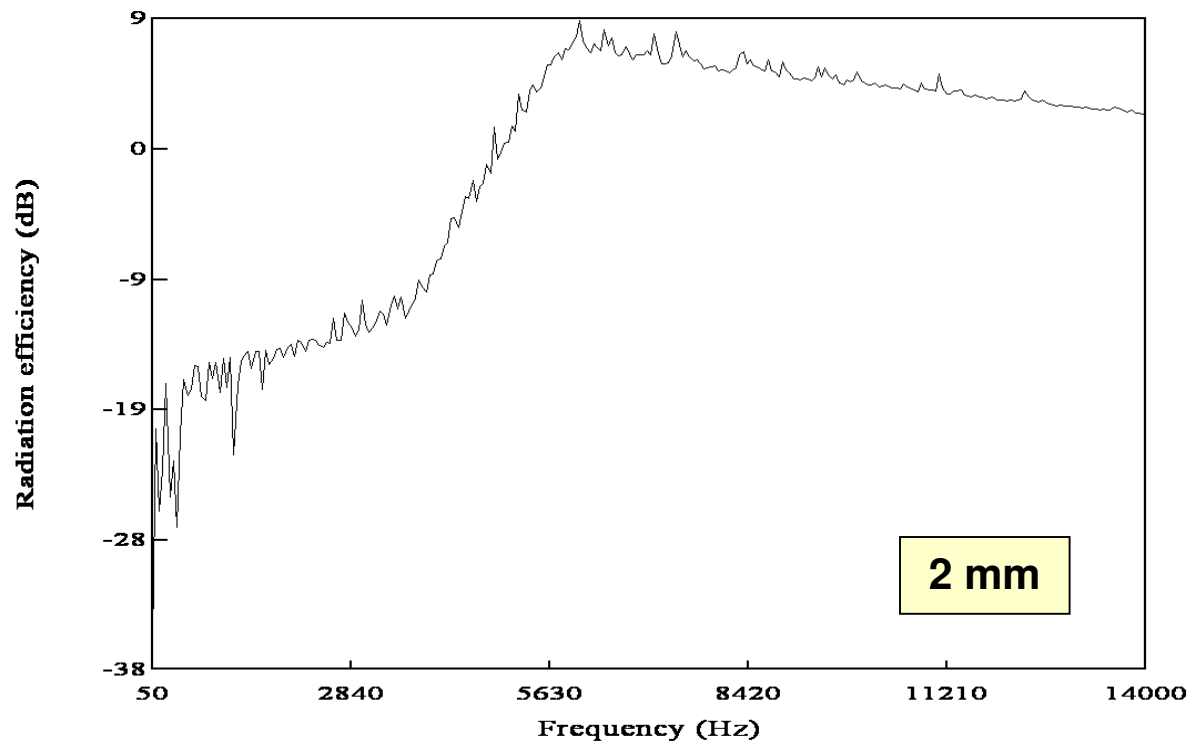
$$\lambda_c = \frac{c}{f_c} \quad f_c = \frac{c^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad P = 2(a + b) \quad S = a b$$

Méthode modale – logiciel ADNR du GAUS

Facteur de rayonnement pour une plaque finie

en acier de 1 m x 0.8 m (amortissement 0.2%), force en 0.35 m x 0.35 m

Expansion modale de 50



Müller fréquence critique : 5605 Hz

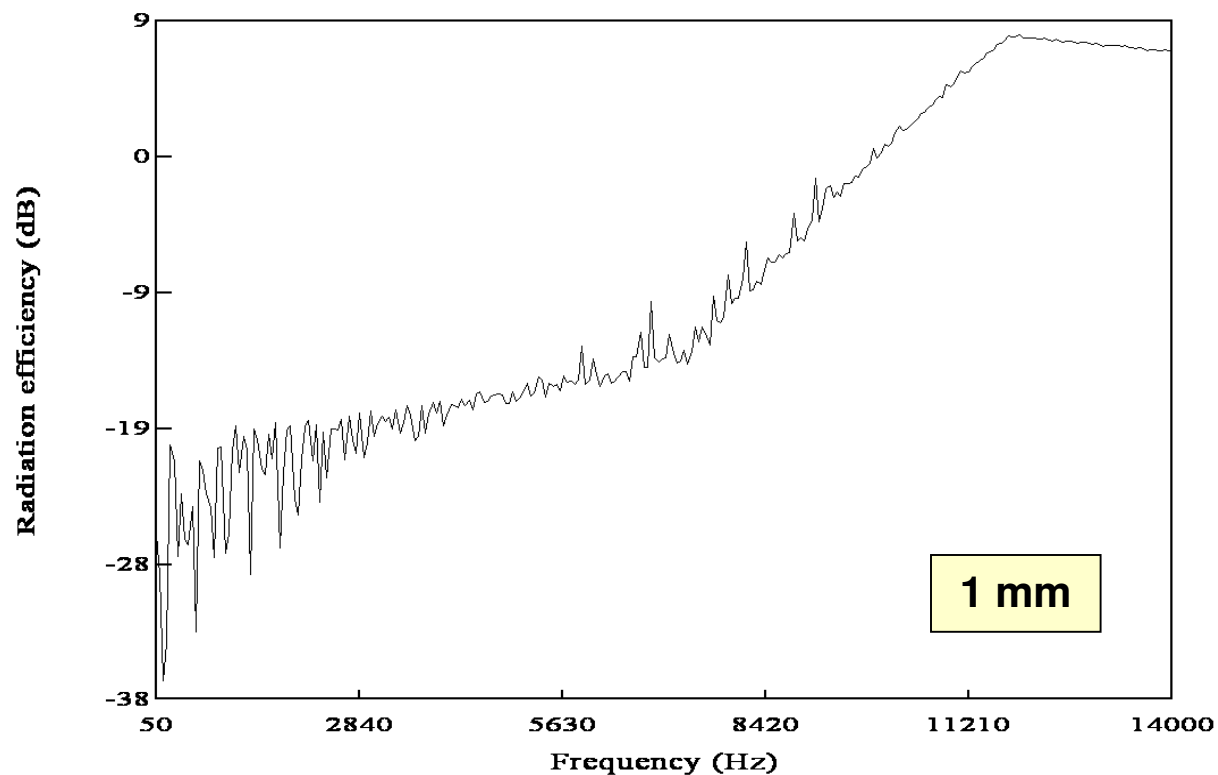
fréquence 1 : 12.5 Hz - L1 = -11.3 dB

Méthode modale – logiciel ADNR du GAUS

Facteur de rayonnement pour une plaque finie

en acier de 1 m x 0.8 m (amortissement 0.2%), force en 0.35 m x 0.35 m

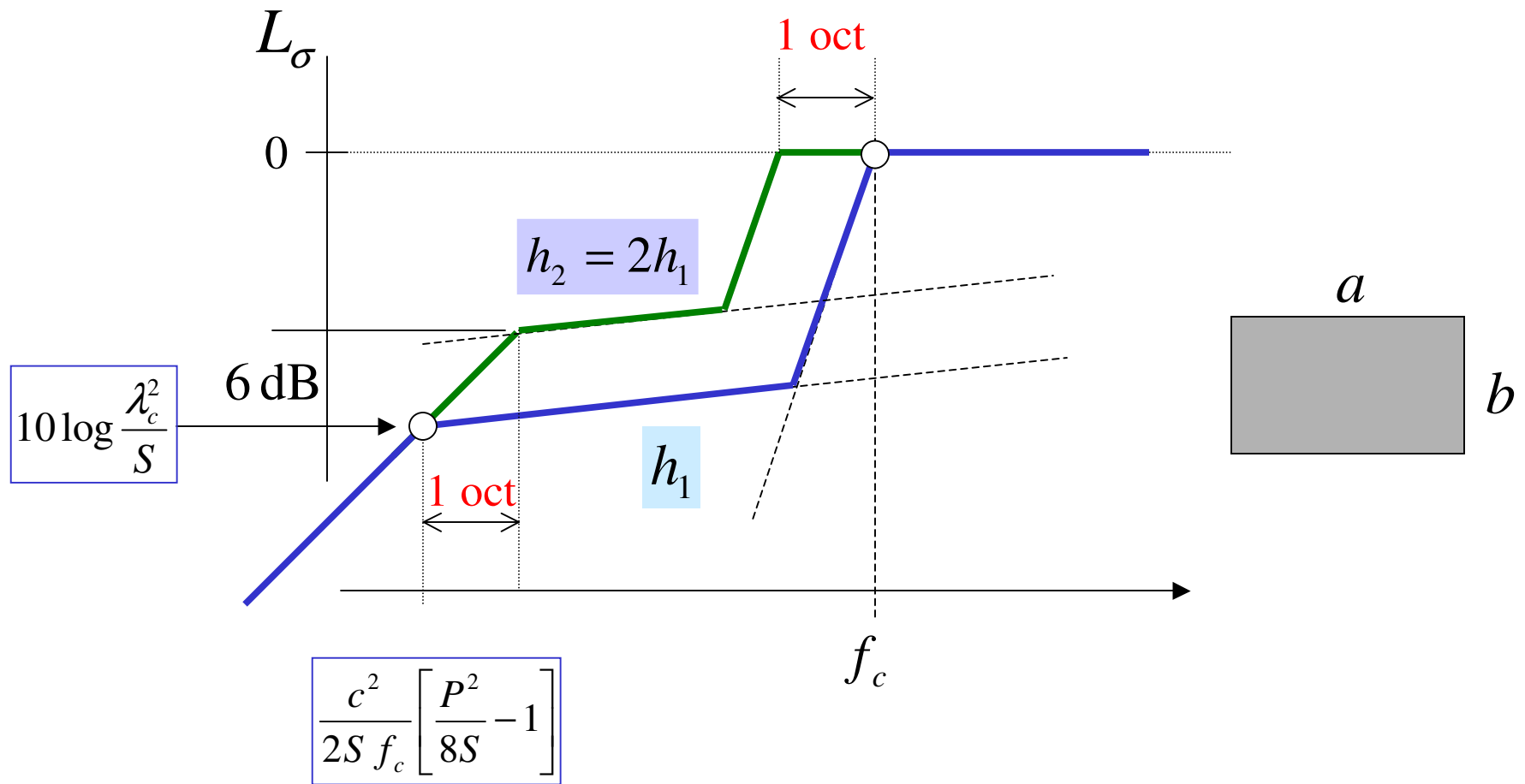
Expansion modale de 50



Müller fréquence critique : 11209 Hz

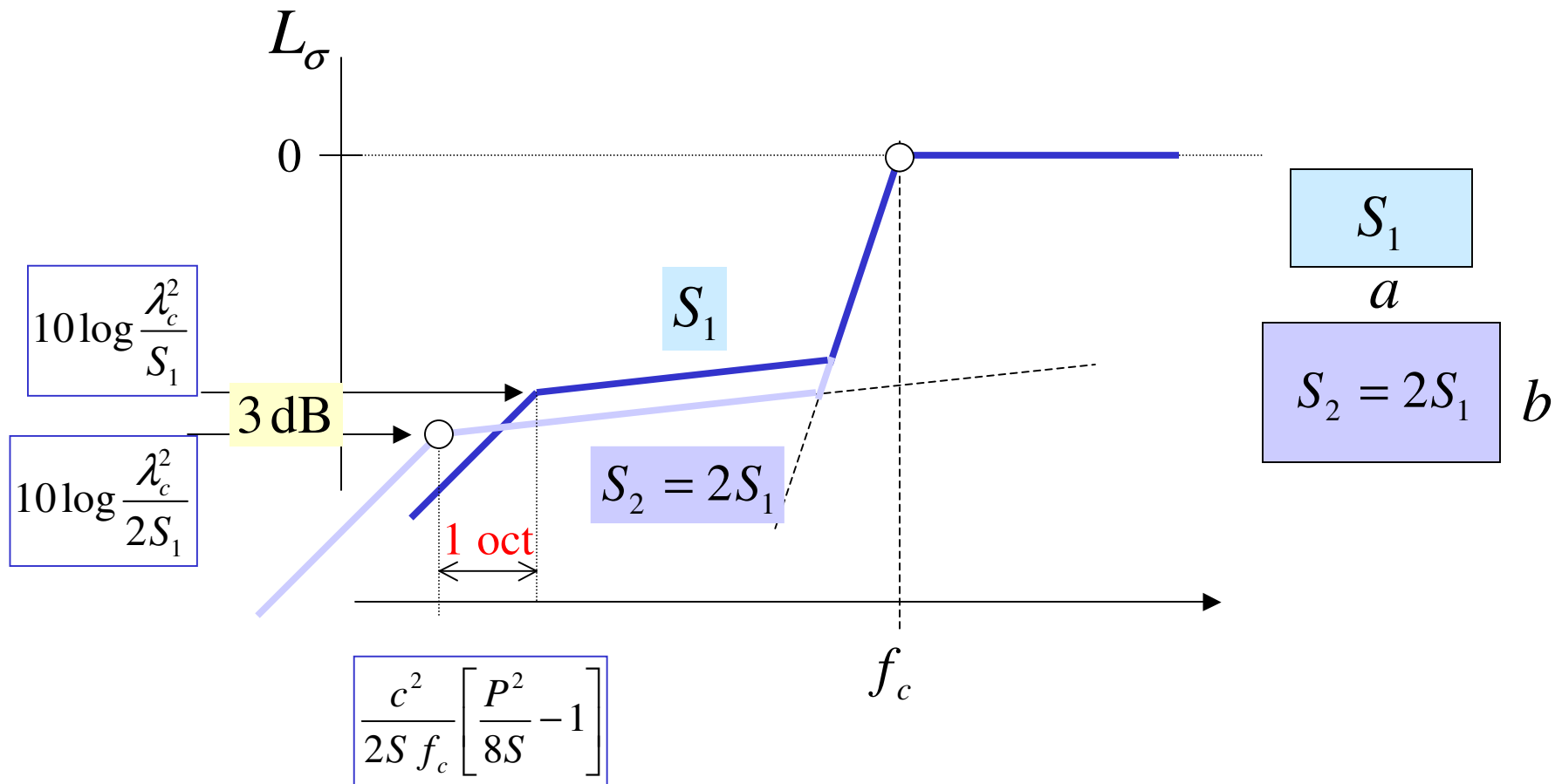
fréquence 1 : 6.3 Hz - L1 = -14.3 dB

Facteur de rayonnement pour une plaque finie



Influence de l'épaisseur $h_2 = 2h_1$

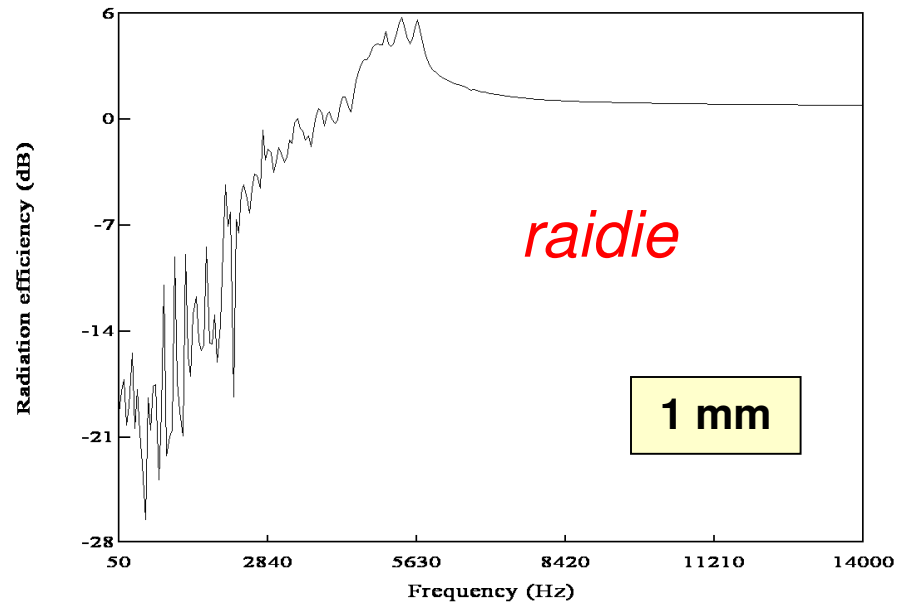
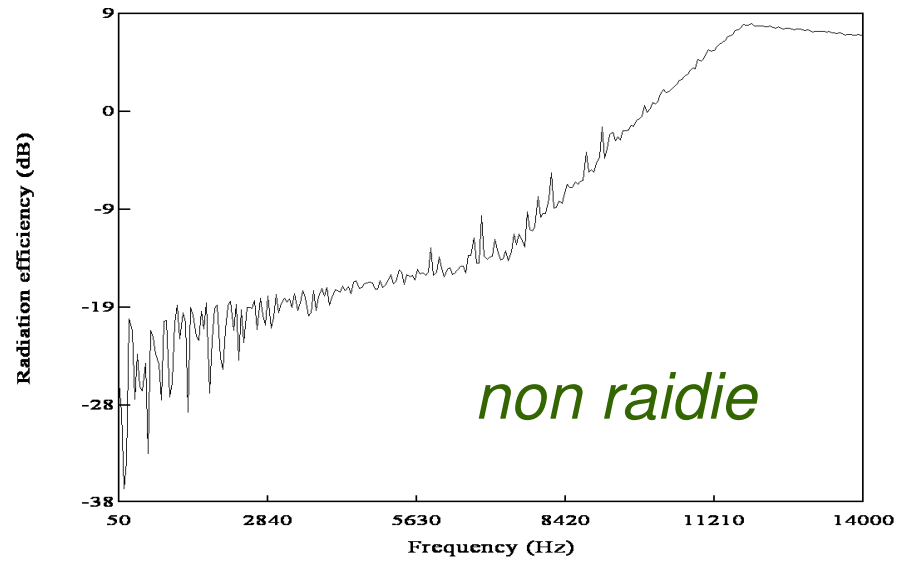
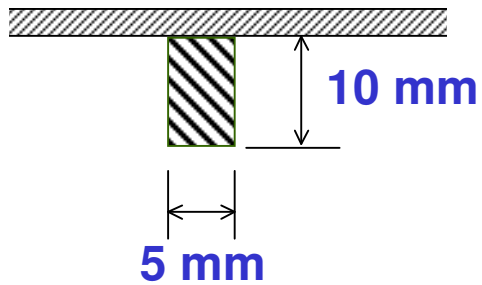
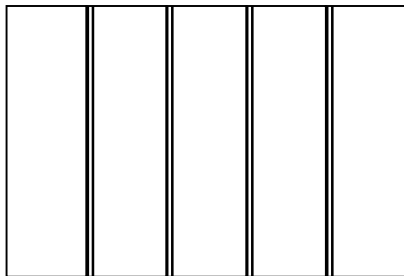
Facteur de rayonnement pour une plaque finie



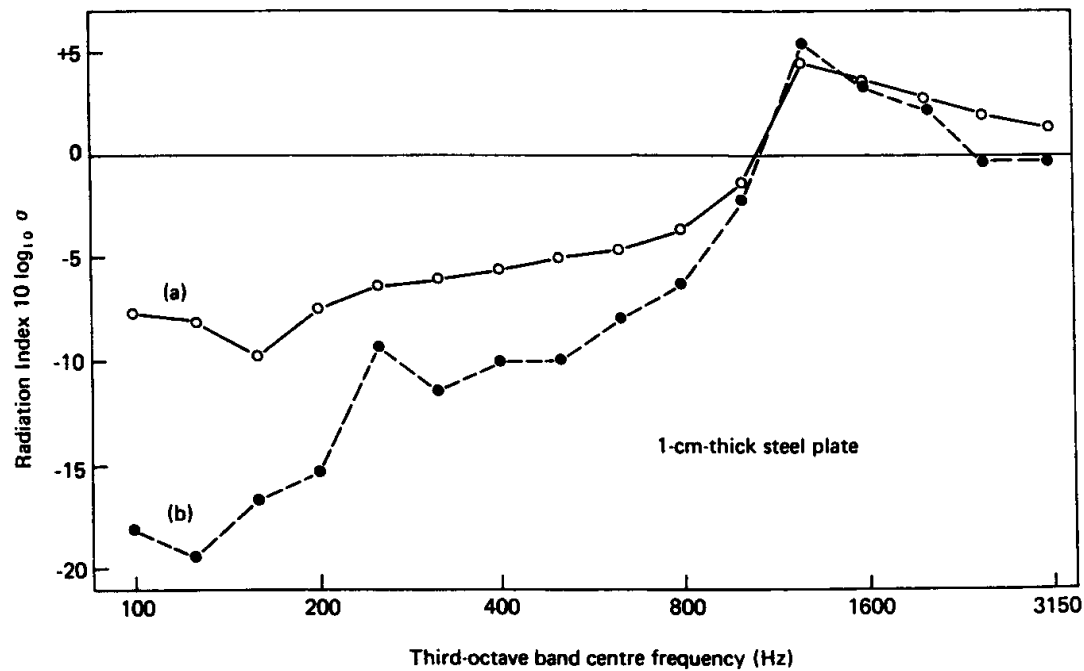
Influence de la surface $S_2 = 2S_1$

Facteur de rayonnement pour une plaque raidie

acier de 1 m x 0.8 m
(amortissement 0.2%),

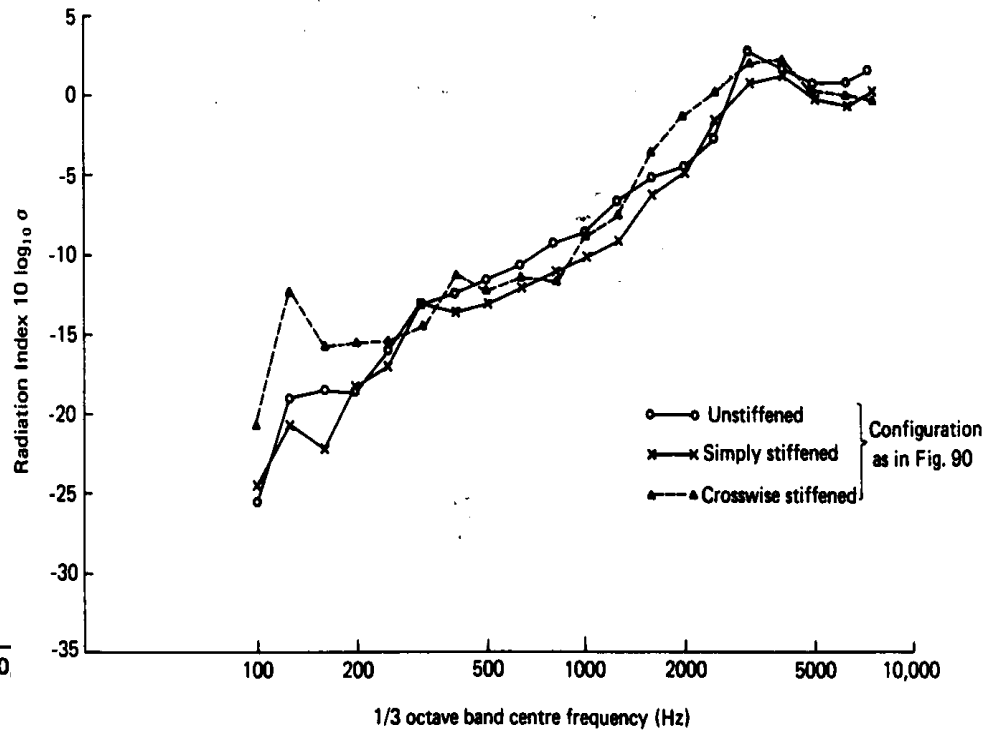
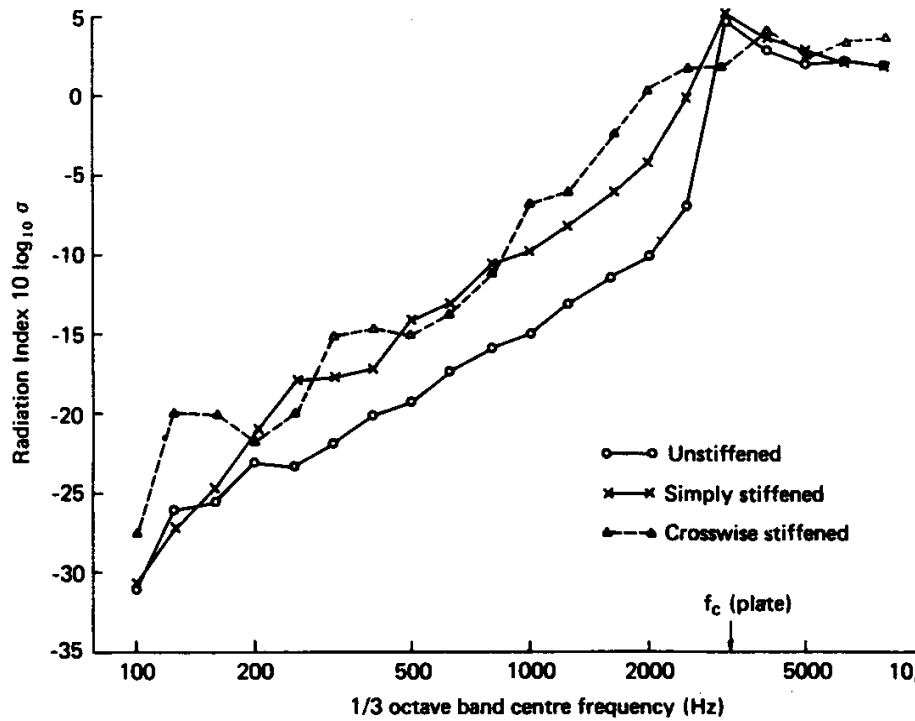


Facteur de rayonnement excitation mécaniques / excitation acoustique



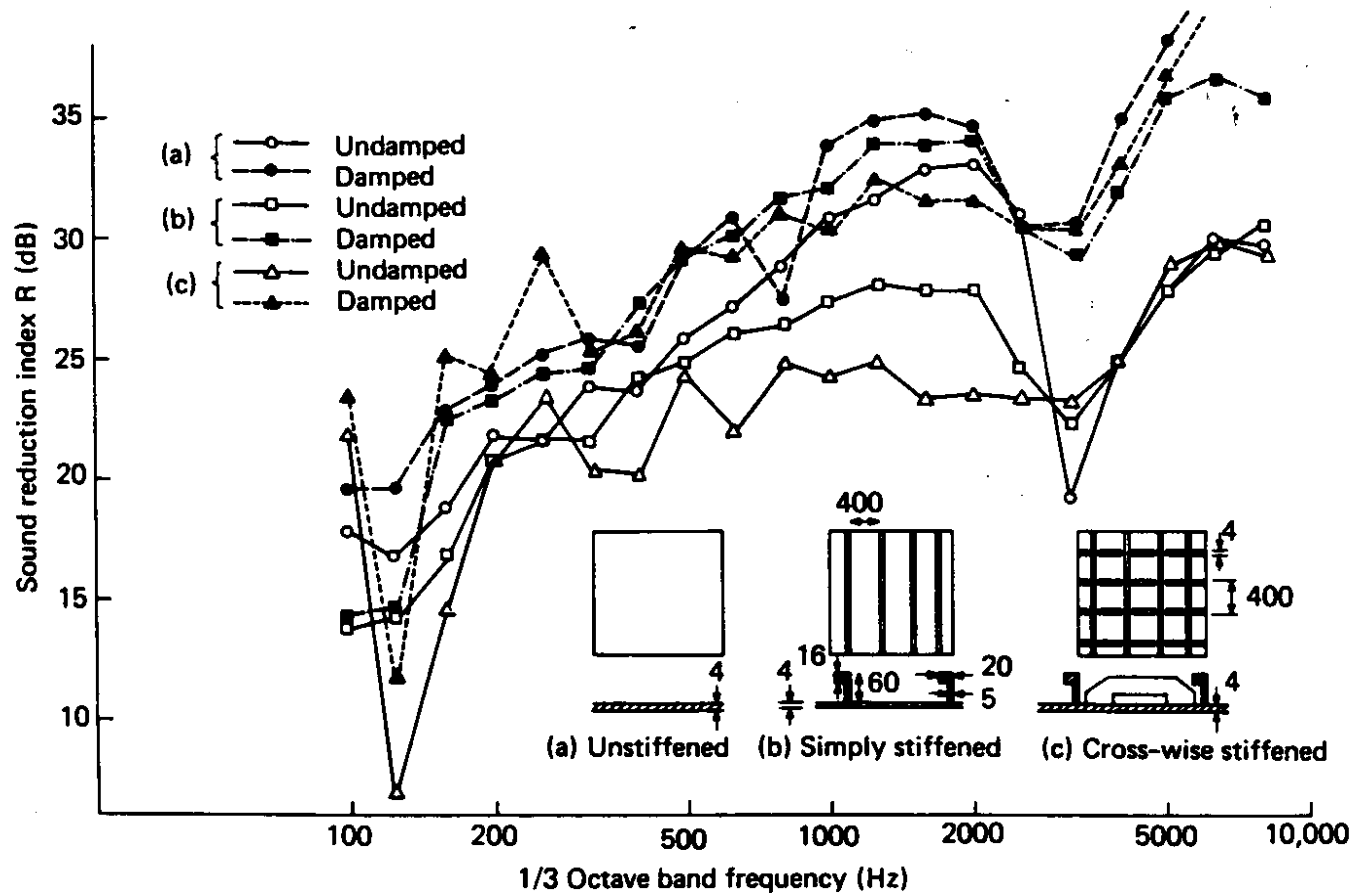
(d'après Macadam, 1976)

Facteur de rayonnement excitation mécaniques / excitation acoustique



(d'après von Venzke)

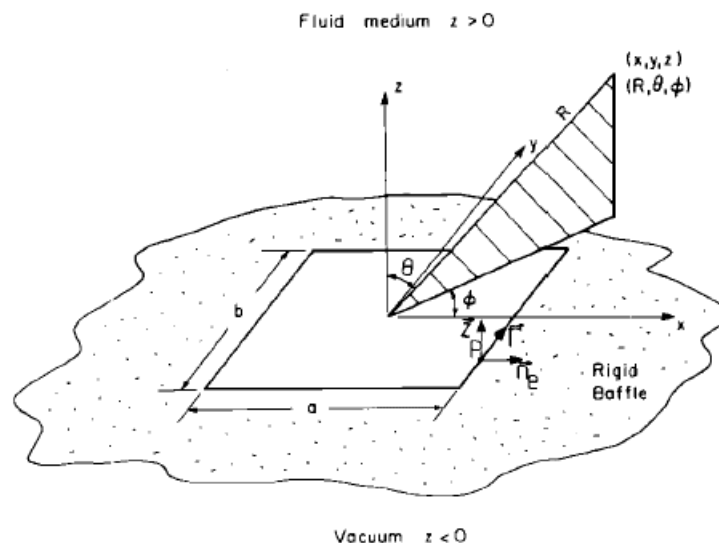
Indice d'affaiblissement des plaques raidies



Méthode modale

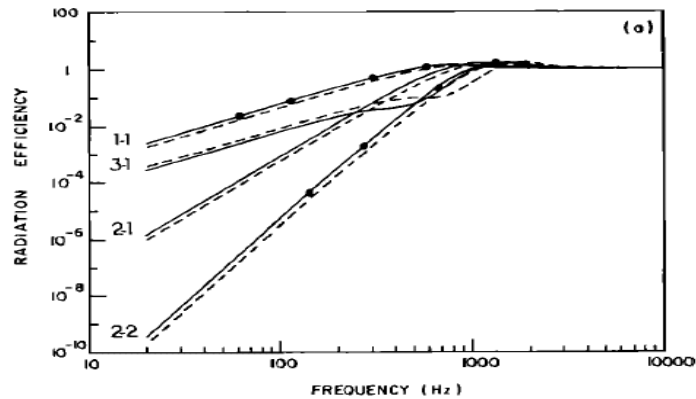
Plaque bafflée avec des conditions aux limites arbitraires

(méthode variationnelle et méthode de Rayleigh-Ritz,
Degeorges 1988, Berry et al 1990)

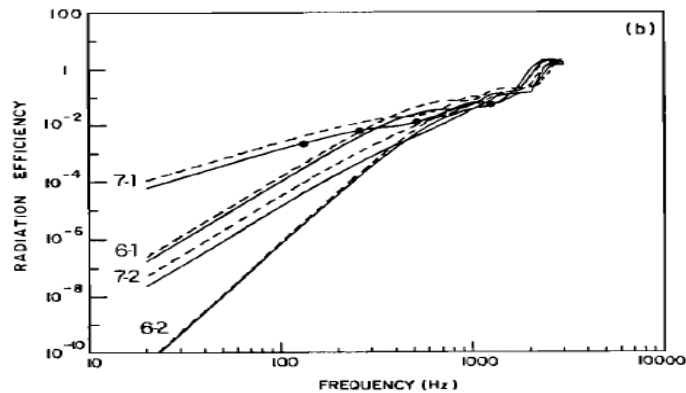


Influence des conditions aux limites

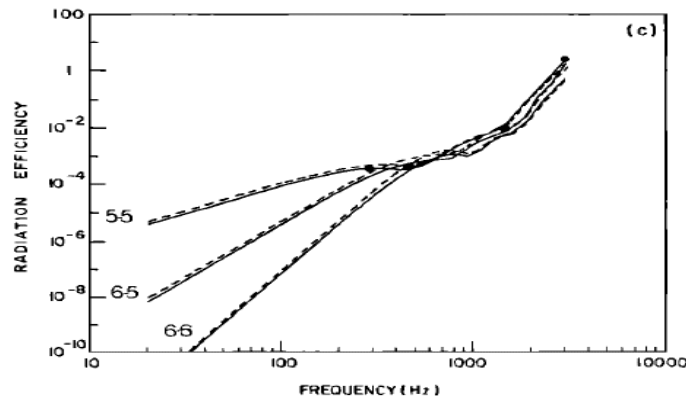
résultats par mode



--- encastrée
— simplement supportée



acier
0.55 m x 0.45 m
($r = 1.2$),
épaisseur 1 mm,
fréquence critique 12 kHz



Le facteur de rayonnement d'une plaque encastrée est pratiquement le **double** de celui d'une plaque simplement supportée

Berry, Guyader, Nicolas, JASA 1990

Influence des conditions aux limites

résultats globaux

acier

0.55 m x 0.45 m

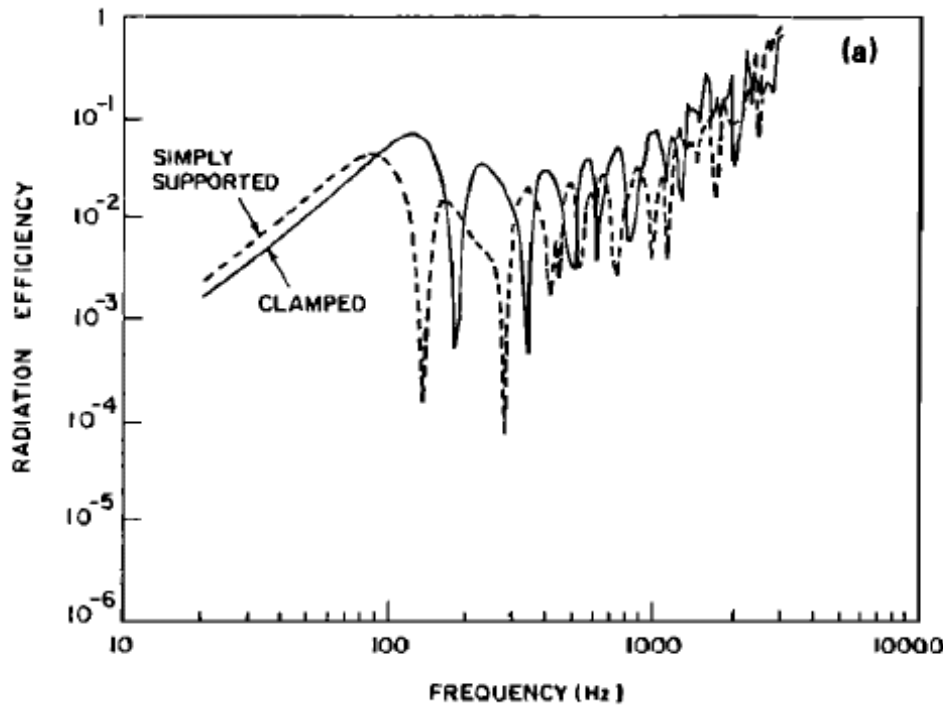
($r = 1.2$),

épaisseur 1 mm,

fréquence critique 12 kHz

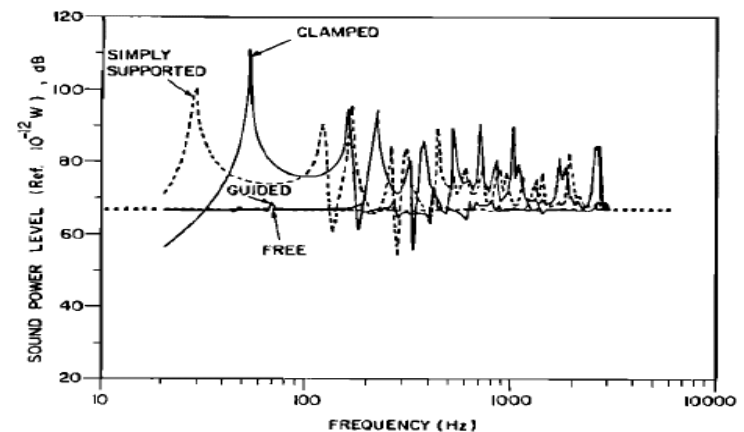
amortissement 1%

Force ponctuelle au centre



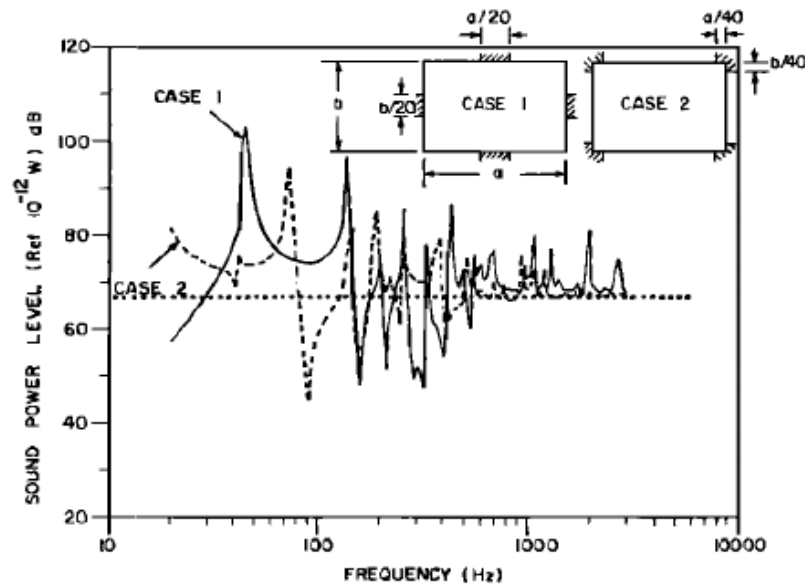
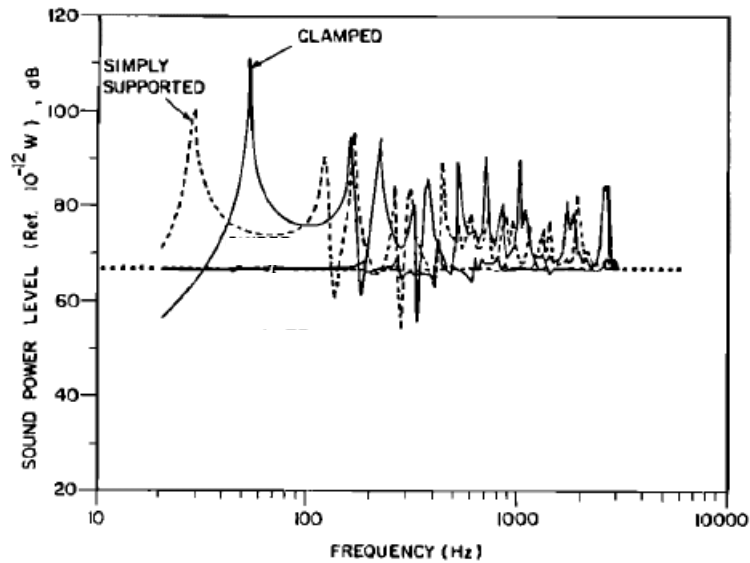
--- encastrée

— simplement supportée



Influence des conditions aux limites

Plaque libre partiellement encastrée



acier

0.55 m x 0.45 m

($r = 1.2$),

épaisseur 1 mm,

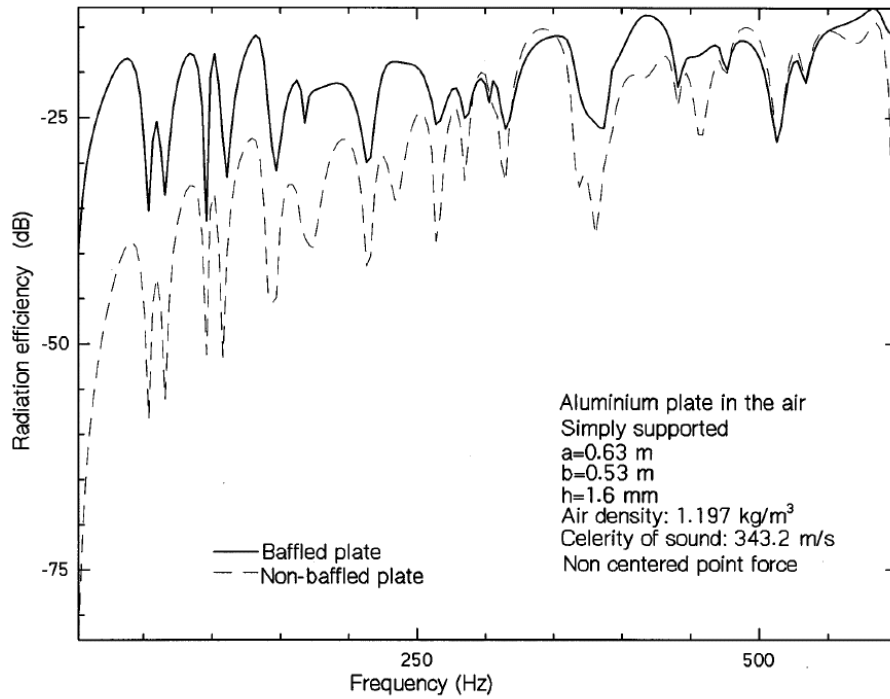
fréquence critique 12 kHz

amortissement 1%

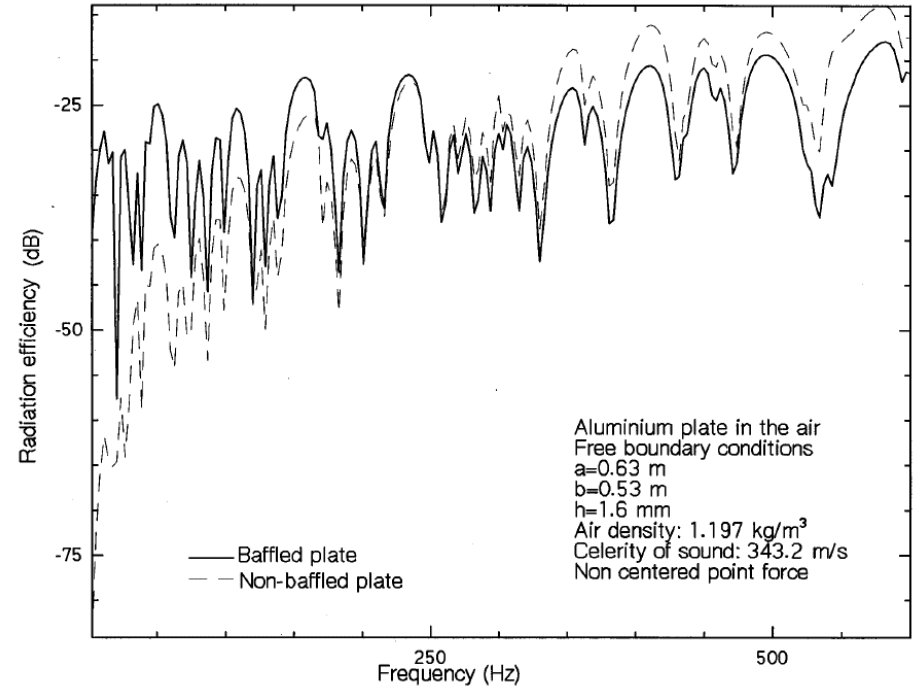
Force ponctuelle au centre

Influence du baffle

Plaque simplement supportée



Plaque libre



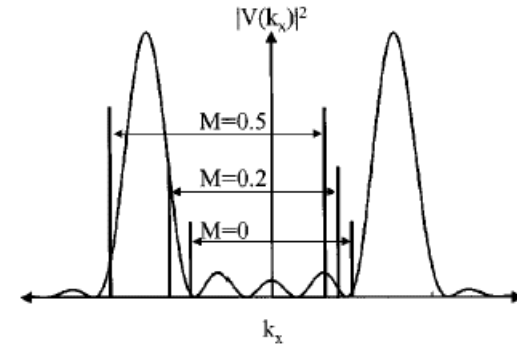
— *bafflée*

- - *non bafflée*

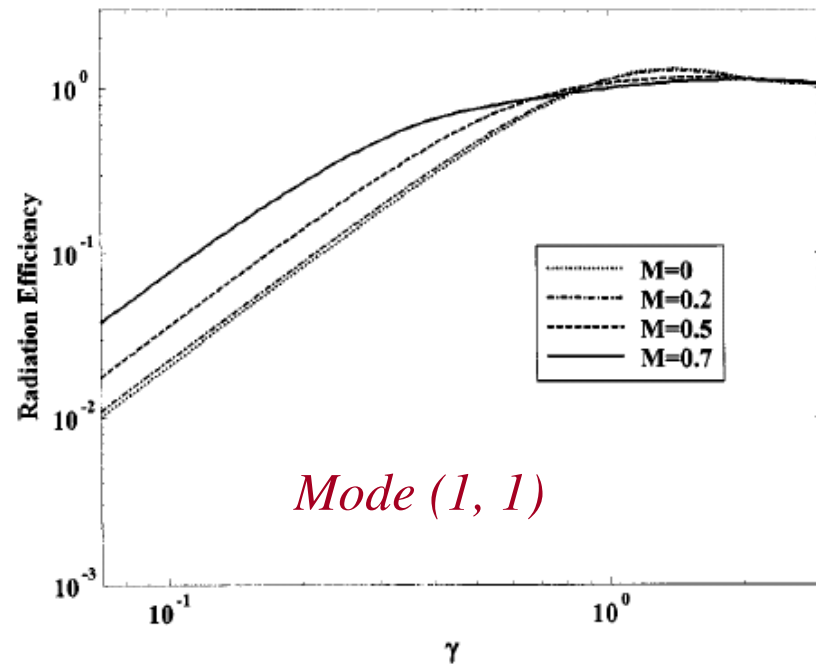
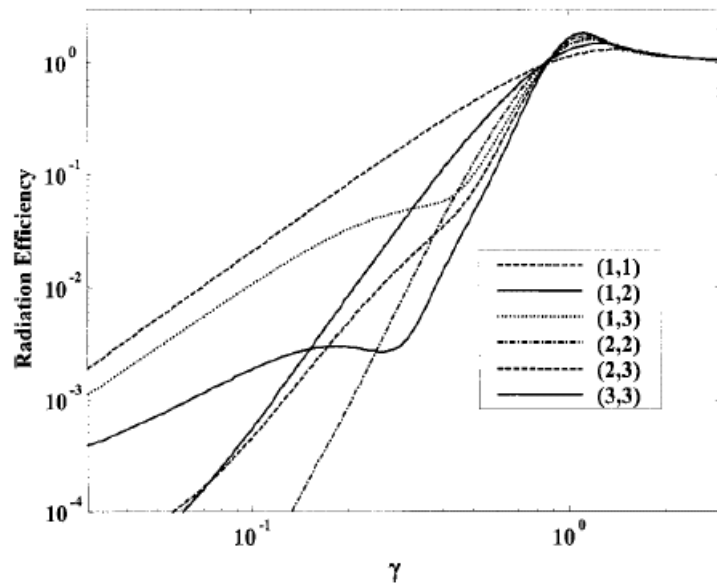
Influence de l'écoulement du fluide

Nouvelle relation de dispersion

$$k^2 = k_x^2(1 - M^2) + 2Mkk_x + k_z^2$$



Plaque simplement supportée



Influence de l'écoulement du fluide

