

Chapitre 4

LA TRANSFORMATION DE FOURIER

4.1 Expression de la transformée de Fourier

4.1.1 Définition

Soit un signal $s(t)$ dépendant de la variable t et satisfaisant les conditions de Dirichlet :

- $\int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt < \infty$ soit s absolument intégrable
- s continue par morceaux

alors s admet une **transformée de Fourier**¹ définie par :

$$T.F. [s(t)] = S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.1)$$

et l'on admet que la transformation inverse existe et est définie par :

$$T.F^{-1} [S(f)] = s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \quad (4.2)$$

Remarques :

On peut constater que la transformée de Fourier agit sur un signal continu et fournit un signal dans l'espace de Fourier. La transformation de Fourier diffère du développement en série de Fourier qui ne se fait que pour des fonctions périodiques et qui engendre des coefficients c_n discrets. Il y a cependant un lien étroit entre les deux opérations qui sera ultérieurement établi.

¹Joseph Fourier (1768-1830) Mathématicien et Physicien français qui a vécu à Grenoble. S'est intéressé en particulier à la propagation de la chaleur.

4.1.2 Autres formulations

La transformée de Fourier d'un signal temporel peut s'exprimer en fonction de la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

$$T.F. [s(t)] = S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt \quad (4.3)$$

ce qui conduit à l'opération inverse suivante

$$T.F^{-1} [S(\omega)] = s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (4.4)$$

Pour les signaux spatiaux, il est d'usage de définir la transformée de Fourier en fonction de la variable $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ qui représente le module du vecteur d'onde. Si le signal est tridimensionnel, la transformée de Fourier s'écrit en fonction du vecteur d'onde lui-même

$$T.F [s(\mathbf{r})] = S(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\mathbf{r})e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (4.5)$$

$$T.F^{-1} [S(\mathbf{k})] = s(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\mathbf{k})e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} \quad (4.6)$$

Pour les processus de diffusion (R.X., Neutrons, Physique des particules), l'interaction rayonnement matière est caractérisée par un transfert du vecteur d'onde. En effet lorsqu'un rayonnement tombe sur un matériau il interagit avec ce matériau et il est diffusé dans l'espace. Si \mathbf{k}_{inc} est le vecteur d'onde incident, à l'issue de l'interaction le rayonnement diffusé est observé dans une direction qui correspond à un vecteur d'onde \mathbf{k}_{sc} . Le changement de direction du vecteur d'onde définit le vecteur d'onde de transfert donné par $\mathbf{Q} = \mathbf{k}_{sc} - \mathbf{k}_{inc}$, et permet de définir la transformée de Fourier en \mathbf{Q} d'un signal spatial (densité électronique, concentration de diffuseur..)

$$T.F [s(\mathbf{r})] = S(\mathbf{Q}) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\mathbf{r})e^{-j\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (4.7)$$

$$T.F^{-1} [S(\mathbf{Q})] = s(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\mathbf{Q})e^{j\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{Q} \quad (4.8)$$

4.2 Propriétés de la transformée de Fourier

4.2.1 Linéarité

En vertu de linéarité de l'intégration la transformation de Fourier est aussi une opération linéaire :

$$T.F [as(t) + br(t)] = aS(f) + bR(f) \quad (4.9)$$

4.2.2 Partie réelle et imaginaire de la T.F.

D'après la définition de la T.F. d'un signal conduira généralement à un signal fréquentiel complexe. Nous allons montrer que la partie réelle et la partie imaginaire du signal fréquentiel sont liées aux composantes symétrique (paire) et antisymétrique (impaire) du signal temporel. Pour cela considérons un signal pair du temps $s_p(t)$. Par définition on a :

$$s_p(t) = s_p(-t) \quad (4.10)$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s_p(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [s_p(t)\cos 2\pi ft - js_p(t)\sin 2\pi ft] dt \quad (4.11)$$

En utilisant la propriété de parité du signal $s_p(t)$ il vient :

$$S(f) = 2 \int_0^{\infty} s_p(t)\cos 2\pi ftdt \quad (4.12)$$

On peut en déduire le résultat important suivant :

La T.F. d'un signal réel symétrique (pair) est un signal réel

De même pour un signal impair ou antisymétrique, on peut facilement vérifier que la T.F. du signal est donnée par :

$$S(f) = -2j \int_0^{\infty} s(t)\sin 2\pi ftdt \quad (4.13)$$

ce qui montre que :

La T.F. d'un signal antisymétrique (impair) est un imaginaire pur

En outre, nous avons vu au ?? que tout signal réel peut être décomposé en la somme d'un signal pair et d'un signal impair ce qui permet d'écrire que :

$$s(t) = s_p(t) + s_i(t) \quad (4.14)$$

Il s'en suit que la transformée de Fourier d'un signal quelconque $s(t)$ peut être scindée en la somme de la T.F. de sa partie paire et de sa partie impaire puisque la T.F. est une opération linéaire. On en déduit que

$$S(f) = A(f) + jB(f) \quad (4.15)$$

avec

$$A(f) = \mathcal{R}e \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-2\pi jft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos 2\pi ftdt \quad (4.16)$$

$$B(f) = \mathcal{I}m \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin 2\pi ftdt \quad (4.17)$$

ce qui montre que la T.F. conserve l'information sur la parité contenue dans le signal.

4.2.3 Translation du temps

Nous allons calculer l'influence d'une translation τ du temps t sur la T.F. d'un signal temporel. Soit $S(f)$ la T.F. de $s(t)$ alors :

$$T.F. [s(t - \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau)e^{-2\pi jft} dt \quad (4.18)$$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$T = t - \tau \implies t = T + \tau \quad \text{et} \quad dt = dT \quad (4.19)$$

il vient :

$$T.F. [s(t - \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(T)e^{-2\pi jf(T+\tau)} dT \quad (4.20)$$

soit

$$T.F. [s(t - \tau)] = e^{-2\pi j f \tau} \int_{-\infty}^{\infty} s(T) e^{-2\pi j f T} dT \quad (4.21)$$

ce qui conduit à :

$$T.F. [s(t - \tau)] = e^{-2\pi j f \tau} S(f) \quad (4.22)$$

Il en résulte la propriété importante suivante :

Toute translation du temps ne produit qu'un déphasage de la T.F.

Il est possible de démontrer en utilisant la même démarche que déphaser le signal temporel conduit à translater le signal fréquentiel ce qui s'écrit :

$$T.F. [e^{-2\pi j f_0 t} s(t)] = S(f - f_0) \quad (4.23)$$

4.2.4 Similitude ou Changement d'échelle

Soit $S(f)$ la T.F. du signal $s(t)$; déterminons la T.F. du signal $s(at)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

$$T.F. [s(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(at) e^{-2\pi j f t} dt \quad (4.24)$$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$T = at \implies t = \frac{T}{a} \text{ et } dt = \frac{dT}{a}$$

Il s'en suit que :

$$T.F. [s(aT)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(T)}{a} e^{2\pi j \frac{f}{a} T} dT \quad (4.25)$$

soit

$$T.F. [s(at)] = \frac{1}{a} S\left(\frac{f}{a}\right) \quad (4.26)$$

On peut alors conclure que :

Toute dilatation de l'échelle des temps conduit à une contraction inverse de l'échelle des fréquences et réciproquement

Ce théorème est absolument fondamental en physique puisqu'il est l'essence même du passage entre l'échelle des temps et l'échelle des fréquences avec à la clé une multitude d'implications parmi lesquelles nous citerons les exemples suivants :

Un rayon lumineux rigoureusement monochromatique a une durée de vie infinie.

Plus une fente est étroite et plus sa figure de diffraction est étalée.

La densité de noeuds du réseau réciproque est inversement proportionnelle à la dimension de la maille dans le réseau direct.

4.2.5 T.F. de la dérivée

Soit $S(f)$ la T.F. du signal $s(t)$ à support borné alors :

$$\begin{aligned} T.F. \left[\frac{ds}{dt} \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{dt} e^{-2\pi jft} dt \\ &= [s(t)e^{-2\pi jft}]_{-\infty}^{\infty} + 2\pi jf \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-2\pi jft} dt \end{aligned} \quad (4.27)$$

Le premier terme du second membre est nul car le signal est à support borné donc

$$T.F. \left[\frac{ds}{dt} \right] = 2\pi jf \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-2\pi jft} dt = 2\pi jf S(f) \quad (4.28)$$

Il est possible de généraliser ce résultat à la dérivée nième du signal $s(t)$ ce qui conduit à :

$$T.F. \left[\frac{d^n s}{dt^n} \right] = [2\pi jf]^n S(f) \quad (4.29)$$

4.2.6 T.F. du complexe conjugué

Considérons un signal $s(t) \in \mathbb{C}$ et calculons la T.F. de son conjugué :

$$T.F. [s^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t) e^{-2\pi jft} dt \quad (4.30)$$

$$T.F. [s^*(t)] = \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{2\pi jft} dt \right]^* \quad (4.31)$$

d'où

$$T.F. [s^*(t)] = [S(-f)]^*$$

Il résulte de cette relation que si le signal est réel alors :

$$S(f) = S(-f)$$

De plus, si le signal est symétrique alors la T.F. est réelle et :

$$S(f) = S(-f)$$

4.3 Les transformées de Fourier usuelles

4.3.1 Signal unité

Soit le signal $s(t)$ vérifiant :

$$\forall t \in R \quad s(t) = 1 \quad (4.32)$$

Ce signal n'est pas à support borné et il est clair que l'existence même de la T.F. n'est pas nécessairement acquise. Pour calculer la T.F., il est nécessaire de passer à la limite ce qui conduit à :

$$T.F. [s(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2\pi jft} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} T \operatorname{sinc}(\pi fT) \quad (4.33)$$

La limite du dernier terme correspond à une représentation fonctionnelle de la distribution de Dirac. Il est en résulte que l'on retrouve bien

$$T.F. [1(t)] = \delta(f) \quad (4.34)$$

Dans cet exemple une illustration de l'importance de la dilatation des échelles de temps puisque l'uniformité dans l'espace temporel conduit au saut de largeur nulle dans l'espace fréquentiel, c'est à dire à un signal impulsionnel dans l'espace fréquentiel.

Réciproquement si le signal temporel est impulsionnel alors sa T.F. est uniforme soit :

$$T.F. [\delta(t)] = 1 \quad (4.35)$$

Remarque :

Rappelons qu'une translation f_0 dans l'espace des fréquences conduit à un déphasage dans l'espace temporel et réciproquement. Il en résulte que :

$$T.F. [s(t - t_0)] = e^{-2\pi j f t_0} \quad (4.36)$$

$$T.F. [1e^{-2\pi j f_0 t}] = \delta(f - f_0) \quad (4.37)$$

4.3.2 T.F. d'une porte

Considérons une porte temporelle de largeur T_0 ; sa transformée de Fourier est donnée par :

$$T.F. [\sqcup_{T_0}(t)] = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-2\pi j f t} dt = \frac{e^{-\pi j f T_0} - e^{\pi j f T_0}}{-2\pi j f} \quad (4.38)$$

soit

$$T.F. [\sqcup_{T_0}(t)] = T_0 \text{sinc}(\pi f T_0) \quad (4.39)$$

Remarque : Il est utile de constater que le signal temporel est réel et pair ce qui conduit bien à un signal fréquentiel réel et symétrique.

4.3.3 T.F. d'une Gaussienne

Considérons un signal gaussien normalisé par son intensité intégrée. Ce signal a pour expression :

$$G(t) = \frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad (4.40)$$

Sa *T.F.* est donnée par :

$$T.F. [G(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-2\pi j f t} dt \quad (4.41)$$

En regroupant les arguments des deux exponentielles et en écrivant que :

$$\frac{t^2}{2\sigma^2} + 2\pi j f t = \left[\frac{t}{\sqrt{2}\sigma} + \sqrt{2}\pi\sigma f j \right]^2 - 2\pi^2\sigma^2 f^2 \quad (4.42)$$

Il s'en suit qu'après le changement de variable suivant :

$$u = \frac{t}{\sqrt{2}\sigma} + \sqrt{2}\pi\sigma f j \implies dt = \sqrt{2}\sigma du \quad (4.43)$$

la *T.F.* gaussienne s'écrit :

$$T.F. [G(t)] = \frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2} \sqrt{2}\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \quad (4.44)$$

L'intégrale I dans le second membre est classique et est égale à :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

On peut ainsi conclure que :

$$T.F. [G(t)] = A e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2} \quad (4.45)$$

Il en résulte que :

La transformation de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne

Conformément à la loi sur la dilatation de l'échelle temporelle, nous pouvons constater que si la demi largeur à mi-hauteur (*d.l.m.h.*) de la gaussienne dans le temps est 0.85σ (voir chapitre I) alors la *d.m.l.h.* de la T.F. est donnée par :

$$d.l.m.h. = \frac{\ln 2}{\sqrt{2\pi}\sigma} = \frac{0.27}{\sigma}$$

ce qui montre que plus la gaussienne temporelle est étendue plus la gaussienne fréquentielle est pointue.

4.3.4 T.F. de l'exponentielle symétrisée

Nous allons calculer la T.F. d'un signal particulièrement important dans la pratique défini en symétrisant le signal exponentiel selon la relation :

$$s(t) = A e^{-\alpha|t|} \quad (4.46)$$

Par définition, la *T.F.* est donnée par :

$$T.F. [s(t)] = A \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-2\pi jf)t} dt + A \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+2\pi jf)t} dt \quad (4.47)$$

Le calcul est immédiat et conduit à :

$$T.F. [s(t)] = \frac{A}{(\alpha - 2\pi jf)} + \frac{A}{(\alpha + 2\pi jf)} \quad (4.48)$$

soit

$$T.F. [s(t)] = \frac{2A\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (4.49)$$

ce qui démontre que :

La T.F. d'une exponentielle symétrisée est une Lorentzienne

Ce résultat est très important car de nombreux signaux fréquentiels ont soit un profil gaussien soit un profil lorentzien ; l'observation d'un signal lorentzien dans l'espace fréquentiel est donc le signe indubitable d'un signal exponentiel dans l'espace temporel.

Un cas particulier de ce type de transformation est celui de l'exponentielle causale définie par

$$s(t) = A\theta(t)e^{-\alpha t} = A\theta(t)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (4.50)$$

dont la transformée de Fourier s'écrit

$$S(f) = T.F. [s(t)] = \frac{A}{(\alpha + 2\pi jf)} = \frac{A\tau}{(1 + 2\pi jf\tau)} \quad (4.51)$$

4.3.5 T.F. de la distribution de Heaviside

$$S(f) = T.F. [\theta(t)] = \frac{1}{2\pi jf} + \frac{1}{2}\delta(f) \quad (4.52)$$

4.4 Transformée de Fourier des signaux périodiques

4.4.1 Signaux sinusoïdaux

Rappelons en préliminaire qu'une translation dans l'espace fréquentiel est le résultat de la T.F. d'un signal déphaseur ce qui s'écrit :

$$T.F. \left(e^{+2\pi jf_0 t} \right) = \delta(f - f_0) \quad (4.53)$$

En utilisant la notation complexe des signaux sinusoïdaux :

$$\sin(2\pi f_0 t) = \frac{e^{2\pi j f_0 t} - e^{-2\pi j f_0 t}}{2j} \quad (4.54)$$

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{2\pi j f_0 t} + e^{-2\pi j f_0 t}}{2} \quad (4.55)$$

et en tenant compte de la remarque préliminaire et de la propriété de linéarité de la *T.F.* il vient :

$$T.F.\sin(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2j} \delta(f + f_0) - \delta(f - f_0) \quad (4.56)$$

$$T.F.\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)] \quad (4.57)$$

On peut de nouveau remarquer sur cet exemple que la *T.F.* du sinus est un signal purement imaginaire alors que la *T.F.* du cosinus est un réel conformément à la parité de ces deux signaux.

4.4.2 La T.F. du peigne de Dirac.

La distribution peigne de Dirac est la répétition périodique à l'infini d'impulsions de Dirac séparées de T_0 .

$$\underline{\uparrow\uparrow\uparrow}_{T_0}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_0) \quad (4.58)$$

Cette distribution étant périodique, elle peut être développée en série de Fourier complexe :

$$\underline{\uparrow\uparrow\uparrow}_{T_0}(t) = \sum_n c_n e^{\frac{2\pi j n t}{T_0}} \quad (4.59)$$

Les coefficients de Fourier c_n se calculent sur une période T_0 du peigne qui se réduit alors sur cet intervalle restreint à la distribution de Dirac $\delta(t)$ ce qui conduit à :

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-\frac{2\pi j n t}{T_0}} dt = \frac{1}{T_0} \quad (4.60)$$

La T.F. du peigne est donnée par :

$$T.F. [\underline{\uparrow\uparrow\uparrow}_{T_0}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\uparrow\uparrow\uparrow}_{T_0}(t) e^{-2\pi jft} dt \quad (4.61)$$

soit

$$T.F.(\underline{\uparrow\uparrow\uparrow}_{T_0}(t)) = \sum_n \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi j(f - \frac{n}{T_0})t} dt \quad (4.62)$$

ce qui conduit à :

$$T.F.(\underline{\uparrow\uparrow\uparrow}_{T_0}(t)) = \frac{1}{T_0} \sum_n \delta(f - \frac{n}{T_0}) \quad (4.63)$$

Il en résulte que :

La T.F. d'un peigne temporel de période T_0 est un peigne fréquentiel d'amplitude $1/T_0$ et de fréquence $1/T_0$

4.5 La transformée de Fourier discrète

4.5.1 Signal numérique in ni

La définition de la transformée de Fourier d'un signal analogique $s(t)$ nous permet d'écrire que :

$$S(f) = T.F. [s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-2\pi jft} dt \quad (4.64)$$

$$s(t) = T.F.^{-1} [S(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{2\pi jft} df \quad (4.65)$$

Cette définition peut être étendue à des signaux numériques de dimension infinie. Il suffit pour cela de remplacer le signal $s(t)$ par un échantillon $s(n)$ et de constater que la variation élémentaire dt de la variable t doit être remplacée par une variation discrète $dn = 1$ de l'indice n puisque deux échantillons consécutifs sont séparés d'une unité.

L'intégrale est remplacée par une somme discrète sur tous les échantillons ce qui conduit à :

$$S(f) = T.F. [s(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)e^{-2\pi jfn} \quad (4.66)$$

$$s(t) = T.F.^{-1} [S(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{2\pi jfn} df \quad (4.67)$$

La transformée de Fourier discrète d'un signal numérique infini conduit donc à un signal fréquentiel continu de la variable f . Remarquons toutefois que cette définition reste peu usitée car les signaux numériques que nous avons l'habitude de manipuler à l'aide de micro-ordinateurs sont nécessairement de dimension finie. Une autre façon de définir la transformation de Fourier d'un signal numérique est d'utiliser la distribution décalée de Dirac qui permet d'écrire : ce qui conduit à :

$$T.F. [s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n s(n)\delta(t-n)e^{-2\pi jft} dt \quad (4.68)$$

$$= \sum_n s(n) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-n)e^{-2\pi jft} dt \quad (4.69)$$

soit

$$S(f) = \sum_n s(n)e^{-2\pi jfn} \quad (4.70)$$

4.5.2 Signal numérique fini de dimension N .

Considérons un signal numérique $\{s(n)\}$ fini de dimension N . Un tel signal peut être considéré comme virtuellement périodique de période N . Il suffit pour cela de considérer qu'il se répète à l'infini identique à lui-même et que

$$\forall j \in [1, N] \quad s(j) = s(j + N) \quad (4.71)$$

Cette condition est l'équivalent en traitement du signal de la condition aux limites périodique de Born Von Karman utilisée en physique du solide. Le signal étant périodique, il peut donc être développé en série de Fourier en remplaçant la variable continue t par la variable discrète n . On obtient ainsi :

$$s(n) = \sum_p c_p e^{\frac{2\pi jpn}{N}} \quad (4.72)$$

Les coefficients de Fourier c_p sont déterminés par :

$$c_p = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-\frac{2\pi jpn}{N}} \quad (4.73)$$

Il apparaît immédiatement que la périodicité de $s(n)$ engendre celle de c_p . Les coefficients de Fourier du signal numérique fini sont donc périodiques de période N . La transformée de Fourier discrète $S(p)$ du signal numérique fini $s(n)$ et sa $T.F.^{-1}$ sont alors définies par :

$$S(p) = Nc_p = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-\frac{2\pi jnp}{N}} \quad (4.74)$$

$$s(n) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} S(p) e^{-\frac{2\pi jnp}{N}} \quad (4.75)$$

La relation entre la TFD et les coefficients de Fourier C_p dans

$$s(n) = \sum_{p=0}^{N-1} C_p e^{\frac{2\pi jnp}{N}} \quad (4.76)$$

est

$$C_p = \frac{S(p)}{N} \quad (4.77)$$

Il est fréquent de trouver dans la littérature la définition suivante obtenue à partir de $w = \exp(-2\pi j/N)$ et qui conduit à :

$$S(p) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) w^{np} \quad (4.78)$$

$$s(n) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} S(p) w^{-np} \quad (4.79)$$

Retenons que pour un signal numérique fini de dimension N , le signal et sa $T.F.$ sont périodiques de période N . La $T.F.$ du signal a donc même dimension que le signal.

$$\dim s(n) = N \iff \dim S(p) = N \quad (4.80)$$

Les calculs que nous venons de décrire ci-dessus permettent de déterminer la $T.F.$ et la $T.F.^{-1}$ d'un signal numérique. Ils nécessitent dans les deux cas de faire N^2 multiplications ce qui peut devenir assez coûteux en temps de calcul si N devient assez grand. Pour cette raison, un algorithme basé sur les propriétés de symétrie des $S(p)$ a été développé pour réduire le temps de calcul. Cet algorithme connu sous le nom de Fast Fourier Transform (Transformée de Fourier rapide) ne nécessite que $N(N+1)/2$ multiplications. Le signal est pour cela divisé en deux séquences de $N/2$ points et doit être de dimension $2n$. Si le signal n'est pas de cette dimension, on le complète avec des zéros pour y parvenir.

4.5.3 Axes des fréquences dans une T.F.D.

Il est important de remarquer que la représentation de la $T.F.$ peut se faire indifféremment en fonction de p ou de p/N qui sont des variables fréquentielles. Toutefois dans la pratique il est souvent utile de revenir à la signification réelle de la variable fréquentielle. Pour cela il ne faut pas oublier que lors de la numérisation du signal l'axe des temps est converti en une suite d'échantillons. Si le signal analogique allait de t_1 à t_2 , le signal numérique s'étend de l'échantillon $n = 1$ à l'échantillon $n = N$ et il en va de même pour la transformée de Fourier discrète qui va de l'échantillon $p = 1$ à $p = N$. Pour numériser le signal, il a fallu l'échantillonner au préalable. Soit T_e la période d'échantillonnage et soit N la dimension du signal. La longueur totale du signal vérifie $t_2 - t_1 = NT_e$ et représente la période supposée du signal à numériser. Sa fréquence est donc $f = 1/(NT_e)$. En réécrivant la transformée de Fourier discrète sous la forme

$$S(p) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_e) e^{-\frac{2\pi j n T_e p}{NT_e}} = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_e) e^{-2\pi j n T_e p f} \quad (4.81)$$

il est facile de voir que les fréquences effectives seront données par toutes les valeurs de pf pour $p \in [0, N-1]$. Nous concluons donc que le pas en fréquence est relié à la période d'échantillonnage et à la dimension du signal par

$$\Delta f = \frac{1}{NT_e} = \frac{f_e}{N} \quad (4.82)$$

et que la fréquence maximale contenue dans la T.F.D. est

$$f_{\max} = \frac{N-1}{N} f_e \quad (4.83)$$

Pour fixer les idées si l'on considère un signal échantillonné à la fréquence $f_e = 500\text{Hz}$ et contenant $N = 50$ échantillons, alors la fréquence maximale observable dans la T.F.D. est $f_{\max} = 490\text{Hz}$ et le pas en fréquence est 10Hz .

4.5.4 Padding

Le padding consiste à enrichir la *T.F.D.* d'un signal numérique fini en complétant le signal par autant de zéros que nécessaire. En effet nous avons vu que :

$$\dim s(n) = \dim S(p) = N \quad (4.84)$$

Il en résulte que si l'on accroît artificiellement la dimension du signal en lui ajoutant des zéros (ce qui ne change en rien le signal), sa *T.F.D.* verra sa dimension augmenter d'autant ce qui permettra de l'enrichir de façon substantielle. A titre d'exemple nous allons considérer un signal de dimension 3. Soit $s(n)$ défini par :

n	0	1	2
s(n)	1	1	1

La *T.F.D.* de ce signal est donnée par :

$$S(p) = \sum_{n=0}^2 s(n) e^{-\frac{2\pi j n p}{3}} \quad (4.85)$$

soit

$$S(p) = 1 + e^{-\frac{2\pi j p}{3}} + e^{-\frac{4\pi j p}{3}} \quad (4.86)$$

L'indice p court de $p = 0$ à $p = 2$ ce qui conduit à :

p	0	1	2
S(p)	3	0	0

Il est clair que le spectre fréquentiel du signal est très pauvre puisqu'à l'image du signal il ne contient que trois échantillons (car $\dim S = \dim s$).

Pour avoir une meilleure idée de l'allure du spectre fréquentiel, il suffit d'augmenter artificiellement la dimension du signal en le complétant par des zéros. Nous allons utiliser cette démarche en formant un signal de dimension 9 par adjonction de 6 zéros au signal $s(n)$ et nous allons voir l'influence sur la *T.F.D.* :

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
S(p)	1	1	1	0	0	0	0	0	0

La *T.F.D.* de ce signal est donnée par :

$$T.F. [s(n)] = \sum_{n=0}^8 s(n)e^{-\frac{2\pi jpn}{9}} = S(p) \quad (4.87)$$

soit

$$S(p) = 1 + e^{-2\pi jp/9} + e^{-4\pi jp/9}$$

Cette relation permet de calculer le spectre fréquentiel du signal :

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
S(p)	3	1.9 - 1.6i	0.2 - 1.3i	0	0.8 + 0.3i	0.8 - 0.3i	0	0.2 - 1.3i	1.9 + 1.6i

EXERCICES**Exercice n° 12 : Développement en série de Fourier de la distribution de Dirac.**

On considère la fonction $\square_n(x)$ définie par :

$$\square_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } |x| < 1/2n \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1/2n \end{cases} \quad (4.88)$$

- a- Développer en série de Fourier cette fonction sur l'intervalle $[-1/2n, 1/2n]$
 b- En déduire le développement de la distribution de Dirac $\delta(x)$.

Exercice n° 13 : Développement d un peigne de Dirac.

On considère le peigne de Dirac défini par :

$$\uparrow\uparrow\uparrow_T(t) = \sum_n \delta(t - nT)$$

- a- Déterminer les coefficients de Fourier associé au peigne.
 b- En déduire le développement en série de Fourier du peigne.

Exercice n° 14 : Distribution de Dirac décalée

Montrer que le développement en série de Fourier de la distribution de Dirac décalée $\delta(x - a)$ sur l'intervalle $I = [0, L]$ avec a appartenant à I est donnée par :

$$\delta(x - a) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_n \cos \frac{2\pi n}{L} (x - a)$$

Exercice n°15 : Transformée de la fonction signe

Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $\text{sgn}(t)$. En déduire celle de la distribution de Heaviside.

Exercice n°16

Déterminer la transformée de Fourier du signal suivant :

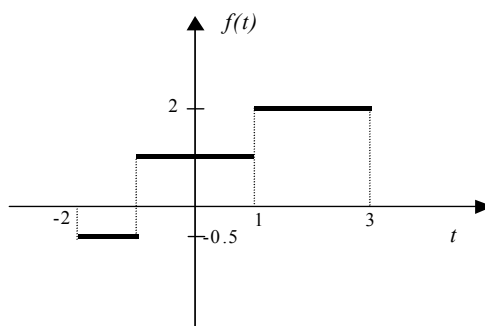


FIG. 4.1 –