

Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion du
canton de Vaud (HEIG-Vd)

Département de la formation en emploi
Filière Electricité
Filière Télécommunications (RS et IT)

Traitement de Signal
(TS)
Corrigé des exercices



Prof. Michel ETIQUE, janvier 2006,
Yverdon-les-Bains

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Analyse des signaux périodiques | 5 |
| 1.1 | Corrigé des exercices | 5 |
| 1.1.1 | Exercice SF 1 | 5 |
| 1.1.2 | Exercice SF 2 | 11 |
| 1.1.3 | Exercice SF 3 | 14 |
| 1.1.4 | Exercice SF 4 | 14 |
| 1.1.5 | Exercice SF 5 | 20 |
| 1.1.6 | Exercice SF 6 | 22 |
| 1.1.7 | Exercice SF 7 | 30 |
| 1.1.8 | Exercice SF 8 | 31 |
| 1.1.9 | Exercice SF 15 | 37 |
| 1.1.10 | Exercice SF 16 | 40 |
| 1.1.11 | Exercice SF 17 | 47 |
| 1.1.12 | Exercice SF 21 | 51 |
| | | |
| 2 | Analyse des signaux non périodiques | 53 |
| 2.1 | Corrigé des exercices | 53 |
| 2.1.1 | Exercice TF 1 | 53 |
| 2.1.2 | Exercice TF 2 | 54 |
| 2.1.3 | Exercice TF 3 | 57 |
| 2.1.4 | Exercice TF 4 | 59 |
| 2.1.5 | Exercice TF 5 | 63 |
| 2.1.6 | Exercice TF 6 | 63 |
| 2.1.7 | Exercice TF 7 | 65 |
| 2.1.8 | Exercice TF 8 | 65 |
| 2.1.9 | Exercice TF 9 | 66 |
| 2.1.10 | Exercice TF 10 | 66 |
| 2.1.11 | Exercice TF 11 | 67 |
| 2.1.12 | Exercice TF 12 | 68 |
| 2.1.13 | Exercice TF 13 | 68 |
| 2.1.14 | Exercice TF 14 | 68 |
| 2.1.15 | Exercice TF 15 | 69 |
| 2.1.16 | Exercice TF 16 | 70 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.1.17 | Exercice TF 17 | 71 |
| 2.1.18 | Exercice TF 18 | 73 |
| 2.1.19 | Exercice TF 19 | 73 |
| 2.1.20 | Exercice TF 20 | 74 |
| 2.1.21 | Exercice TF 21 | 74 |
| 2.1.22 | Exercice TF 22 | 74 |
| 2.1.23 | Exercice TF 23 | 75 |
| 2.1.24 | Exercice TF 24 | 75 |
| 2.1.25 | Exercice TF 25 | 76 |
| 2.1.26 | Exercice Corr 1 | 76 |
| 2.1.27 | Exercice Corr 2 | 80 |
| 3 | Echantillonnage des signaux analogiques | 81 |
| 3.1 | Corrigé des exercices | 81 |
| 3.1.1 | Exercice ECH 1 | 81 |
| 3.1.2 | Exercice ECH 2 | 82 |
| 3.1.3 | Exercice ECH 3 | 82 |
| 3.1.4 | Exercice ECH 4 | 83 |
| 3.1.5 | Exercice ECH 5 | 83 |
| 3.1.6 | Exercice ECH 6 | 83 |
| 3.1.7 | Exercice ECH 7 | 84 |
| 3.1.8 | Exercice ECH 8 | 86 |
| 3.1.9 | Exercice ECH 9 | 87 |
| 3.1.10 | Exercice ECH 10 | 87 |
| 3.1.11 | Exercice ECH 11 | 88 |
| 3.1.12 | Exercice ECH 12 | 88 |
| 3.1.13 | Exercice ECH 13 | 88 |
| 3.1.14 | Exercice ECH 14 | 89 |
| 3.1.15 | Exercice ECH 15 | 89 |
| 3.1.16 | Exercice ECH 16 | 89 |
| 3.1.17 | Exercice ECH 17 | 90 |
| 3.1.18 | Exercice ECH 18 | 90 |

Chapitre 1

Analyse des signaux périodiques

1.1 Corrigé des exercices

1.1.1 Exercice SF 1

Considérant les 2 signaux suivants pour lesquels $f_0 = 1$ [kHz]

$$\begin{aligned}x_1(t) &= 6 - 2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \\x_2(t) &= 4 + 1.8 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8 \cdot \sin(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)\end{aligned}$$

1. dessinez leurs spectres d'amplitude et de phase unilatéraux et bilatéraux ;
2. écrivez $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sous forme de série de Fourier complexe.

Corrigé

$$x_1(t) = 6 - 2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) :$$

Pour $x_1(t)$, en comparant à la relation générale du développement en série de Fourier,

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \quad (1.1)$$

on a :

1. Une composante continue $\frac{a_0}{2} = \frac{12}{2} = 6$
2. Une harmonique 1 (fondamental) à $f_0 = 1$ [kHz], avec $a_1 = -2$ et $b_1 = 3$

Pour la représentation des spectres unilatéraux et bilatéraux, il faut calculer la série de Fourier en cosinus ainsi que la série de Fourier complexe. On a tout d'abord pour la série en cosinus :

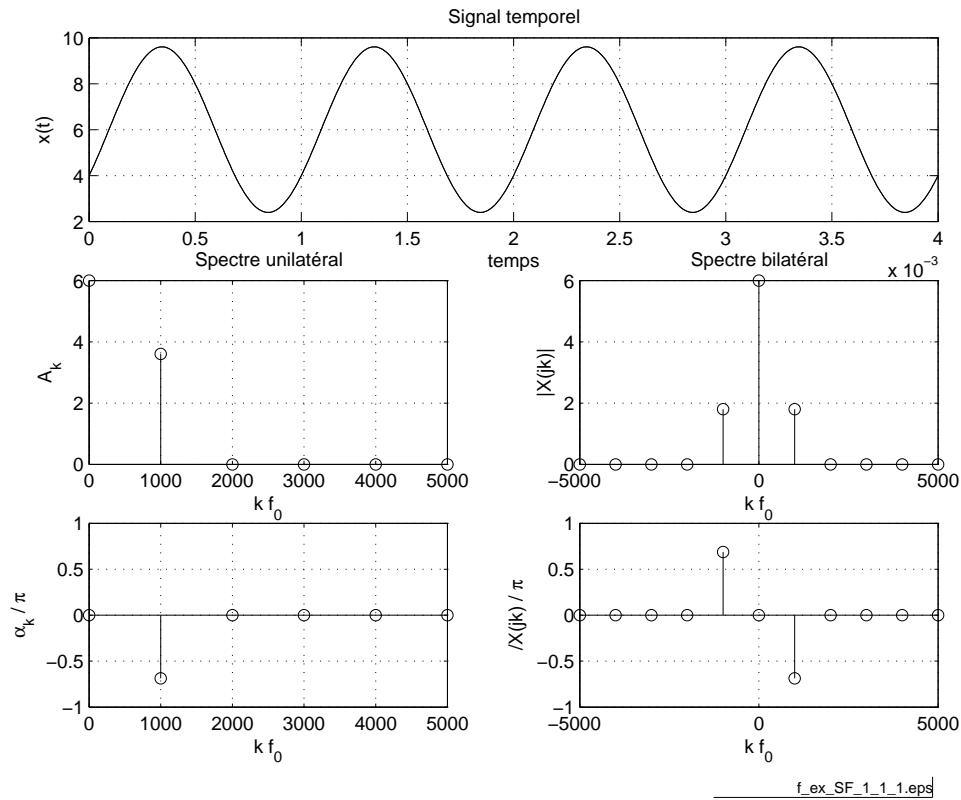


FIG. 1.1 – Spectres unilatéral et bilatéral de $x_1(t)$ (fichier source).

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = 3.6056$$

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{-b_1}{a_1}\right) = \arctan\left(\frac{-3}{-2}\right) = -2.1588 \text{ [rad]} = -123.6901 \text{ [}^\circ\text{]}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 6 - 2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \\ &= A_0 + A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1) \\ &= 6 + 3.6056 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - 2.1588) \end{aligned}$$

$$x_2(t) = 4 + 1.8 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8 \cdot \sin(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) :$$

Pour $x_2(t)$, on a en se référant au développement en série de Fourier (1.1) :

1. Une composante continue $\frac{a_0}{2} = \frac{8}{2} = 4$

2. Des harmoniques à $f_0 = 1$ [kHz] et $3 \cdot f_0 = 3$ [kHz], avec a_1 et b_1 à calculer, $a_3 = 0$, $b_3 = 0.8$

Pour la représentation des spectres unilatéraux et bilatéraux, il faut calculer la série de Fourier en cosinus ainsi que la série de Fourier complexe. On a pour la série en cosinus :

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{a_0}{2} = 4 \\ A_1 &= 1.8 \quad \left(= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \right) \\ \alpha_1 &= \frac{\pi}{3} \\ A_3 &= \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = \sqrt{0^2 + 0.8^2} = 0.8 \\ \alpha_3 &= \arctan\left(\frac{-b_3}{a_3}\right) = \arctan\left(\frac{-0.8}{0}\right) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On peut donc écrire :

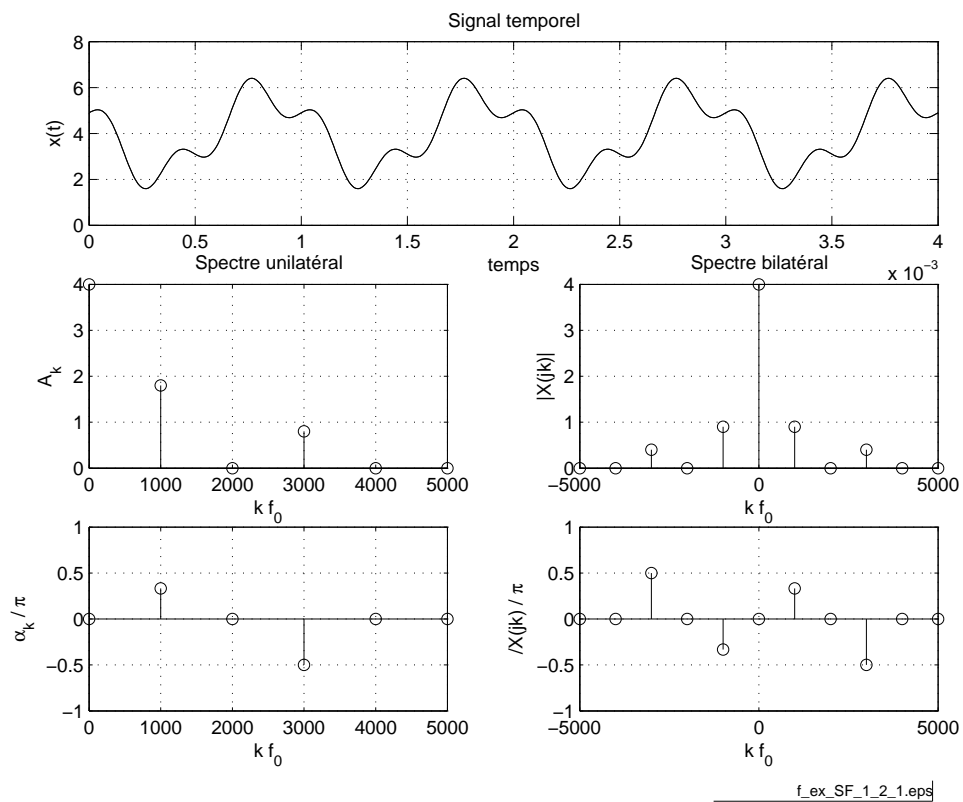
$$\begin{aligned} x_2(t) &= 4 + 1.8 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8 \cdot \sin(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \\ &= 4 + 1.8 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8 \cdot \cos\left(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= A_0 + A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1) + A_3 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_3) \end{aligned}$$

Dans le cas général, il aurait fallu calculer a_1 et b_1 selon les relations :

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \cdot dt \quad k \geq 0 \\ b_k &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \cdot dt \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

En tenant compte des identités trigonométriques

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) &= \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha - \beta) \\ \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) &= \frac{1}{2} \cdot \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

FIG. 1.2 – Spectres unilatéral et bilatéral de $x_2(t)$ (fichier source).

on a donc :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} 1.8 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t) \cdot dt \\
 &= \frac{2}{T} \cdot 1.8 \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left[\frac{1}{2} \cdot \cos\left(4 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \cdot dt \\
 &= \frac{2}{T} \cdot 1.8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) [t]_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \\
 &= 0.9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} 1.8 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t) \cdot dt \\
 &= \frac{2}{T} \cdot 1.8 \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left[\frac{1}{2} \cdot \sin\left(4 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \cdot dt \\
 &= \frac{2}{T} \cdot 1.8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) [t]_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \\
 &= -0.9 \cdot \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

On vérifie que l'on a bien :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{0.9^2 + (-0.9 \cdot \sqrt{3})^2} = 1.8 \\
 \alpha_1 &= \arctan\left(\frac{-b_1}{a_1}\right) = \arctan\left(\frac{0.9 \cdot \sqrt{3}}{0.9}\right) = 1.047 = \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

Pour $x_1(t)$:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= A_0 + A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1) \\
 &= A_0 + \frac{A_1}{2} \cdot (e^{+j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1)} + e^{-j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1)}) \\
 &= A_0 + \frac{A_1}{2} \cdot (e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} \cdot e^{+j \cdot \alpha_1} + e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \alpha_1}) \\
 &= \underbrace{X_1(j \cdot 0)}_{A_0} + \underbrace{X_2(j \cdot 1)}_{\frac{A_1}{2} \cdot e^{+j \cdot \alpha_1}} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + \underbrace{X_2(-j \cdot 1)}_{\frac{A_1}{2} \cdot e^{-j \cdot \alpha_1}} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}
 \end{aligned}$$

Pour $x_2(t)$:

$$\begin{aligned}
 x_2(t) &= A_0 + A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1) + A_3 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_3) \\
 &= A_0 + \frac{A_1}{2} \cdot (e^{+j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1)} + e^{-j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1)}) + \frac{A_3}{2} \cdot (e^{+j \cdot (6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_3)} + e^{-j \cdot (6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_3)}) \\
 &= A_0 + \frac{A_1}{2} \cdot (e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} \cdot e^{+j \cdot \alpha_1} + e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \alpha_1}) + \frac{A_3}{2} \cdot (e^{+j \cdot 6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} \cdot e^{+j \cdot \alpha_3} + e^{-j \cdot 6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \alpha_3}) \\
 &= \underbrace{X_1(j \cdot 0)}_{A_0} + \underbrace{X_2(j \cdot 1)}_{\frac{A_1}{2} \cdot e^{+j \cdot \alpha_1}} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + \underbrace{X_2(-j \cdot 1)}_{\frac{A_1}{2} \cdot e^{-j \cdot \alpha_1}} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + \underbrace{X_2(j \cdot 3)}_{\frac{A_3}{2} \cdot e^{+j \cdot \alpha_3}} \cdot e^{j \cdot 6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + \underbrace{X_2(-j \cdot 3)}_{\frac{A_3}{2} \cdot e^{-j \cdot \alpha_3}} \cdot e^{-j \cdot 6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}
 \end{aligned}$$

1.1.2 Exercice SF 2

Utilisez les formules d'Euler pour montrer que la série de Fourier du signal suivant

$$x(t) = \left(1 + \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)\right) \cdot \cos(10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

est décrite par les harmoniques 4, 5 et 6. Pour ce faire :

1. remplacez chaque fonction cosinus par deux phaseurs ; effectuez le produit ;
2. écrivez $x(t)$ sous la forme d'une somme de phaseurs ;
3. que valent les coefficients $X(j \cdot k)$ non-nuls ?
4. dessinez les spectres bilatéraux et unilatéraux d'amplitude et de phase.

Corrigé

$$\begin{aligned}
x(t) &= \left(1 + \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)\right) \cdot \cos(10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \\
&= \left(1 + 0.5 \cdot \left(e^{j \cdot (0.5 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{6})} + e^{-j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{6})}\right)\right) \cdot 0.5 \cdot \left(e^{j \cdot 10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}\right) \\
&= 0.5 \cdot \left(e^{j \cdot 10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}\right) + 0.5 \cdot \left(e^{j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{6})} + e^{-j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{6})}\right) \cdot 0.5 \cdot \left(e^{j \cdot 10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}\right) \\
&= 0.5 \cdot \left(e^{j \cdot 10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}\right) + 0.25 \cdot \left(e^{j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{6})} + e^{-j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{6})}\right) \cdot \left(e^{j \cdot 10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}\right) \\
&= 0.5 \cdot \left(e^{j \cdot 10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}\right) \\
&\quad + 0.25 \cdot \left(e^{j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{6})} \cdot e^{j \cdot 10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + e^{j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{6})} \cdot e^{-j \cdot 10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + e^{-j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{6})} \cdot e^{j \cdot 10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + e^{-j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{6})} \cdot e^{-j \cdot 10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}\right) \\
&= 0.5 \cdot \left(e^{j \cdot 10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}\right) + 0.25 \cdot \left(e^{j \cdot (12 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{6})} + e^{j \cdot (-8 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{6})} + e^{j \cdot (8 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \frac{\pi}{6})} + e^{-j \cdot (12 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{6})}\right) \\
&= X(j \cdot 4) \cdot e^{j \cdot 8 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + X(-j \cdot 4) \cdot e^{-j \cdot 8 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + X(j \cdot 5) \cdot e^{j \cdot 10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + X(-j \cdot 5) \cdot e^{-j \cdot 10 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + X(j \cdot 6) \cdot e^{j \cdot 12 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + X(-j \cdot 6) \cdot e^{-j \cdot 12 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
X(j \cdot 4) &= 0.25 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{6}} \\
X(-j \cdot 4) &= 0.25 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{6}} \\
X(j \cdot 5) &= 0.5 \\
X(-j \cdot 5) &= 0.5 \\
X(j \cdot 6) &= 0.25 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{6}} \\
X(-j \cdot 6) &= 0.25 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{6}}
\end{aligned}$$

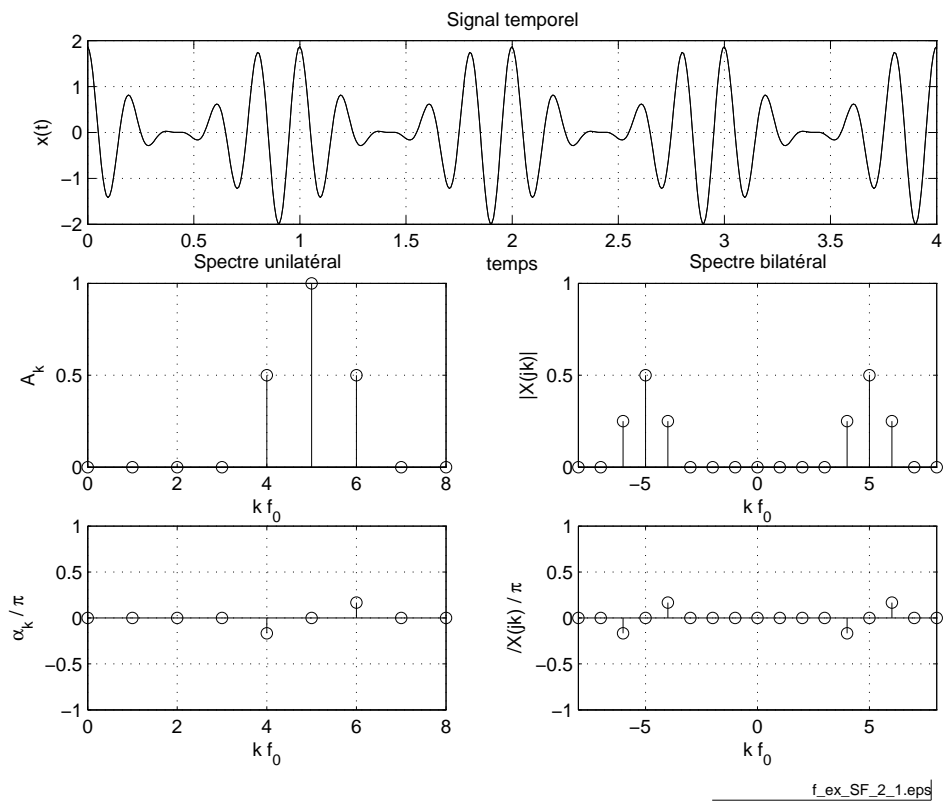


FIG. 1.3 – Spectres unilatéral et bilatéral de $x(t)$ ([fichier source](#)).

1.1.3 Exercice SF 3

Considérant un signal périodique de période $T = 20$ [ms] décrit par son spectre bilatéral $X(j \cdot k)$:

| | | | |
|----------------|---|--------------------|--------------------|
| k | 0 | ± 1 | ± 2 |
| $X(j \cdot k)$ | 2 | $-3 \pm j \cdot 2$ | $+1 \pm j \cdot 3$ |
| $ X $ | | | |
| $\angle X$ | | | |

retrouvez sa description temporelle en cosinus après avoir rempli les cases libres du tableau.

Corrigé

| | | | |
|----------------|---|---|--|
| k | 0 | ± 1 | ± 2 |
| $X(j \cdot k)$ | 2 | $-3 \pm j \cdot 2$ | $+1 \pm j \cdot 3$ |
| $ X $ | 2 | $\sqrt{3^2 + 2^2} = 3.6056$ | $\sqrt{1^2 + 3^2} = 3.16236$ |
| $\angle X$ | 0 | ± 2.5536 [rad] = ± 146.3099 [°] | ± 1.2490 [rad] = ± 71.5651 [°] |

$$\begin{aligned}
 x(t) &= A_0 + A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1) + A_2 \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_2) \\
 &= \underbrace{X(j \cdot 0)}_{A_0} + \underbrace{X(j \cdot 1)}_{\frac{A_1}{2} \cdot e^{j \cdot \alpha_1}} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + \underbrace{X(-j \cdot 1)}_{\frac{A_1}{2} \cdot e^{-j \cdot \alpha_1}} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + \underbrace{X(j \cdot 2)}_{\frac{A_2}{2} \cdot e^{j \cdot \alpha_2}} \cdot e^{j \cdot 4 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + \underbrace{X(-j \cdot 2)}_{\frac{A_2}{2} \cdot e^{-j \cdot \alpha_2}} \cdot e^{-j \cdot 4 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}
 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
 A_0 &= X(j \cdot 0) = 2 & \alpha_0 &= 0 \text{ [rad]} \\
 A_1 &= 2 \cdot |X(j \cdot 1)| = 2 \cdot 3.6056 = 7.2111 & \alpha_1 &= 2.5536 \text{ [rad]} \\
 A_2 &= 2 \cdot |X(j \cdot 2)| = 2 \cdot 3.16236 = 6.3246 & \alpha_2 &= 1.2490 \text{ [rad]}
 \end{aligned}$$

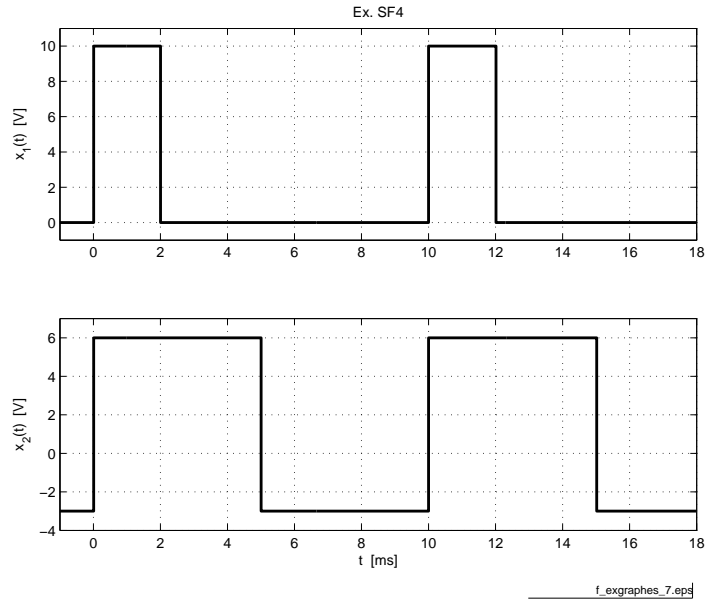
et finalement :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= A_0 + A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1) + A_2 \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_2) \\
 &= 2 + 7.2111 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 50 \text{ [Hz]} \cdot t + 2.5536) + 6.3246 \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot 50 \text{ [Hz]} \cdot t + 1.2490)
 \end{aligned}$$

1.1.4 Exercice SF 4

À partir des spectres d'amplitude et de phase d'une SIR vus au cours,

1. calculez les spectres complexes des deux signaux de la figure 1.4 page ci-contre ;
2. esquissez leurs spectres bilatéraux d'amplitude et de phase.

FIG. 1.4 – Exercice SF 4 ([fichier source](#)).

Corrigé

Le premier signal est une SIR d'amplitude $A = 10$ de période $T = \frac{1}{f_0} = 10$ [ms], de largeur $\Delta t = 2$ [ms], retardée d'une durée $t_d = \frac{\Delta t}{2} = 1$ [ms]. On en déduit :

$$\begin{aligned}
 X(j \cdot k) &= A \cdot \frac{\Delta t}{T} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \Delta t)}{k \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \Delta t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t_d} \\
 &= 10 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot 100 \text{ [Hz]} \cdot 2 \text{ [ms]})}{k \cdot \pi \cdot 100 \text{ [Hz]} \cdot 2 \text{ [ms]}} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot 100 \text{ [Hz]} \cdot 1 \text{ [ms]}} \\
 &= 2 \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot 0.2)}{k \cdot \pi \cdot 0.2} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot 100 \text{ [Hz]} \cdot 1 \text{ [ms]}} \\
 &= 2 \cdot \underbrace{\frac{\sin(k \cdot \pi \cdot \frac{1}{5})}{k \cdot \pi \cdot \frac{1}{5}}}_{\substack{0 \text{ pour } k = 5, 10, 15, \dots \\ \text{i.e. pour} \\ f = 500 \text{ [Hz]}, 1000 \text{ [Hz]}, 1500 \text{ [Hz]}, \dots}} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot 100 \text{ [Hz]} \cdot 1 \text{ [ms]}}
 \end{aligned}$$

Les résultats (spectres bilatéraux d'amplitude et de phase) sont donnés sur la figure 1.5 page 17. Sur la même figure, on trouve la synthèse de $x(t)$ basée sur les

$N = 10$ premiers termes $X(j \cdot k)$ du développement en série de Fourier complexe :

$$x_{10}(t) = \sum_{k=-10}^{+10} X(j \cdot k) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t}$$

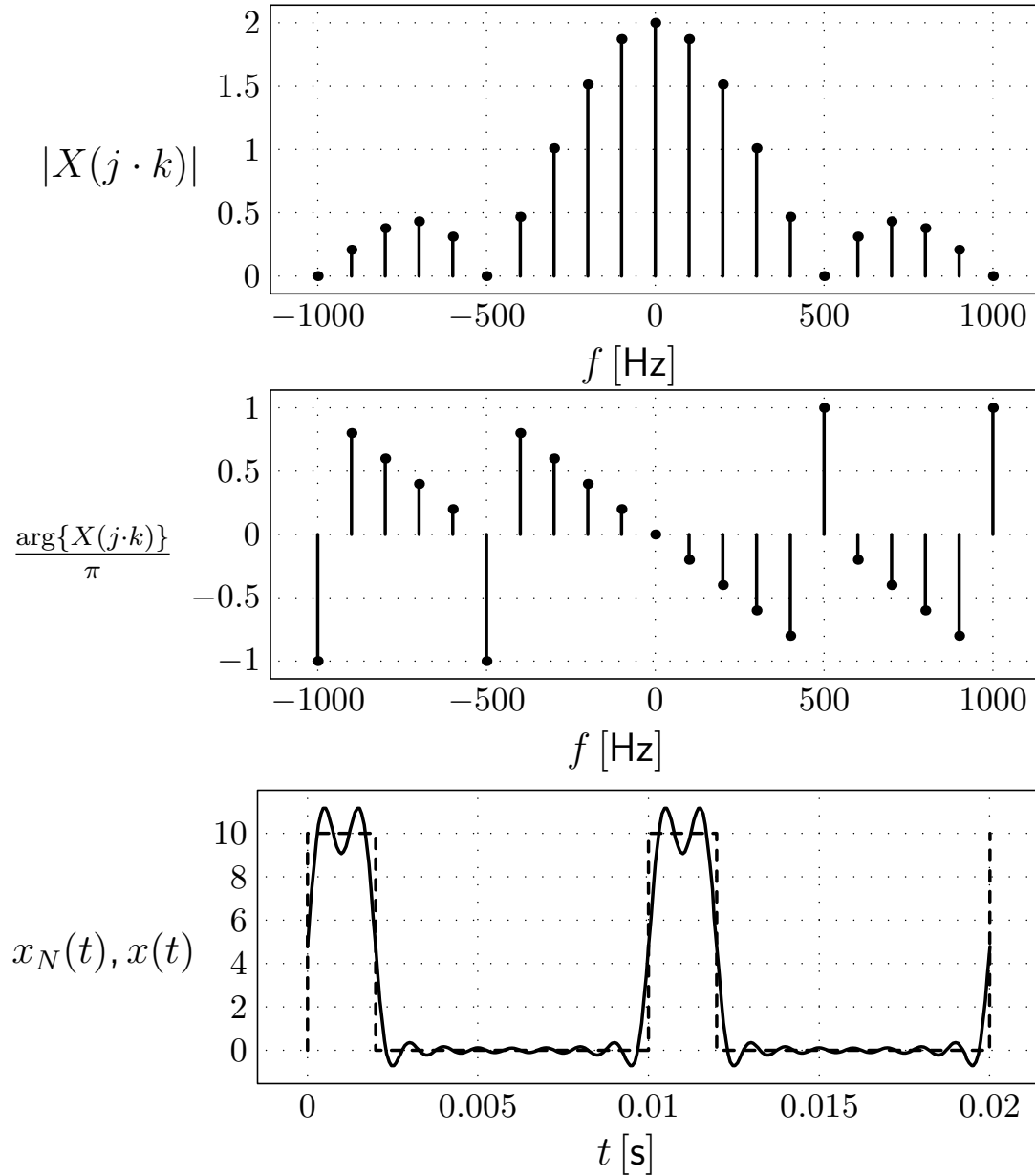


FIG. 1.5 – $x_N(t)$ est la synthèse du signal $x(t)$ basée sur les $N = 10$ premiers termes de la série de Fourier complexe : $x_{10}(t) = \sum_{k=-10}^{+10} X(j \cdot k) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t}$. On remarque bien sûr la très forte ressemblance avec $x(t)$ tel qu'il apparaît sur le haut de la figure 1.4 .

Le second signal est une SIR d'amplitude $A = 9$ de période $T = \frac{1}{f_0} = 10$ [ms], de largeur $\Delta t = \frac{T}{2} = 5$ [ms], retardée d'une durée $t_d = \frac{\Delta t}{2} = 2.5$ [ms] à laquelle on a soustrait un offset de 3. On en déduit :

$$\begin{aligned} X(j \cdot k) &= A \cdot \frac{\Delta t}{T} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \Delta t)}{k \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \Delta t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t_d} \\ &= 9 \cdot \frac{5 \text{ [ms]}}{10 \text{ [ms]}} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot 100 \text{ [Hz]} \cdot 5 \text{ [ms]})}{k \cdot \pi \cdot 100 \text{ [Hz]} \cdot 5 \text{ [ms]}} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot 100 \text{ [Hz]} \cdot 2.5 \text{ [ms]}} \end{aligned}$$

ce à quoi il faut soustraire l'offset de 3 pour $k = 0$.

Les résultats (spectres bilatéraux d'amplitude et de phase) sont donnés sur la figure 1.6 page ci-contre. Sur la même figure, on trouve la synthèse de $x(t)$ basée sur les $N = 10$ premiers termes $X(j \cdot k)$ du développement en série de Fourier complexe :

$$x_{10}(t) = \sum_{k=-10}^{+10} X(j \cdot k) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t}$$

Un code MATLAB permettant de calculer $X_2(j \cdot k)$ et tracer les spectres bilatéraux de gain et de phase est donné ci-dessous.

(fichier source)

```

%Initialisation
clc;clear all;close all;

%Parametres
A=9;
T = 10e-3;
delta_t = 5e-3;
td = -2.5e-3;

%numeros des harmoniques a calculer
N = 10;
k = [-N:N];

%k <> 0
X = A*delta_t/T*sinc(k/2).*exp(-j*k*pi/2);
%k=0
X(8)=-3+A*delta_t/T;

%Tracage
figure
subplot(211)
stem(k/T,abs(X))
xlabel('kf_0_ [Hz]')
ylabel('|X_2(jk)|')
grid
subplot(212)
stem(k/T,angle(X)/pi)
xlabel('kf_0_ [Hz]')
ylabel('arg{X_2(jk)}')
grid

```

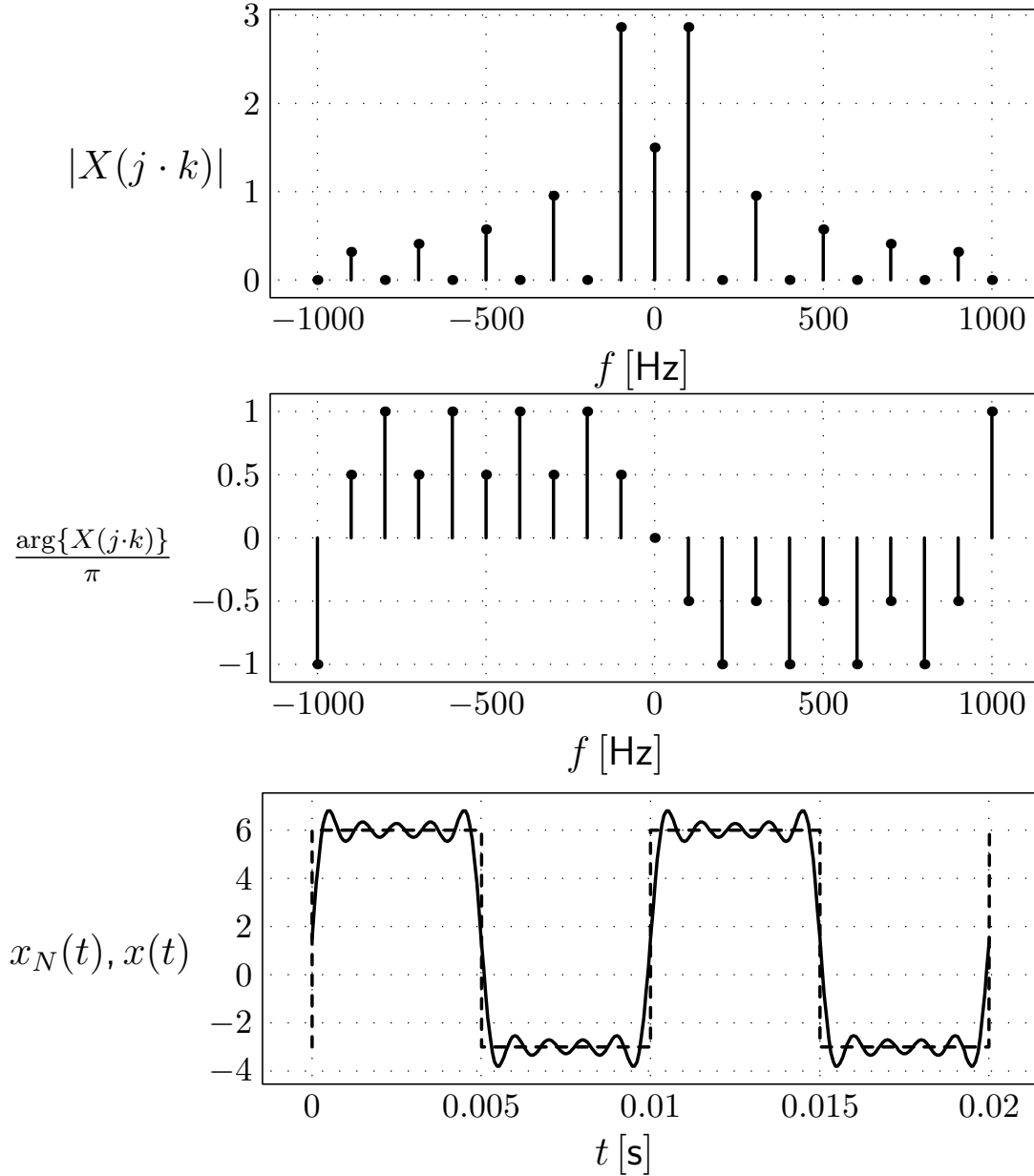
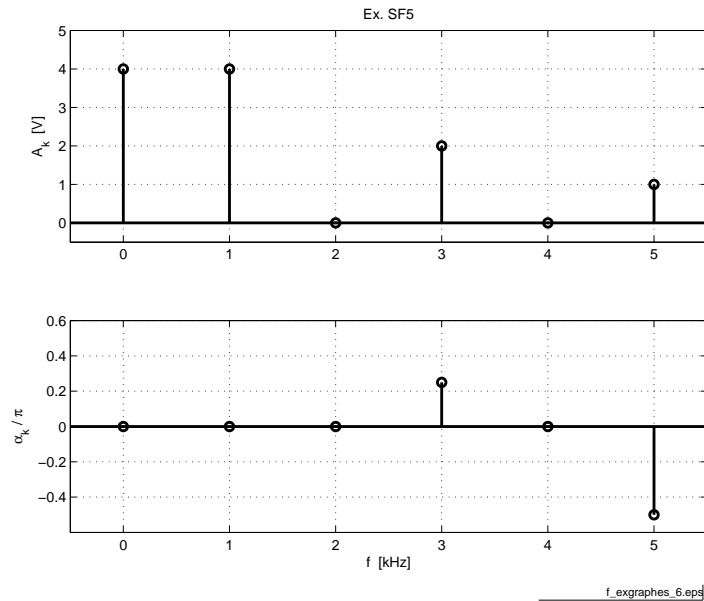


FIG. 1.6 – $x_N(t)$ est la synthèse du signal $x(t)$ basée sur les $N = 10$ premiers termes de la série de Fourier complexe : $x_{10}(t) = \sum_{k=-10}^{+10} X(j \cdot k) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t}$. On remarque bien sûr la très forte ressemblance avec $x(t)$ tel qu'il apparaît sur le bas de la figure 1.4 ([fichier source](#)).

FIG. 1.7 – Exercice SF 5 ([fichier source](#)).

1.1.5 Exercice SF 5

Considérant les spectres unilatéraux (figure 1.7) d'un signal $x(t)$:

1. donnez l'expression de $x(t)$;
2. dessinez son spectre bilatéral ;
3. calculez sa puissance et sa valeur efficace.

Corrigé

1. Au spectre unilatéral est associé directement le développement en série en cosinus. On a donc :

$$x(t) = 4 + 4 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 \text{ [kHz]} \cdot t) + 2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 3 \text{ [kHz]} \cdot t + 0.2 \cdot \pi) + 1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 5 \text{ [kHz]} \cdot t - 0.45 \cdot \pi)$$

2. Les spectres d'amplitude et de phase sont représentés sur la figure 1.8.
- 3.

$$P = A_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 = 4^2 + \frac{4^2}{2} + \frac{2^2}{2} + \frac{1^2}{2} = 26.5 \text{ [V}^2\text{]}$$

$$X_{\text{eff}} = \sqrt{P} = \sqrt{26.5} = 5.15 \text{ [V]}$$

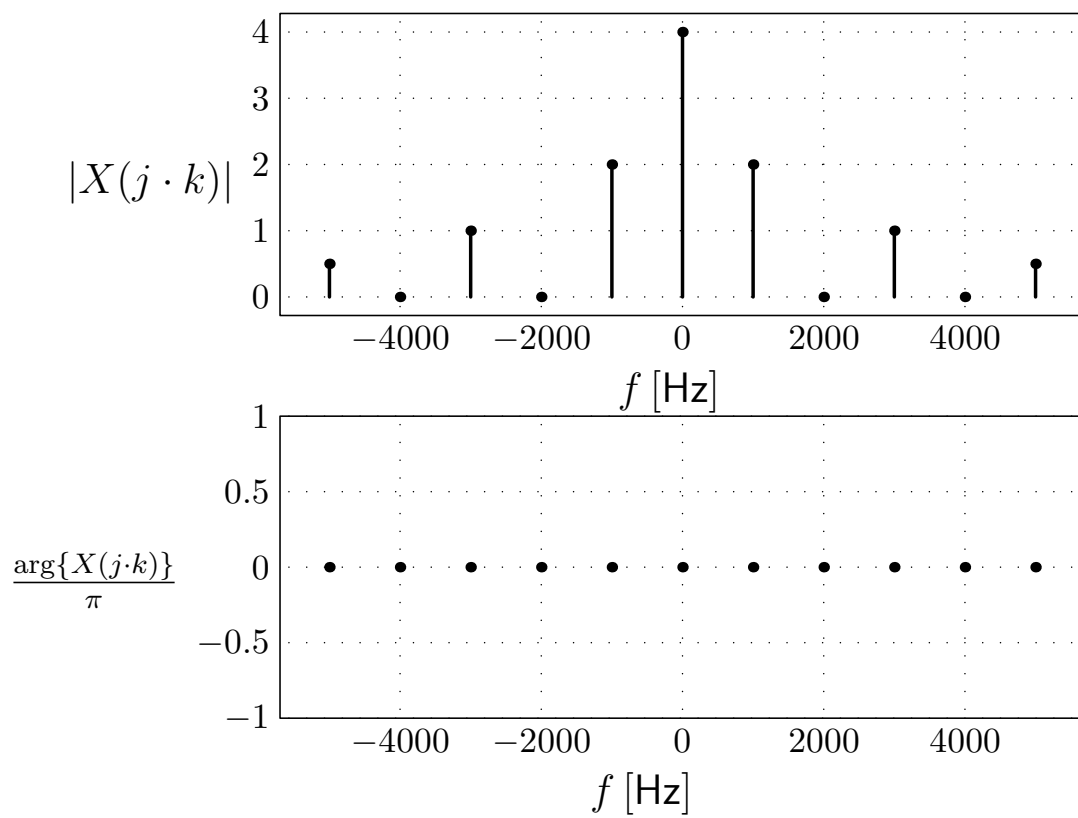


FIG. 1.8 – Ex SF 5.

| | | | | | | |
|----------|----------------|----|-------------------|---------|------------------|---------|
| | k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $x_1(t)$ | a_k | +2 | +5 | -2 | +1 | 0 |
| | b_k | | +4 | +3 | -1 | 0 |
| | k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $x_2(t)$ | A_k | 1 | 3 | 0 | 2 | 0 |
| | α_k | 0 | $-\frac{\pi}{3}$ | 0 | $+\frac{\pi}{2}$ | 0 |
| | k | 0 | ± 1 | ± 2 | ± 3 | ± 4 |
| $x_3(t)$ | $X(j \cdot k)$ | 5 | $4 \pm j \cdot 3$ | 0 | $-2 \pm j$ | 0 |

TAB. 1.1 – Exercice SF 6.

1.1.6 Exercice SF 6

Considérant les trois signaux $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ de période $T = 1$ [ms] décrits par leurs spectres respectifs (tableau 1.1) :

1. donnez l'expression temporelle des trois signaux ;
2. écrivez ces expressions à l'aide de cosinus seulement ;
3. dessinez leurs spectres d'amplitude et de phase uni- et bilatéraux.

Corrigé

1. Expressions temporelles de $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \\
 &= \frac{2}{2} + 5 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t) + 4 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t) - 2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot f_0 \cdot t) + 3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot f_0 \cdot t) \\
 &\quad + 1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t) - 1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t) \\
 &= 1 + 5 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 4 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) - 2 \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 3 \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \\
 &\quad + 1 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) - 1 \cdot \sin(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_2(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t + \alpha_k) \\
 &= 1 + 3 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t - \frac{\pi}{3}\right) + 2 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j \cdot k) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t} \\
&= X(-j \cdot 3) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t} + X(-j \cdot 1) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t} + X(j \cdot 0) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot f_0 \cdot t} + X(j \cdot 1) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t} + X(j \cdot 3) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t} \\
&= (-2 - j) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t} + (4 - j \cdot 3) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t} + 5 + (4 + j \cdot 3) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t} + (-2 + j) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t} \\
&= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} \cdot e^{j \cdot \arctan\left(\frac{-1}{-2}\right)} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t} + \sqrt{4^2 + (-3)^2} \cdot e^{j \cdot \arctan\left(\frac{-3}{4}\right)} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t} \\
&\quad + 5 + \sqrt{4^2 + 3^2} \cdot e^{j \cdot \arctan\left(\frac{3}{4}\right)} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t} + \sqrt{(-2)^2 + 1^2} \cdot e^{j \cdot \arctan\left(\frac{1}{-2}\right)} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t} \\
&= \sqrt{5} \cdot e^{j \cdot \arctan\left(\frac{-1}{-2}\right)} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t} + \sqrt{25} \cdot e^{j \cdot \arctan\left(\frac{-3}{4}\right)} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t} + 5 + \sqrt{25} \cdot e^{j \cdot \arctan\left(\frac{3}{4}\right)} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t} + \sqrt{5} \cdot e^{j \cdot \arctan\left(\frac{1}{-2}\right)} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t} \\
&= \sqrt{5} \cdot e^{-j \cdot 2.6779} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t} + 5 \cdot e^{-j \cdot 0.6435} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t} + 5 + 5 \cdot e^{j \cdot 0.6435} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t} + \sqrt{5} \cdot e^{j \cdot 2.6779} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t} \\
&= 5 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{e^{j \cdot 2.6779} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2.6779} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t}}{2} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{e^{j \cdot 0.6435} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 0.6435} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t}}{2} \\
&= 5 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t + 2.6779) + 10 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t + 0.6435)
\end{aligned}$$

2. Expressions de $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ à l'aide de cosinus seulement. partant des résultats ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= 1 + 5 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 4 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) - 2 \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 3 \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \\
&\quad + 1 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) - 1 \cdot \sin(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \\
&= 1 + \sqrt{5^2 + 4^2} \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \arctan\left(\frac{-4}{5}\right)\right) + \sqrt{(-2)^2 + 3^2} \cdot \cos\left(4 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \arctan\left(\frac{-3}{-2}\right)\right) \\
&\quad + \sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot \cos\left(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \arctan\left(\frac{-(-1)}{1}\right)\right) \\
&= 1 + \sqrt{41} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - 0.675) + \sqrt{13} \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - 2.16) + \sqrt{2} \cdot \cos\left(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) \\
&= A_0 + A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1) + A_2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t + \alpha_2) + A_3 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t + \alpha_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_2(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t + \alpha_k) \\
 &= 1 + 3 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t - \frac{\pi}{3}\right) + 2 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= A_0 + A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1) + A_3 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t + \alpha_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_3(t) &= 5 + 10 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t + 0.6435) + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t + 2.6779) \\
 &= A_0 + A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1) + A_3 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t + \alpha_3)
 \end{aligned}$$

3. Spectres unilatéraux et bilatéraux d'amplitude et de phase de $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$:

$x_1(t)$ Le spectre unilatéral correspond directement à l'expression de $x_1(t)$ en cosinus :

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= 1 + \sqrt{41} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - 0.675) + \sqrt{13} \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - 2.16) + \sqrt{2} \cdot \cos\left(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= A_0 + A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1) + A_2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t + \alpha_2) + A_3 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t + \alpha_3)
 \end{aligned}$$

Le spectre bilatéral s'en déduit facilement :

| k | 0 | 1 | 2 | 3 |
|----------------|--------------------------|---|--|--|
| A_k | $A_0 = 1$ | $A_1 = \sqrt{41}$ | $A_2 = \sqrt{13}$ | $A_3 = \sqrt{2}$ |
| α_k | $\alpha_0 = 0$ | $\alpha_1 = -0.675$ | $\alpha_2 = -2.16$ | $\alpha_3 = +\frac{\pi}{4}$ |
| k | 0 | ± 1 | ± 2 | ± 3 |
| $X(j \cdot k)$ | $X(j \cdot 0) = A_0 = 1$ | $X(\pm j \cdot 1) = \frac{A_1}{2} \cdot e^{\pm j \cdot \alpha_1} = \frac{\sqrt{41}}{2} \cdot e^{\mp j \cdot 0.675}$ | $X(\pm j \cdot 2) = \frac{A_2}{2} \cdot e^{\pm j \cdot \alpha_2} = \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot e^{\mp j \cdot 2.16}$ | $X(\pm j \cdot 3) = \frac{A_3}{2} \cdot e^{\pm j \cdot \alpha_3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\pm j \cdot \frac{\pi}{4}}$ |

La représentation graphique des spectre uni- et bilatéraux est donnée sur la figure 1.9.

$x_2(t)$ Le spectre unitlatéral correspond directement à l'expression de $x_2(t)$ en cosinus :

$$\begin{aligned} x_2(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t + \alpha_k) \\ &= 1 + 3 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t - \frac{\pi}{3}\right) + 2 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= A_0 + A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1) + A_3 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t + \alpha_3) \end{aligned}$$

Le spectre bilatéral s'en déduit facilement :

| k | 0 | 1 | 2 | 3 |
|----------------|--------------------------|---|------------------------|---|
| A_k | $A_0 = 1$ | $A_1 = 3$ | $A_2 = 0$ | $A_3 = 2$ |
| α_k | $\alpha_0 = 0$ | $\alpha_1 = -\frac{\pi}{3}$ | $\alpha_2 = 0$ | $\alpha_3 = +\frac{\pi}{2}$ |
| k | 0 | ± 1 | ± 2 | ± 3 |
| $X(j \cdot k)$ | $X(j \cdot 0) = A_0 = 1$ | $X(\pm j \cdot 1) = \frac{A_1}{2} \cdot e^{\pm j \cdot \alpha_1} = \frac{3}{2} \cdot e^{\mp j \cdot \frac{\pi}{3}}$ | $X(\pm j \cdot 2) = 0$ | $X(\pm j \cdot 3) = \frac{A_3}{2} \cdot e^{\pm j \cdot \alpha_3} = \frac{2}{2} \cdot e^{\pm j \cdot \frac{\pi}{2}} = e^{\pm j \cdot \frac{\pi}{2}}$ |

La représentation graphique des spectre uni- et bilatéraux est donnée sur la figure 1.10.

$x_3(t)$ Le spectre unitlatéral correspond directement à l'expression de $x_3(t)$ en cosinus :

$$\begin{aligned} x_3(t) &= 5 + 10 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t + 0.6435) + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t + 2.6779) \\ &= A_0 + A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1) + A_3 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t + \alpha_3) \end{aligned}$$

Le spectre bilatéral a déjà été obtenu au précédemment : on avait :

$$\begin{aligned} x_3(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j \cdot k) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t} \\ &= X(-j \cdot 3) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t} + X(-j \cdot 1) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t} + X(j \cdot 0) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot f_0 \cdot t} + X(j \cdot 1) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t} + X(j \cdot 3) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t} \\ &= \sqrt{5} \cdot e^{-j \cdot 2.6779} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t} + 5 \cdot e^{-j \cdot 0.6435} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t} + 5 + 5 \cdot e^{j \cdot 0.6435} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t} + \sqrt{5} \cdot e^{j \cdot 2.6779} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot f_0 \cdot t} \end{aligned}$$

Si l'on répète néanmoins la même opération que pour $x_1(t)$ et $x_2(t)$, on a :

| k | 0 | 1 | 2 | 3 |
|----------------|--------------------------|--|------------------------|---|
| A_k | $A_0 = 5$ | $A_1 = 10$ | $A_2 = 0$ | $A_3 = 2 \cdot \sqrt{5}$ |
| α_k | $\alpha_0 = 0$ | $\alpha_1 = 0.6435$ | $\alpha_2 = 0$ | $\alpha_3 = 2.6779$ |
| k | 0 | ± 1 | ± 2 | ± 3 |
| $X(j \cdot k)$ | $X(j \cdot 0) = A_0 = 5$ | $X(\pm j \cdot 1) = \frac{A_1}{2} \cdot e^{\pm j \cdot \alpha_1} = \frac{10}{2} \cdot e^{\pm j \cdot 0.6435} = 5 \cdot e^{\pm j \cdot 0.6435}$ | $X(\pm j \cdot 2) = 0$ | $X(\pm j \cdot 3) = \frac{A_3}{2} \cdot e^{\pm j \cdot \alpha_3} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{2} \cdot e^{\pm j \cdot 2.6779} = \sqrt{5} \cdot e^{\pm j \cdot 2.6779}$ |

La représentation graphique des spectre uni- et bilatéraux est donnée sur la figure 1.11.

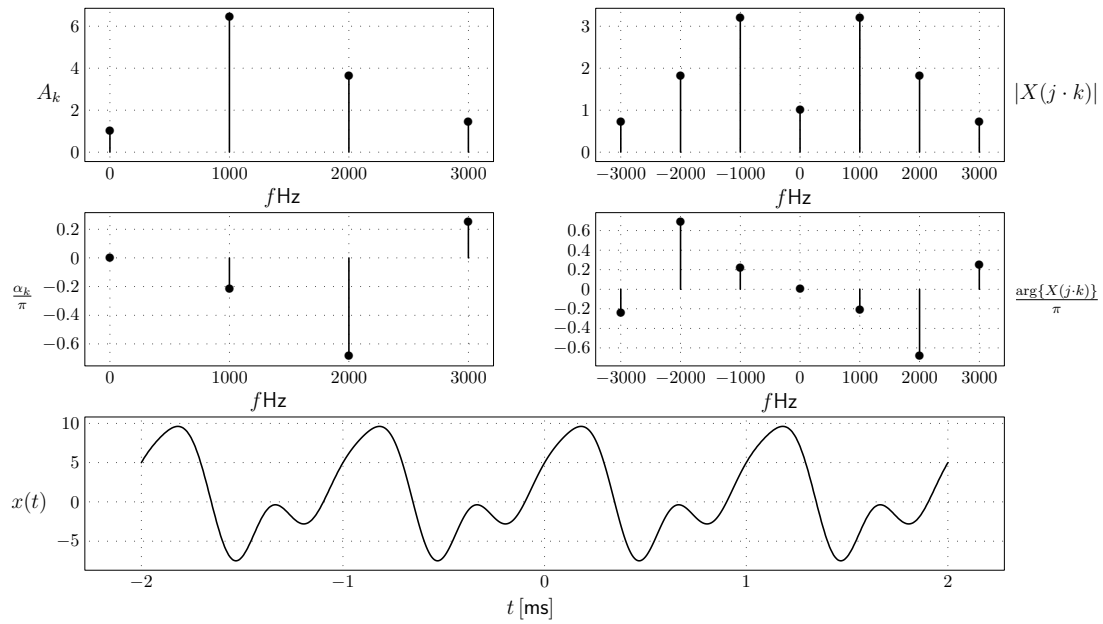


FIG. 1.9 – (fichier source).

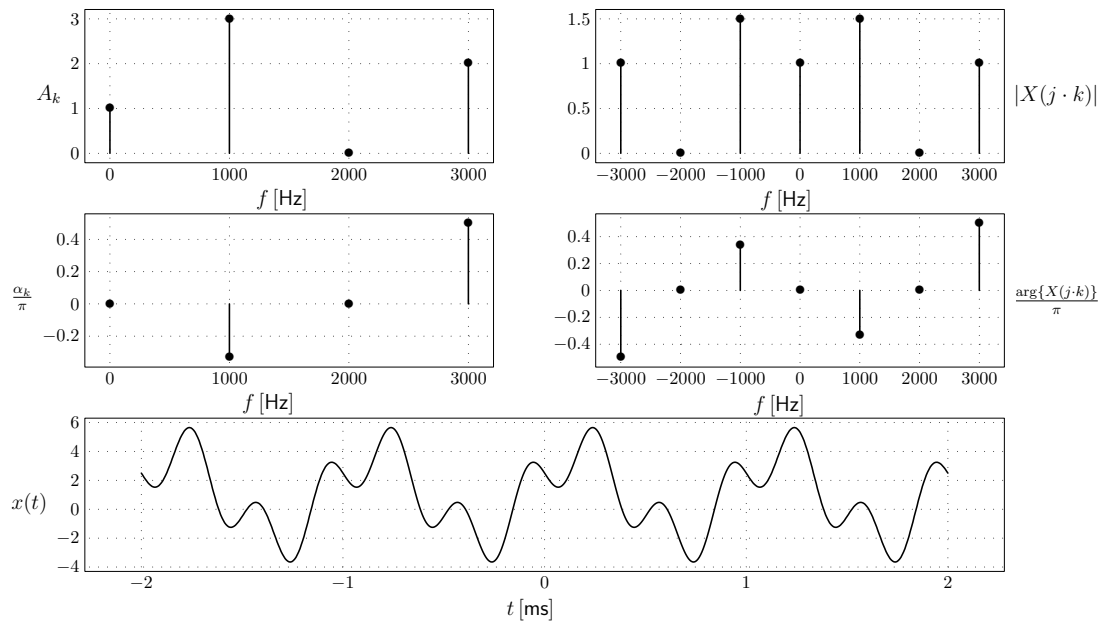


FIG. 1.10 – (fichier source).

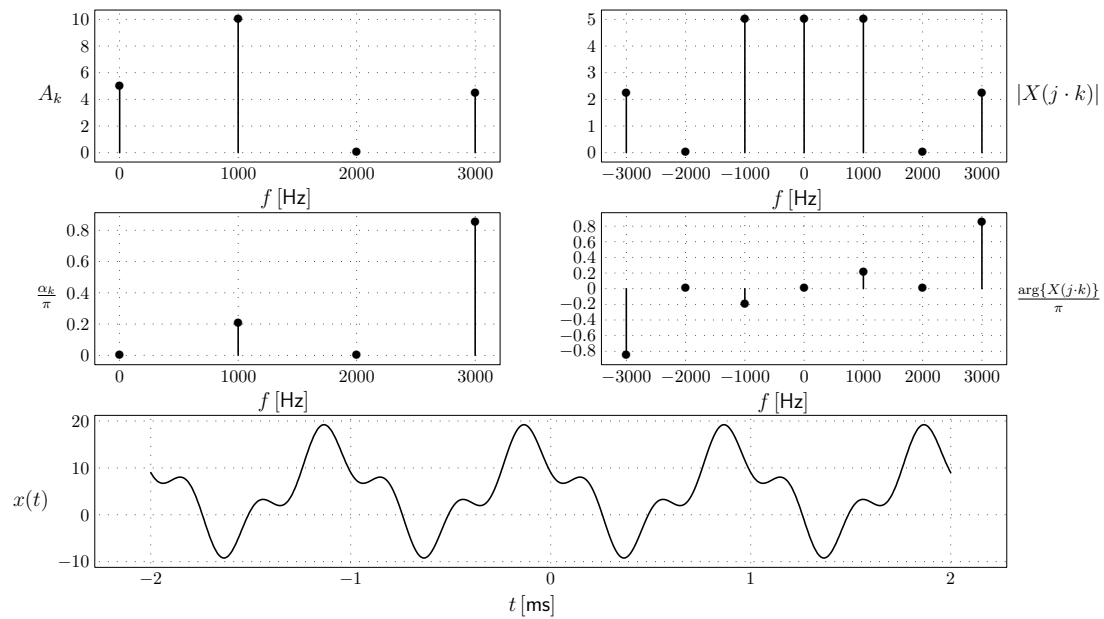


FIG. 1.11 – (fichier source).

1.1.7 Exercice SF 7

Calculez la puissance de chacun des trois signaux de l'exercice 1.1.6 page 22.

Corrigé

$x_1(t)$:

$$\begin{aligned}
 P &= A_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \\
 &= A_0^2 + \frac{1}{2} \cdot (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) \\
 &= 1^2 + \frac{1}{2} \cdot [\sqrt{5^2 + 4^2}^2 + \sqrt{(-2)^2 + 3^2}^2 + \sqrt{1 + (-1)^2}^2] \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot [41 + 13 + 2] \\
 &= 29 \text{ [V}^2\text{]}
 \end{aligned}$$

$x_2(t)$:

$$\begin{aligned}
 P &= A_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \\
 &= A_0^2 + \frac{1}{2} \cdot (A_1^2 + A_2^2) \\
 &= 1^2 + \frac{1}{2} \cdot [3^2 + 2^2] \\
 &= 7.5 \text{ [V}^2\text{]}
 \end{aligned}$$

$x_3(t)$:

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X(j \cdot k)|^2 \\
 &= |X(j \cdot 0)| + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |X(j \cdot k)|^2 \\
 &= 5^2 + 2 \cdot (\sqrt{4^2 + 3^2}^2 + \sqrt{2^2 + 1^2}^2) \\
 &= 85 \text{ [V}^2\text{]}
 \end{aligned}$$

1.1.8 Exercice SF 8

Considérant le signal $x(t) = 2 + \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 0.25 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$

1. écrivez $x(t)$ dans les formes cosinus et complexe ;
2. donnez les composantes spectrales dans les trois représentations :

$$\{a_k, b_k\} \quad \{A_k, \alpha_k\} \quad \{X(j \cdot k)\}$$

3. vérifiez que la puissance de ce signal calculée à l'aide des trois représentations donne le même résultat ;
4. comment calculeriez-vous la puissance dans l'espace temps ? voyez-vous des moyens de simplifier ce calcul ? Si oui, le résultat est immédiat.

Corrigé

1. On a pour la série en cosinus :

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 + \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 0.25 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \\ &= 2 + \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) + 0.25 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \\ &= A_0 + A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1) + A_3 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_3) \end{aligned}$$

Partant de la série en cosinus, on obtient facilement la série complexe en faisant usage des formule d'Euler :

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 + \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) + 0.25 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \\ &= 2 + \frac{1}{2} \cdot e^{+j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \frac{\pi}{2})} + \frac{1}{2} \cdot e^{-j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \frac{\pi}{2})} + 0.25 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{+j \cdot (6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)} + 0.25 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-j \cdot (6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)} \\ &= X(0) + X(+j \cdot 1) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + X(-j \cdot 1) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + X(+j \cdot 3) \cdot e^{+j \cdot 6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + X(-j \cdot 3) \cdot e^{-j \cdot 6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} \\ &= 2 + \frac{1}{2} \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + \frac{1}{2} \cdot e^{+j \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + \frac{0.25}{2} \cdot e^{+j \cdot 6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + \frac{0.25}{2} \cdot e^{-j \cdot 6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} \end{aligned}$$

2. Série en cosinus :

$$A_0 = 2$$

$$A_1 = 1$$

$$A_3 = 0.25$$

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_3 = 0$$

Série de Fourier :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 2 \cdot A_0 & = 2 \cdot 2 = 4 \\
 a_1 &= +A_1 \cdot \cos(\alpha_1) & = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\
 b_1 &= -A_1 \cdot \sin(\alpha_1) & = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\
 a_3 &= +A_3 \cdot \cos(\alpha_3) & = 0.25 \cdot \cos(0) = 0.25 \\
 b_3 &= -A_3 \cdot \sin(\alpha_3) & = -0.25 \cdot \sin(0) = 0
 \end{aligned}$$

Série complexe :

$$\begin{aligned}
 X(j \cdot 0) &= 2 \\
 X(\pm j \cdot 1) &= 0.5 \cdot e^{\mp j \cdot \frac{\pi}{2}} \\
 X(\pm j \cdot 3) &= 0.125 \cdot e^{j \cdot 0}
 \end{aligned}$$

3. Série de Fourier :

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{a_k^2 + b_k^2}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot [a_1^2 + b_1^2 + a_3^2 + b_3^2] \\
 &= \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot [0^2 + 1^2 + 0.25^2 + 0^2] \\
 &= 4.52125 \text{ [V}^2\text{]}
 \end{aligned}$$

Série en cosinus :

$$\begin{aligned}
 P &= A_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \\
 &= 2^2 + \frac{1}{2} \cdot [A_1^2 + A_3^2] \\
 &= 2^2 + \frac{1}{2} \cdot [1^2 + 0.25^2] \\
 &= 4.52125 \text{ [V}^2\text{]}
 \end{aligned}$$

Série complexe :

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(j \cdot k)|^2 \\
 &= |X(-j \cdot 3)|^2 + |X(-j \cdot 1)|^2 + |X(j \cdot 0)|^2 + |X(j \cdot 1)|^2 + |X(j \cdot 3)|^2 \\
 &= 0.125^2 + 0.5^2 + 2^2 + 0.5^2 + 0.125^2 \\
 &= 4.52125 \text{ [V}^2\text{]}
 \end{aligned}$$

4. La puissance dans l'espace temps se calcule comme :

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t) \cdot dt \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} [2 + \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 0.25 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)]^2 \cdot dt
 \end{aligned}$$

La fonction à intégrer peut être mise sous la forme :

$$\begin{aligned}
 & [2 + (\sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 0.25 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t))]^2 \\
 &= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \left(\underbrace{\sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)}_{f_T=0} + 0.25 \cdot \underbrace{\cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)}_{f_T=0} \right) + (\sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 0.25 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t))^2
 \end{aligned}$$

Pour la somme de sinus au carré, on a :

$$\begin{aligned}
 & (\sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 0.25 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t))^2 \\
 &= \sin^2(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \cdot 0.25 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 0.25^2 \cdot \cos^2(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \\
 &= \sin^2(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 0.5 \cdot \underbrace{\sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)}_{\frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + 6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - 6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)} + 0.25^2 \cdot \cos^2(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \\
 &= \sin^2(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 0.25 \cdot \underbrace{(\sin(8 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + \sin(-4 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t))}_{f_T=0} + 0.25^2 \cdot \cos^2(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)
 \end{aligned}$$

Pour le calcul de la puissance dans le domaine temporel, il suffit donc d'évaluer :

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t) \cdot dt \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} [2 + \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 0.25 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)]^2 \cdot dt \\
 &= \dots \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} [2^2 + \sin^2(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 0.25^2 \cdot \cos^2(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)] \cdot dt
 \end{aligned}$$

Autrement dit, il suffit de sommer les carrés des valeurs efficaces de 2 , $\sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$ et $0.25 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$, soit :

$$P = 2^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0.25^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4.53125 [\text{V}^2]$$

1.1.9 Exercice SF 15

Considérant une SIR centrée de période $T = 100 [\mu\text{s}]$, de largeur $\Delta t = 20 [\mu\text{s}]$ et d'amplitude $A = 10 [\text{V}]$,

1. calculez le pourcentage de puissance comprise dans le premier lobe du sinus cardinal ;
2. admettant que cette SIR est appliquée à un filtre passe-bas d'ordre 1 dont la fonction de transfert est

$$H(j \cdot f) = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{f}{f_c}} \quad f_c = 10 [\text{kHz}]$$

que valent l'amplitude et la phase des composantes 10 [kHz], 40 [kHz] et 150 [kHz] ?

Corrigé

La série de Fourier complexe d'une SIR a été calculée dans le cours. On a :

$$\begin{aligned} X(j \cdot k) &= A \cdot \frac{\Delta t}{T} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \Delta t)}{k \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \Delta t} \\ &= 10 [\text{V}] \cdot \frac{20 [\mu\text{s}]}{100 [\mu\text{s}]} \cdot \frac{\sin\left(k \cdot \pi \cdot \frac{1}{100 [\mu\text{s}]} \cdot 20 [\mu\text{s}]\right)}{k \cdot \pi \cdot \frac{1}{100 [\mu\text{s}]} \cdot 20 [\mu\text{s}]} \\ &= 2 [\text{V}] \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot 0.2)}{k \cdot \pi \cdot 0.2} \end{aligned}$$

Le spectre d'amplitude s'annule pour la première fois pour $k = 5$ (figure 1.12 page suivante). Le premier lobe du spectre est donc constitué des raies (pour mémoire, on a $|X(j \cdot k)| = |X(-j \cdot k)|$)

$$\begin{aligned} X(-j \cdot 5) &= 0 \\ X(-j \cdot 4) &= 0.4677 \\ X(-j \cdot 3) &= 1.0091 \\ X(-j \cdot 2) &= 1.5136 \\ X(-j \cdot 1) &= 1.871 \\ X(j \cdot 0) &= 2 \\ X(j \cdot 1) &= 1.871 \\ X(j \cdot 2) &= 1.5136 \\ X(j \cdot 3) &= 1.0091 \\ X(j \cdot 4) &= 0.4677 \\ X(j \cdot 5) &= 0 \end{aligned}$$

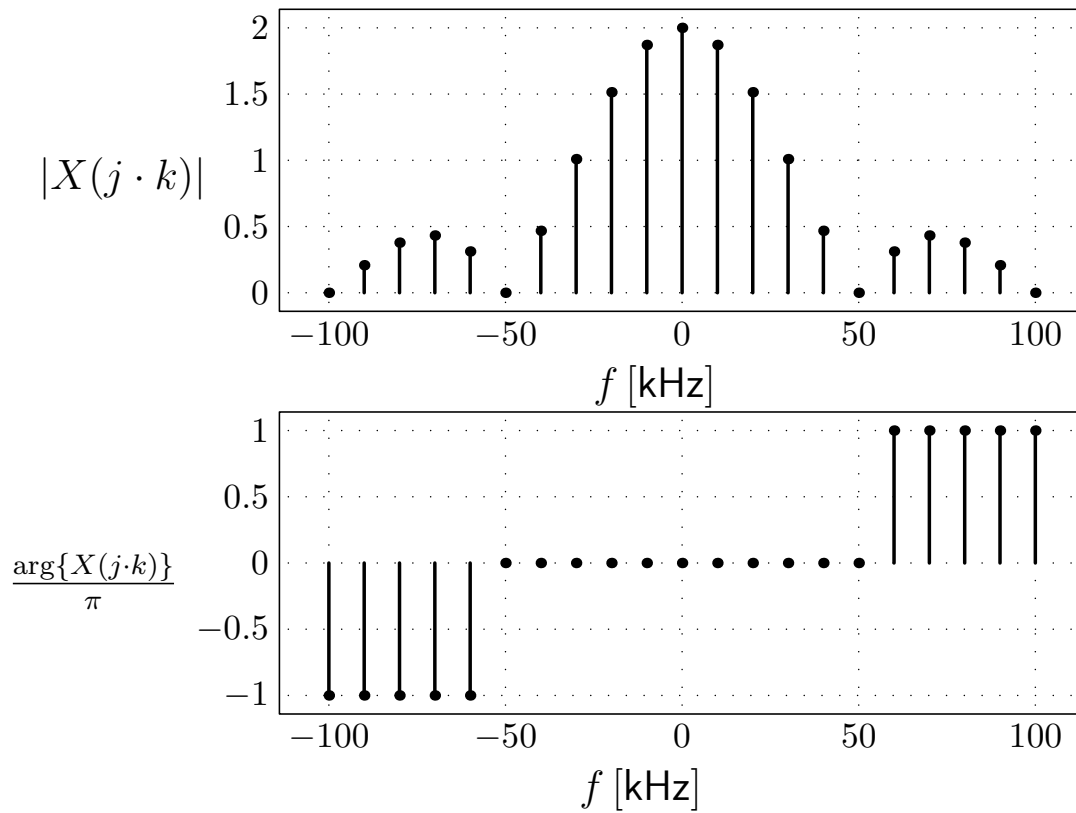


FIG. 1.12 – $f_0 = \frac{1}{100[\mu\text{s}]} = 10$ [kHz] (fichier source).

1. La puissance correspondante est ainsi :

$$\begin{aligned} P_{\pm 5} &= \sum_{k=-5}^{+5} |X(j \cdot k)|^2 = X(0)^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{+5} |X(j \cdot k)|^2 \\ &= 2^2 + 2 \cdot (1.871^2 + 1.5136^2 + 1.0091^2 + 0.4677^2) = 18.05756 [\text{V}^2] \end{aligned}$$

La puissance totale du signal se calcule aisément dans le domaine temporel :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t) \cdot dt \\ &= \frac{1}{100 [\mu\text{s}]} \cdot \int_{-\frac{100 [\mu\text{s}]}{2}}^{+\frac{100 [\mu\text{s}]}{2}} x^2(t) \cdot dt \\ &= \frac{1}{100 [\mu\text{s}]} \cdot \int_{-\frac{10 [\mu\text{s}]}{2}}^{+\frac{10 [\mu\text{s}]}{2}} (10 [\text{V}])^2 \cdot dt \\ &= \frac{1}{100 [\mu\text{s}]} \cdot (10 [\text{V}])^2 \cdot \int_{-\frac{10 [\mu\text{s}]}{2}}^{+\frac{10 [\mu\text{s}]}{2}} dt \\ &= \frac{1}{100 [\mu\text{s}]} \cdot (10 [\text{V}])^2 \cdot [t]_{-\frac{10 [\mu\text{s}]}{2}}^{+\frac{10 [\mu\text{s}]}{2}} \\ &= \frac{1}{100 [\mu\text{s}]} \cdot (10 [\text{V}])^2 \cdot \left[+\frac{10 [\mu\text{s}]}{2} - \left(-\frac{10 [\mu\text{s}]}{2}\right) \right] \\ &= \frac{20 [\mu\text{s}]}{100 [\mu\text{s}]} \cdot (10 [\text{V}])^2 \\ &= 20 [\text{V}^2] \end{aligned}$$

La puissance contenue dans le premier lobe de $X(j \cdot k)$ représente donc

$$\frac{P_{\pm 5}}{P} = \frac{18.05756 [\text{V}^2]}{20 [\text{V}^2]} \approx 90\%$$

de la puissance totale du signal.

2. Il suffit d'injecter dans $H(j \cdot f) = \frac{1}{1+j \cdot \frac{f}{f_c}}$ les harmoniques de $x(t)$ correspondant à 10 [kHz], 40 [kHz] et 150 [kHz], soit $X(j \cdot 1)$, $X(j \cdot 4)$ et $X(j \cdot 15)$, et d'extraire le module et l'argument du résultat $Y(j \cdot k)$:

$$Y(j \cdot 1) = \frac{1}{1+j \cdot \frac{f}{f_c}} \cdot X(j \cdot 1) = \frac{1}{1+j \cdot \frac{10 [\text{kHz}]}{10 [\text{kHz}]}} \cdot 1.871 = 0.9355 - 0.9355 \cdot j = 1.323 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{4}}$$

$$Y(j \cdot 4) = \frac{1}{1+j \cdot \frac{f}{f_c}} \cdot X(j \cdot 4) = \frac{1}{1+j \cdot \frac{40 [\text{kHz}]}{10 [\text{kHz}]}} \cdot 0.4677 = 0.0275 - 0.1100 \cdot j = 0.1134 \cdot e^{-j \cdot 1.3258}$$

$$Y(j \cdot 15) = \frac{1}{1+j \cdot \frac{f}{f_c}} \cdot X(j \cdot 15) = \frac{1}{1+j \cdot \frac{150 [\text{kHz}]}{10 [\text{kHz}]}} \cdot 0 = 0$$

On remarquera le cas particulier où $f = f_c = 10$ [kHz], i.e. celui où la fréquence du signal d'excitation $x(t)$ coïncide avec la fréquence caractéristique (ou fréquence de coupure) du filtre $H(j \cdot f)$:

(a) Le déphasage est d'exactement $\arg \{H(j \cdot f_c)\} = -\frac{\pi}{4}$;

(b) L'atténuation est de $|H(j \cdot f)| = \frac{1.323}{1.871} = 0.7071 = \frac{\sqrt{2}}{2} = -3$ [dB].

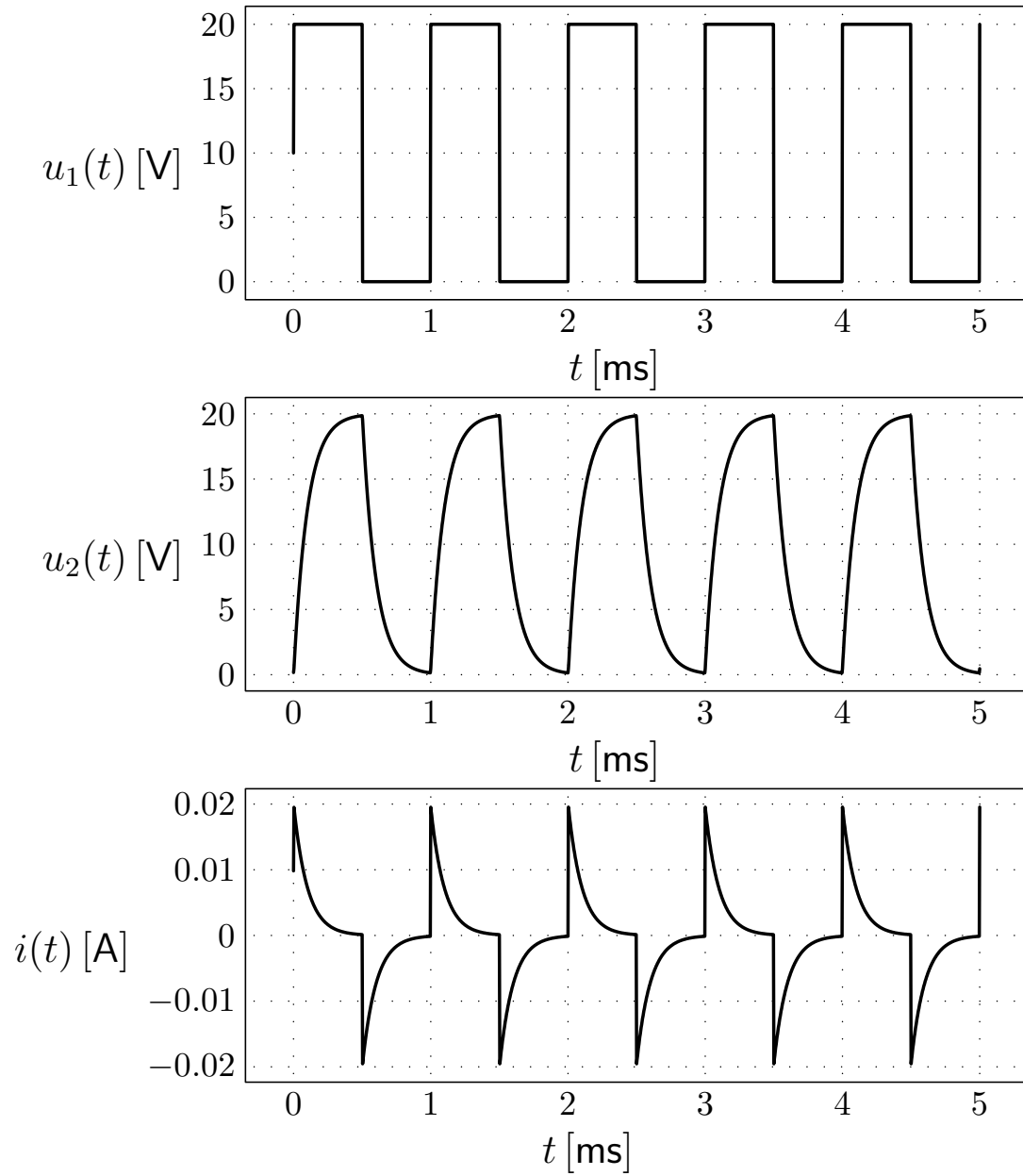
1.1.10 Exercice SF 16

Un filtre passe-bas RC réalisé avec $R = 1$ [k Ω] et $C = 0.1$ [μ F] est excité par un signal carré $u_1(t)$ de période $T = 1$ [ms] et d'amplitude comprise entre 0 et 20 [V] :

1. esquissez le signal de sortie $u_2(t)$ et le courant $i(t)$;
2. pour chacun des 3 signaux $u_1(t)$, $u_2(t)$, $i(t)$, calculez leurs valeurs DC, efficace totale et efficace AC.

Corrigé

On a pour la tension de sortie $u_2(t)$ ainsi que le courant $i(t)$:



Puissance du signal $u_1(t)$ La valeur DC n'est autre que la valeur moyenne $X(j \cdot 0)$ du signal. Partant de la définition de $X(j \cdot k)$

$$X(j \cdot k) = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t} \cdot dt \quad -\infty < k < +\infty$$

on a, pour $k = 0$:

$$\begin{aligned} U_1(j \cdot 0) &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot f_0 \cdot t} \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot dt \\ &= \frac{1}{1 \text{ [ms]}} \cdot \int_{-\frac{1 \text{ [ms]}}{2}}^{+\frac{1 \text{ [ms]}}{2}} x(t) \cdot dt \\ &= \frac{1}{1 \text{ [ms]}} \cdot \int_0^{+\frac{1 \text{ [ms]}}{2}} 20 \text{ [V]} \cdot dt \\ &= 10 \text{ [V]} \end{aligned}$$

La puissance AC se calcule par déduction de la puissance DC $P_{dc} = |U_1(j \cdot 0)|^2 = 100 \text{ [V}^2\text{]}$ de la puissance totale

P . La puissance totale s'écrit :

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t) \cdot dt \\
 &= \frac{1}{1 \text{ [ms]}} \cdot \int_{-\frac{1 \text{ [ms]}}{2}}^{+\frac{1 \text{ [ms]}}{2}} x^2(t) \cdot dt \\
 &= \frac{1}{1 \text{ [ms]}} \cdot \int_0^{+\frac{1 \text{ [ms]}}{2}} (20 \text{ [V]})^2 \cdot dt \\
 &= \frac{1}{1 \text{ [ms]}} \cdot (20 \text{ [V]})^2 \cdot [t]_0^{+\frac{1 \text{ [ms]}}{2}} \\
 &= \frac{1}{1 \text{ [ms]}} \cdot (20 \text{ [V]})^2 \cdot \left[+\frac{1 \text{ [ms]}}{2} - 0 \right] \\
 &= 200 \text{ [V}^2]
 \end{aligned}$$

La valeur efficace est donc :

$$U_{1\text{eff}} = \sqrt{P} = \sqrt{200 \text{ [V}^2]} = 10 \cdot \sqrt{2} \text{ [V]}$$

On déduit de la puissance totale P et de la puissance DC P_{dc} la puissance AC :

$$P_{1,\text{AC}} = P_1 - P_{1,\text{DC}} = 200 \text{ [V}^2] - 100 \text{ [V}^2] = 100 \text{ [V}^2]$$

La valeur efficace AC est :

$$U_{1\text{effAC}} = \sqrt{P_{1,\text{AC}}} = 10 \text{ [V]}$$

Puissance du signal $u_2(t)$ La valeur DC sera égale à celle de $u_1(t)$ puisque l'on a affaire à un filtre passe-bas. Par calcul,

on aurait :

$$\begin{aligned} U_2(j \cdot 0) &= H(j \cdot f) \cdot U_1(j \cdot 0) \\ &= \frac{1}{1 + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot f_0 \cdot \tau} \cdot U_1(j \cdot 0) \\ &= 1 \cdot U_1(j \cdot 0) \\ &= 10 \text{ [V]} \end{aligned}$$

Pour la puissance totale, on peut procéder selon Parseval dans le domaine fréquentiel ou temporel. On peut aussi noter que si le rapport des amplitudes de la sortie et de l'entrée est donné par

$$\frac{U_2(j \cdot k)}{U_1(j \cdot k)} = H(j \cdot f)|_{f=k \cdot f_0}$$

celui des puissances est par suite donné par :

$$\frac{P_2(j \cdot k)}{P_1(j \cdot k)} = \frac{|U_2(j \cdot k)|^2}{|U_1(j \cdot k)|^2} = |H(j \cdot f)|_{f=k \cdot f_0}^2$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} P_2(j \cdot k) &= |H(j \cdot k \cdot f_0)|^2 \cdot P_1(j \cdot k) \\ &= \frac{1}{1 + (2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot \tau)^2} \cdot P_1(j \cdot k) \end{aligned}$$

Pour la puissance DC de $u_2(t)$ on a donc :

$$\begin{aligned} P_2(j \cdot 0) &= \frac{1}{1 + (2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot f_0 \cdot \tau)^2} \cdot P_1(j \cdot 0) \\ &= 1.0 \cdot P_1(j \cdot 0) \\ &= 1.0 \cdot |U_1(j \cdot 0)|^2 \\ &= 100 \text{ [V}^2\text{]} \end{aligned}$$

La puissance totale est plus facilement calculée dans le domaine temporel :

$$\begin{aligned}
 P_2 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u_2^2(t) \cdot dt \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} \cdot \tau} \right) \right)^2 \cdot d\tau + \frac{1}{T} \cdot \int_{\frac{T}{2}}^T \left(U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot \left(\tau - \frac{T}{2} \right)} \right)^2 \cdot d\tau \Bigg|_{t'=\tau-\frac{T}{2}} \\
 &= \frac{U_0^2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} \cdot \tau} \right)^2 \cdot d\tau + \frac{1}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{-\frac{1}{RC} \cdot t'} \right)^2 \cdot dt' \\
 &= \frac{U_0^2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} \cdot \tau} \right)^2 \cdot d\tau + \frac{U_0^2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-2 \cdot \frac{1}{RC} \cdot t'} \cdot dt' \\
 &= \frac{U_0^2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(1 - 2 \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot \tau} + e^{-2 \cdot \frac{1}{RC} \cdot \tau} \right) \cdot d\tau + \frac{U_0^2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-2 \cdot \frac{1}{RC} \cdot t'} \cdot dt' \\
 &= \frac{U_0^2}{T} \cdot \left[t - 2 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{RC}} \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} + \frac{1}{-2 \cdot \frac{1}{RC}} \cdot e^{-2 \cdot \frac{1}{RC} \cdot t} \right]_0^{\frac{T}{2}} + \frac{U_0^2}{T} \cdot \left[\frac{1}{-2 \cdot \frac{1}{RC}} \cdot e^{-2 \cdot \frac{1}{RC} \cdot t} \right]_0^{\frac{T}{2}} \\
 &= \frac{U_0^2}{T} \cdot \left[t - 2 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{RC}} \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} + 2 \cdot \frac{1}{-2 \cdot \frac{1}{RC}} \cdot e^{-2 \cdot \frac{1}{RC} \cdot t} \right]_0^{\frac{T}{2}} \\
 &= \frac{U_0^2}{T} \cdot \left[+\frac{T}{2} - 0 - 2 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{RC}} \cdot \left(e^{-\frac{1}{RC} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-\frac{1}{RC} \cdot 0} \right) + 4 \cdot \frac{1}{-2 \cdot \frac{1}{RC}} \cdot \left(e^{-2 \cdot \frac{1}{RC} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-2 \cdot \frac{1}{RC} \cdot 0} \right) \right] \\
 &= \frac{U_0^2}{T} \cdot \left[+\frac{T}{2} - 2 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{RC}} \cdot \left(e^{-\frac{1}{RC} \cdot \frac{T}{2}} - 1 \right) + 4 \cdot \frac{1}{-2 \cdot \frac{1}{RC}} \cdot \left(e^{-2 \cdot \frac{1}{RC} \cdot \frac{T}{2}} - 1 \right) \right] \\
 &= \frac{U_0^2}{T} \cdot \left[+\frac{T}{2} - 2 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{RC}} \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot \frac{T}{2}} + 4 \cdot \frac{1}{-2 \cdot \frac{1}{RC}} \cdot e^{-2 \cdot \frac{1}{RC} \cdot \frac{T}{2}} \right] \\
 &= U_0^2 \cdot \left[\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{R \cdot C}{T} \cdot e^{-\frac{T}{2RC}} - 2 \cdot \frac{R \cdot C}{T} \cdot e^{-\frac{T}{RC}} \right] \Bigg|_{T=1 \text{ [ms]} \gg R \cdot C=1 \text{ [k}\Omega\text{]} \cdot 0.1 \text{ [}\mu\text{F]}=0.1 \text{ [ms]} \\
 &\approx \frac{1}{2} \cdot U_0^2 \\
 &\approx \frac{1}{2} \cdot (20 \text{ [V]})^2 \\
 &\approx 200 \text{ [V}^2\text{]}
 \end{aligned}$$

La puissance AC de $u_2(t)$ est dès lors :

$$P_{2,AC} = P_2 - P_{1,DC} = 200 \text{ [V}^2] - 100 \text{ [V}^2] = 100 \text{ [V}^2]$$

La valeur efficace AC est :

$$U_{2\text{effAC}} = \sqrt{P_{2,AC}} = 10 \text{ [V]}$$

Puissance du signal $i(t)$ Suite du corrigé en préparation.

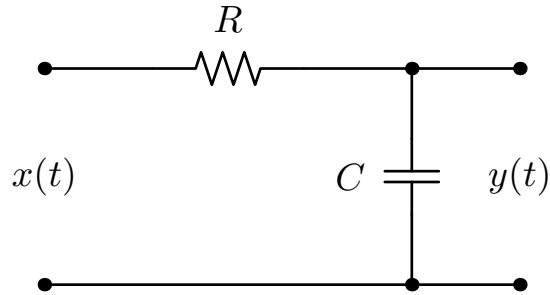


FIG. 1.13 – (fichier source).

1.1.11 Exercice SF 17

Soit un filtre RC passe-bas dont la constante de temps est mal connue. On lui applique une SIR $x(t)$ d'amplitude $A = 10$ [V], de période $T = 20$ [ms] et de largeur $\Delta t = 1$ [ms].

1. que valent les composantes continues des signaux d'entrée et de sortie ?
2. quelle est la fonction de transfert $H(j \cdot \omega)$ du circuit ;
3. que valent les spectres bilatéraux $X(j \cdot k)$ et $Y(j \cdot k)$?
4. admettant que la constante de temps est de l'ordre de 2 [ms], esquissez les signaux d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$; estimez la valeur maximum de $y(t)$;
5. pour la fréquence $f = 5 \cdot f_0$, l'analyseur spectral du signal de sortie fournit le coefficient complexe $Y(j \cdot 5) = -0.0659 - j \cdot 0.154$; calculez l'amplitude et l'argument de la fonction de transfert pour cette fréquence ;
(Rép. : $|H| = 0.37, \angle H = -68$ [°])
6. que valent la constante de temps et la fréquence de coupure du filtre ?
(Rép. : $\tau = 1.6$ [ms], $f_c = 100$ [Hz])

Corrigé

1. Comme il s'agit d'un filtre passe-bas (figure 1.13), la composante continue $X(j \cdot 0)$ de l'entrée $x(t)$ se retrouve telle quelle à la sortie :

$$Y(j \cdot 0) = X(j \cdot 0)$$

2. Sous l'hypothèse de régime sinusoïdal permanent, la fonction de transfert en $j \cdot \omega$ s'obtient en raisonnant avec des impédance complexes et en faisant usage de la règle du diviseur de tension :

$$Y(j \cdot k) = \frac{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} \cdot X(j \cdot k)$$

d'où :

$$H(j \cdot \omega) = \frac{Y(j \cdot k)}{X(j \cdot k)} = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot R \cdot C} = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot \tau} = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{f}{f_c}} \Big|_{f_c = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \tau}}$$

3. Pour $X(j \cdot k)$, c'est le spectre bien connu d'une SIR :

$$X(j \cdot k) = A \cdot \frac{\Delta t}{T} \cdot \text{sinc}(k \cdot f_0 \cdot \Delta t) = 10 \cdot \frac{1 [\text{ms}]}{20 [\text{ms}]} \cdot \text{sinc}\left(k \cdot \frac{1}{20 [\text{ms}]} \cdot 1 [\text{ms}]\right) = 0.5 \cdot \text{sinc}(0.05 \cdot k)$$

avec $f_0 = \frac{1}{T}$. $Y(j \cdot k)$ est donc simplement :

$$Y(j \cdot k) = H(j \cdot \omega)|_{\omega=2 \cdot \pi \cdot f=2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0} \cdot X(j \cdot k) = \frac{1}{1 + j \cdot k \cdot \frac{f_0}{f_c}} \cdot 0.5 \cdot \text{sinc}(0.05 \cdot k)$$

Graphiquement, les résultats se présentent comme indiqué sur la figure 1.14.

4. La figure 1.15 montre le signal de sortie, obtenu ici non par calcul analytique (résolution de l'équation différentielle régissant le circuit de la figure 1.13) par synthèse à partir des $N = 41$ premiers termes de $Y(j \cdot k)$, i.e. par :

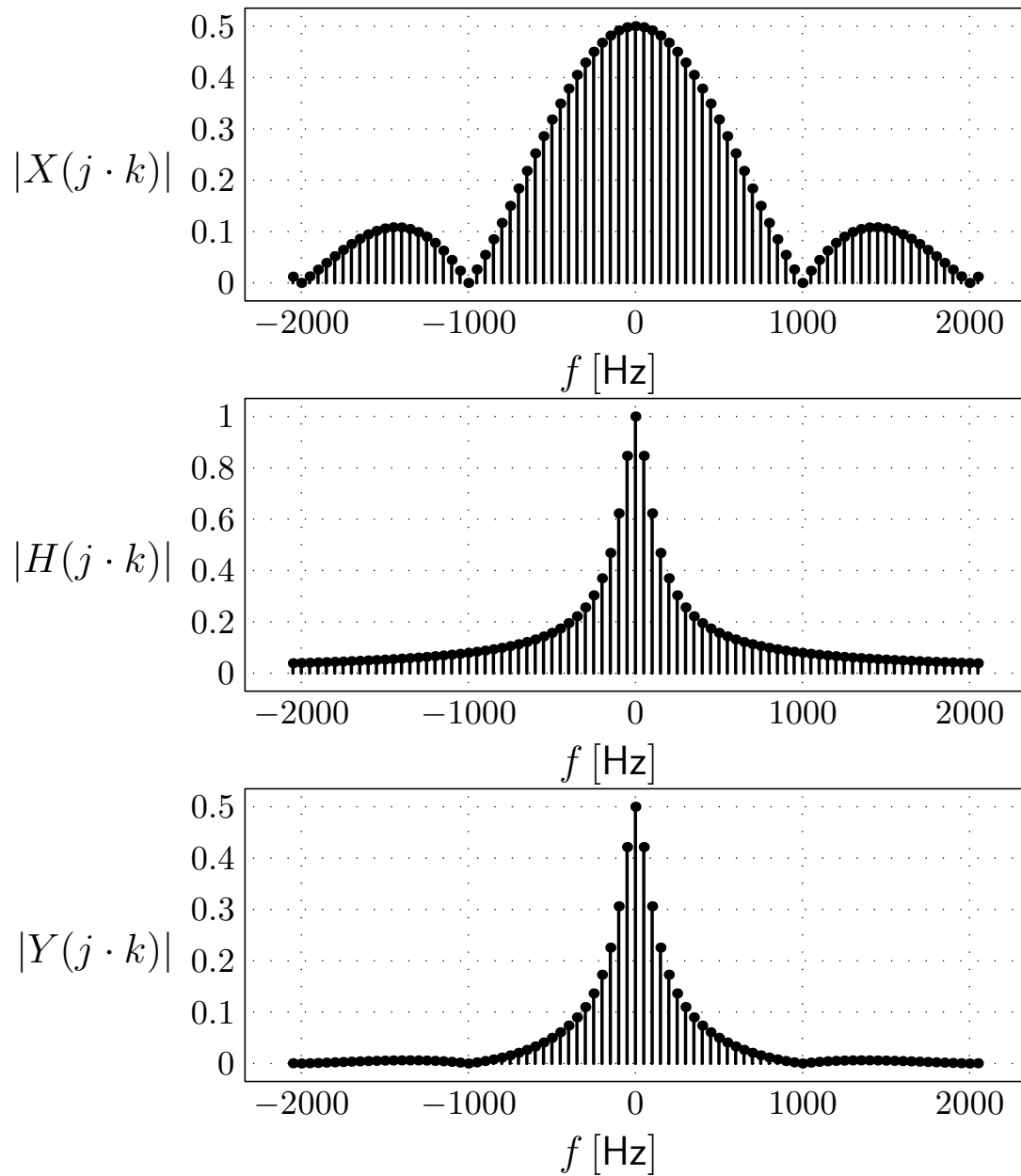
$$y_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} Y(j \cdot k) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t}$$

5. On a :

$$\begin{aligned} H(j \cdot \omega)|_{\omega=2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot f_0} &= \frac{Y(j \cdot 5)}{X(j \cdot 5)} \\ &= \frac{0.0659 - j \cdot 0.154}{0.5 \cdot \text{sinc}(0.05 \cdot 5)} \\ &= -0.1464 - 0.3421 \cdot j \\ &= 0.3721 \cdot e^{-j \cdot 113.1671} [^\circ] \end{aligned}$$

6. Du point précédent, on tire :

$$\begin{aligned} |H(j \cdot \omega)|_{\omega=2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot f_0} &= 0.3721 \\ &= \left| \frac{1}{1 + j \cdot \frac{f}{f_c}} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \end{aligned}$$

FIG. 1.14 – (fichier source).

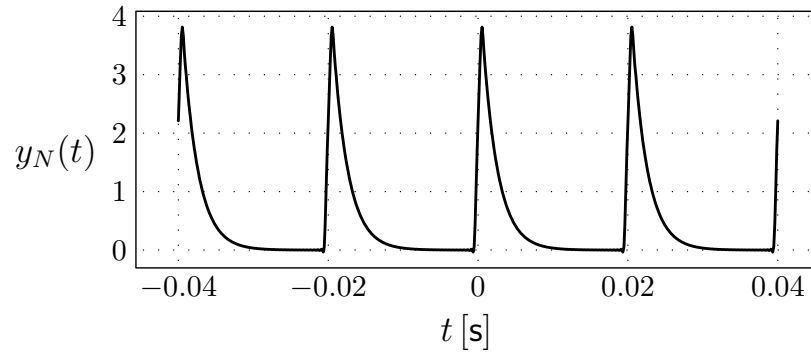


FIG. 1.15 – Signal de sortie $y(t) \approx y_{41}(t)$, obtenu par synthèse à partir des $N = 41$ premiers termes de $Y(j \cdot k)$, i.e. par : $y_{41}(t) = \sum_{k=-41}^{+41} Y(j \cdot k) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t}$ ([fichier source](#)).

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{0.3721^2} &= 1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2 \\ \sqrt{\frac{1}{0.3721^2} - 1} &= \frac{f}{f_c} \\ \frac{f}{\sqrt{\frac{1}{0.3721^2} - 1}} &= f_c \\ \frac{5 \cdot f_0}{\sqrt{\frac{1}{0.3721^2} - 1}} &= f_c \\ \frac{5 \cdot 50 \text{ [Hz]}}{\sqrt{\frac{1}{0.3721^2} - 1}} &= f_c \\ 100.22 \text{ [Hz]} &= f_c \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\tau = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_c} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 100.22 \text{ [Hz]}} = 1.59 \text{ [ms]}$$

1.1.12 Exercice SF 21

Un circuit non linéaire de type parabolique est modélisé par la caractéristique de transfert suivante :

$$u_2(t) = \alpha \cdot u_1(t) + \beta \cdot u_1^2(t)$$

Sachant qu'on lui applique une tension sinusoïdale $u_1(t) = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$:

1. déterminez les composantes spectrales que l'on obtient à la sortie ;
2. quelle est la puissance normalisée P_2 du signal de sortie ?
3. que vaut-elle par rapport à celle du signal d'entrée P_1 ?
4. faites l'A.N. avec $A = 10$ [V], $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 100$ [$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$], $\alpha = 1$, $\beta = 0.2$ [V^{-1}]
5. esquissez $u_2(t)$; quel est son taux de distorsion harmonique ?

Corrigé

1. $u_2(t)$ a pour expression :

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \alpha \cdot u_1(t) + \beta \cdot u_1^2(t) \\ &= \alpha \cdot A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + \beta \cdot (A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t))^2 \\ &= \alpha \cdot A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + \beta \cdot A^2 \cdot \frac{1 - 2 \cdot \cos(2 \cdot \omega_0 \cdot t)}{2} \\ &= \beta \cdot \frac{A^2}{2} + \alpha \cdot A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) - \beta \cdot \frac{A^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \end{aligned}$$

Pour obtenir rapidement le spectre $U_2(j \cdot k)$ de $u_2(t)$, on peut dans ce cas faire usage des relations d'Euler :

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \beta \cdot \frac{A^2}{2} + \alpha \cdot A \cdot \frac{e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} - e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2 \cdot j} - \beta \cdot \frac{A^2}{2} \cdot \frac{e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} \\ &= \beta \cdot \frac{A^2}{2} + \frac{\alpha \cdot A}{2 \cdot j} \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} - \frac{\alpha \cdot A}{2 \cdot j} \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} - \frac{\beta \cdot A^2}{4} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} - \frac{\beta \cdot A^2}{4} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \\ &= 0.2 \cdot \frac{10^2}{2} + \frac{1 \cdot 10}{2 \cdot j} \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} - \frac{1 \cdot 10}{2 \cdot j} \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} - \frac{0.2 \cdot 10^2}{4} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} - \frac{0.2 \cdot 10^2}{4} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \\ &= 10 + 5 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + 5 \cdot e^{+j \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} + 5 \cdot e^{j \cdot \pi} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 5 \cdot e^{-j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \\ &= U_2(j \cdot 0) + U_2(j \cdot 1) + U_2(-j \cdot 1) + U_2(j \cdot 2) + U_2(-j \cdot 2) \end{aligned}$$

2. La puissance du signal d'entrée est donnée par le carré de sa valeur efficace, soit

$$P_1 = U_{\text{eff}}^2 = \frac{A^2}{\sqrt{2}} = \frac{A^2}{2} = \frac{10^2}{2} = 50 \text{ [V}^2\text{]}$$

Pour le signal de sortie $u_2(t)$, on a en faisant usage de Parseval :

$$\begin{aligned}
 P_2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(j \cdot k)|^2 \\
 &= |U_2(-j \cdot 2)|^2 + |U_2(-j \cdot 1)|^2 + |U_2(j \cdot 0)|^2 + |U_2(j \cdot 1)|^2 + |U_2(j \cdot 2)|^2 \\
 &= |5 \cdot e^{-j \cdot \pi}|^2 + |5 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}}|^2 + 10^2 + |5 \cdot e^{+j \cdot \frac{\pi}{2}}|^2 + |5 \cdot e^{j \cdot \pi}|^2 \\
 &= 5^2 + 5^2 + 10^2 + 5^2 + 5^2 \\
 &= 200 \text{ [V}^2\text{]}
 \end{aligned}$$

3. On a :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{200 \text{ [V}^2\text{]}}{50 \text{ [V}^2\text{]}} = 4$$

4. cf ci-dessus

5. Le taux de distortion harmonique (TDH) est donné par :

$$TDH = \frac{X_{\text{eff}}(k > 1)}{X_{\text{eff}}(k = 1)} = \sqrt{\frac{X^2(2) + X^2(3) + X^2(4) + \dots}{X^2(1)}}$$

On a donc :

$$TDH = \sqrt{\frac{U_2^2(2)}{U_2^2(1)}} = \sqrt{\frac{5^2}{5^2}} = 100\%$$

Chapitre 2

Analyse des signaux non périodiques

2.1 Corrigé des exercices

2.1.1 Exercice TF 1

À partir de la seule observation du signal temporel de la figure 2.1, précisez ce que vaut sa densité spectrale en $f = 0$ [Hz] puis calculez et esquissez sa transformée de Fourier.

Corrigé

Selon la propriété de la transformée de Fourier

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot dt$$

on a :

$$X(0) = 1 \cdot 2 \text{ [ms]} + 2 \cdot 2 \text{ [ms]} + 1 \cdot 2 \text{ [ms]} = 8 \text{ [ms]}$$

Le signal de la figure 2.1 page suivante est constitué de 3 impulsions rectangulaires décalées et pondérées. Si $y(t)$ est une impulsion rectangulaire définie comme

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > \frac{\Delta t}{2} \\ 1 & \text{si } |t| \leq \frac{\Delta t}{2} \end{cases}$$

dont la transformée de Fourier est

$$Y(j \cdot f) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \Delta t \cdot \text{sinc}(f \cdot \Delta t)$$

alors $x(t)$ peut être exprimé comme suit :

$$x(t) = y(t + 4 \text{ [ms]}) + 2 \cdot y(t) + y(t - 4 \text{ [ms]})$$

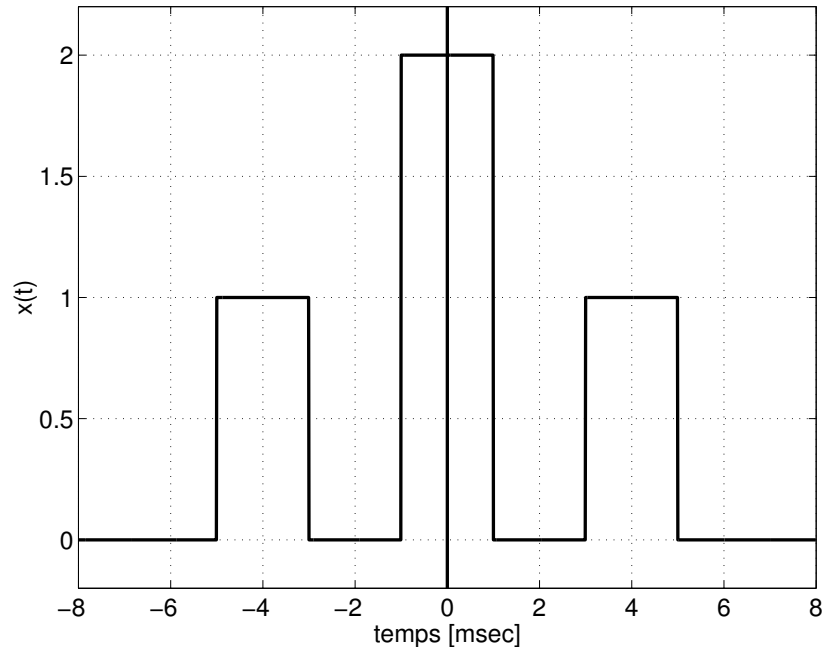


FIG. 2.1 – Exercice TF1.

En faisant usage des propriétés de linéarité

$$a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \longleftrightarrow a \cdot X(j \cdot f) + b \cdot Y(j \cdot f)$$

et de décalage

$$x(t + t_d) \longleftrightarrow X(j \cdot f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_d}$$

de la transformée de Fourier, on a :

$$\begin{aligned} X(j \cdot f) &= \mathcal{F}\{x(t)\} \\ &= Y(j \cdot f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot 4 [\text{ms}]} + 2 \cdot Y(j \cdot f) + Y(j \cdot f) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot 4 [\text{ms}]} \\ &= \Delta t \cdot \text{sinc}(f \cdot \Delta t) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot 4 [\text{ms}]} + 2 \cdot \Delta t \cdot \text{sinc}(f \cdot \Delta t) + \Delta t \cdot \text{sinc}(f \cdot \Delta t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot 4 [\text{ms}]} \\ &= \Delta t \cdot \text{sinc}(f \cdot \Delta t) \cdot [e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot 4 [\text{ms}]} + 2 + e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot 4 [\text{ms}]}] \\ &= \Delta t \cdot \text{sinc}(f \cdot \Delta t) \cdot [2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot 4 [\text{ms}]) + 2] \\ &= 2 \cdot 2 [\text{ms}] \cdot \text{sinc}(f \cdot 2 [\text{ms}]) \cdot [\cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot 4 [\text{ms}]) + 1] \\ &= 4 [\text{ms}] \cdot \text{sinc}(f \cdot 2 [\text{ms}]) \cdot [1 + \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot 4 [\text{ms}])] \end{aligned}$$

2.1.2 Exercice TF 2

Partant de la TF d'une impulsion rectangulaire et de la propriété d'intégration, calculez les TF de $x(t)$ et $y(t)$ (figure 2.2). Après calculs, vous remarquerez que $Y(j \cdot f)$ peut s'écrire sous la forme d'un sinc^2 .

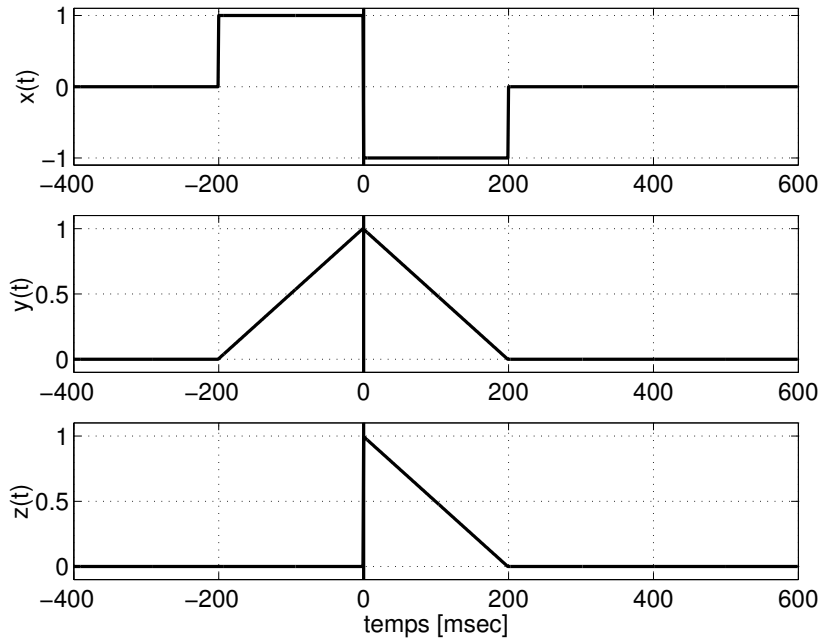


FIG. 2.2 – Exercices TF2 et TF3.

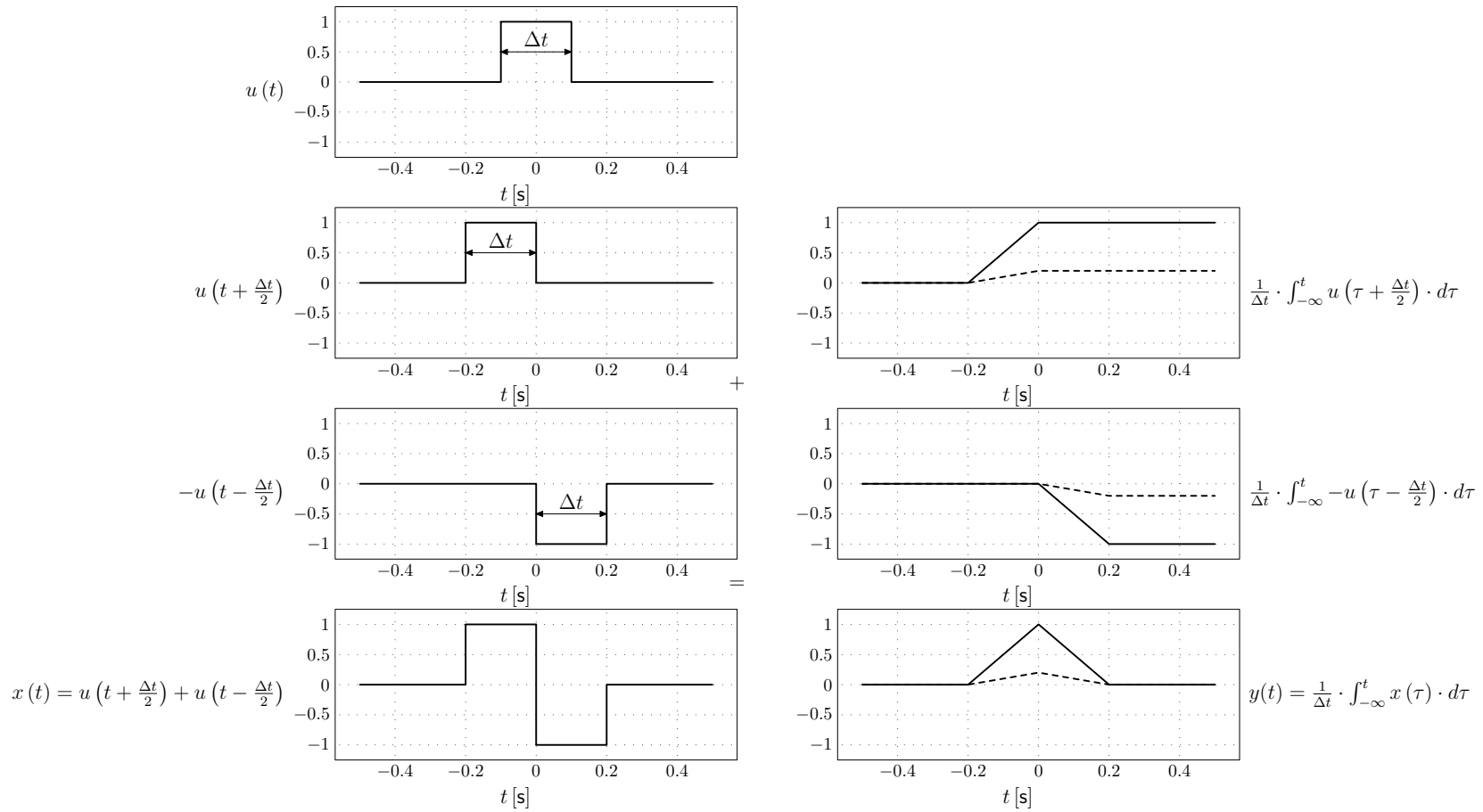
Corrigé

$x(t)$ est constituée la superposition de 2 impulsions de largeur $\Delta t = 200$ [ms], l'une avancée de $t_{d1} = 100$ [ms] = $\frac{\Delta t}{2}$ et l'autre retardée de $t_{d2} = -100$ [ms] = $-\frac{\Delta t}{2}$ et de polarité négative (figure 2.1.2). On a donc :

$$\begin{aligned}
 X(j \cdot f) &= \mathcal{F}\{x(t)\} \\
 &= A \cdot \Delta t \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot \Delta t) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{\Delta t}{2}} - A \cdot \Delta t \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot \Delta t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{\Delta t}{2}} \\
 &= A \cdot \Delta t \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot \Delta t) \cdot \left[e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{\Delta t}{2}} - e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{\Delta t}{2}} \right] \\
 &= A \cdot \Delta t \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot \Delta t) \cdot 2 \cdot j \cdot \sin(\pi \cdot f \cdot \Delta t) \\
 &= j \cdot 2 \cdot A \cdot \Delta t \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot \Delta t) \cdot \sin(\pi \cdot f \cdot \Delta t)
 \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\begin{aligned}
 X(j \cdot f) &= j \cdot 2 \cdot A \cdot \Delta t \cdot \text{sinc}(f \cdot \Delta t) \cdot \sin(\pi \cdot f \cdot \Delta t) \\
 &= j \cdot 2 \cdot 1 \cdot 200 \text{ [ms]} \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot 200 \text{ [ms]}) \cdot \sin(\pi \cdot f \cdot 200 \text{ [ms]}) \\
 &= j \cdot 400 \text{ [ms]} \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot 200 \text{ [ms]}) \cdot \sin(\pi \cdot f \cdot 200 \text{ [ms]})
 \end{aligned}$$

FIG. 2.3 – En traitillé l'intégrale sans prise en compte du facteur $\frac{1}{\Delta t}$.

$y(t)$ correspond, à un facteur $\frac{1}{\Delta t}$ près, à l'intégrale de $x(t)$ (figure 2.1.2) :

$$y(t) = \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{-\infty}^t x(\tau) \cdot d\tau$$

Connaissant la propriété de la TF

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) \cdot d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot X(j \cdot f) + \frac{1}{2} \cdot X(0) \cdot \delta(f)$$

avec $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot dt$, l'on peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned} Y(j \cdot f) &= \mathcal{F}\{y(t)\} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \cdot \left[\frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot X(j \cdot f) + \frac{1}{2} \cdot \overbrace{X(0)}^{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot dt = 0} \cdot \delta(f) \right] \\ &= \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot X(j \cdot f) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot A \cdot \Delta t \cdot \text{sinc}(f \cdot \Delta t) \cdot 2 \cdot j \cdot \sin(\pi \cdot f \cdot \Delta t) \\ &= A \cdot \Delta t \cdot \text{sinc}(f \cdot \Delta t) \cdot \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot \Delta t)}{\pi \cdot f \cdot \Delta t} \\ &= A \cdot \Delta t \cdot \text{sinc}^2(\pi \cdot f \cdot \Delta t) \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\begin{aligned} Y(j \cdot f) &= A \cdot \Delta t \cdot \text{sinc}^2(\pi \cdot f \cdot \Delta t) \\ &= 1 \cdot 200 \text{ [ms]} \cdot \text{sinc}^2(\pi \cdot f \cdot 200 \text{ [ms]}) \end{aligned}$$

2.1.3 Exercice TF 3

Partant de la TF d'une impulsion et d'un saut unité, trouvez celle de $z(t)$ (figure 2.2). Est-il possible de trouver $Z(j \cdot f)$ à partir de $Y(j \cdot f)$? Vous pouvez vérifier votre résultat en calculant $Z(j \cdot f = 0)$ qui doit être égal à $\frac{\Delta t}{2}$.

Corrigé

1. $z(t)$ correspond à la somme (figure 2.4) de
 - (a) l'intégrale d'une impulsion rectangulaire $v(t)$ de largeur Δt , retardée de $\frac{\Delta t}{2}$ et d'amplitude $-\frac{1}{\Delta t}$:
 - (b) et d'un saut unité $\epsilon(t)$

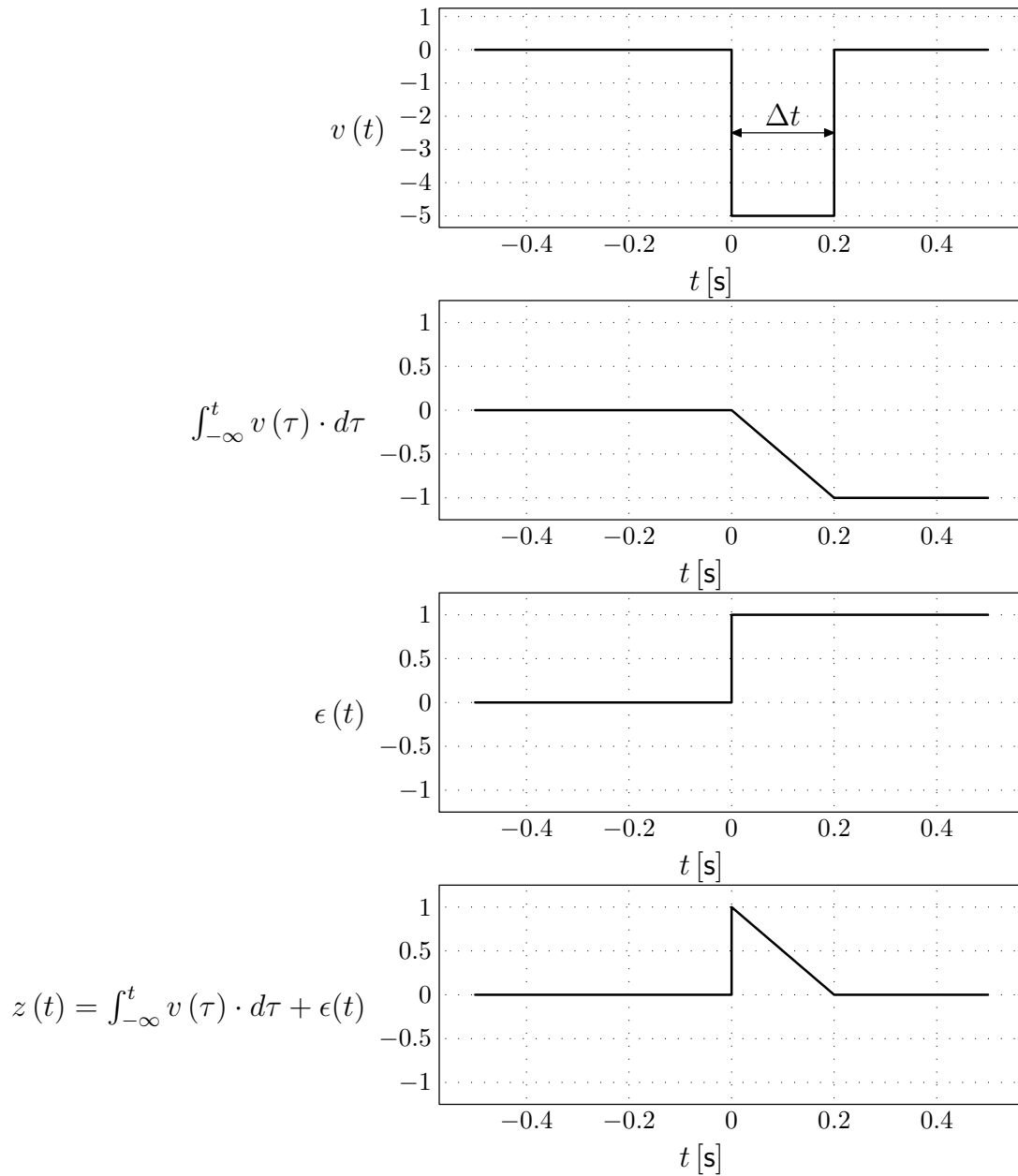


FIG. 2.4 –

$$z(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau) \cdot d\tau + \epsilon(t)$$

D'où :

$$Z(j \cdot f) = \mathcal{F}\{z(t)\}$$

$$Z(j \cdot f) = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t v(t) \cdot dt\right\} + \mathcal{F}\{\epsilon(t)\}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot V(j \cdot f) + \frac{1}{2} \cdot \overbrace{V(0)}^{\int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot dt = -1} \cdot \delta(f) + \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} + \frac{1}{2} \cdot \delta(f) \\ &= \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot \frac{1}{-\Delta t} \cdot \Delta t \cdot \text{sinc}(f \cdot \Delta t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{\Delta t}{2}} + \frac{-1}{2} \cdot \delta(f) + \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} + \frac{1}{2} \cdot \delta(f) \\ &= \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot [-\text{sinc}(f \cdot \Delta t) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot f \cdot \Delta t} + 1] \end{aligned}$$

2. On voit que

$$y(t) = z(-t) + z(t)$$

Comme $y(t)$ est paire, on sait que $\Im\{Y(j \cdot f)\} = 0$. On a :

$$Y(j \cdot f) = Z^*(j \cdot f) + Z(j \cdot f) = 2 \cdot \Re\{Z(j \cdot f)\}$$

Si on connaît $Y(j \cdot f)$, on ne peut déduire que $\Re\{Z(j \cdot f)\}$ et pas $\Im\{Z(j \cdot f)\}$.

3. On a par la propriété de la TF :

$$Z(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \cdot dt = \frac{\Delta t}{2}$$

On obtient le même résultat en faisant tendre f vers 0 dans l'expression de $Z(j \cdot f)$:

$$\begin{aligned} \lim_{f \rightarrow 0} Z(j \cdot f) &= \lim_{f \rightarrow 0} \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot [-\text{sinc}(f \cdot \Delta t) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot f \cdot \Delta t} + 1] \\ &= \lim_{f \rightarrow 0} \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot [-1 \cdot (1 - j \cdot \pi \cdot f \cdot \Delta t) + 1] \\ &= \lim_{f \rightarrow 0} \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot [-1 + j \cdot \pi \cdot f \cdot \Delta t + 1] \\ &= \frac{\Delta t}{2} \end{aligned}$$

2.1.4 Exercice TF 4

Soit un signal carré symétrique (à valeur moyenne nulle) d'amplitude A . Esquissez

1. le signal $x(t)$;
2. le spectre que l'on obtient avec les séries de Fourier ;
3. le spectre que l'on obtient avec la transformation de Fourier.

Corrigé

La série de Fourier complexe d'un signal carré périodique (figure 2.5) de période $T = \frac{1}{f_0}$, de valeur moyenne nulle (pas d'offset) se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}
 X(j \cdot k) &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^{+\frac{T}{4}} (+A) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t} \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_{\frac{T}{4}}^{+\frac{3 \cdot T}{4}} (-A) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t} \cdot dt \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{+\frac{T}{4}} e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t} \cdot dt - \int_{\frac{T}{4}}^{+\frac{3 \cdot T}{4}} e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t} \cdot dt \right) \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0} \cdot \left(e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot \frac{T}{4}} - e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot \frac{T}{4}} \right) - \frac{-1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0} \cdot \left(e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot \frac{3 \cdot T}{4}} - e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot \frac{T}{4}} \right) \right) \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \frac{T}{2})}{k \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \frac{T}{2}} - \frac{-1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0} \cdot \underbrace{e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot \frac{T}{2}}}_{-1^k} \cdot \left(e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot \frac{T}{4}} - e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot \frac{T}{4}} \right) \right) \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \frac{T}{2})}{k \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \frac{T}{2}} - (-1)^k \cdot \frac{-1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0} \cdot \left(e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot \frac{T}{4}} - e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot \frac{T}{4}} \right) \right) \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \frac{T}{2})}{k \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \frac{T}{2}} - (-1)^k \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \frac{T}{2})}{k \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \frac{T}{2}} \right) \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{pour } k = 0 \text{ et } k \text{ paire} \\ A \cdot \frac{\sin(k \cdot \frac{\pi}{2})}{k \cdot \frac{\pi}{2}} = \text{sinc}(k \cdot \frac{\pi}{2}) & \text{pour } k \text{ impaire} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ce résultat est représenté sur la figure 2.6.

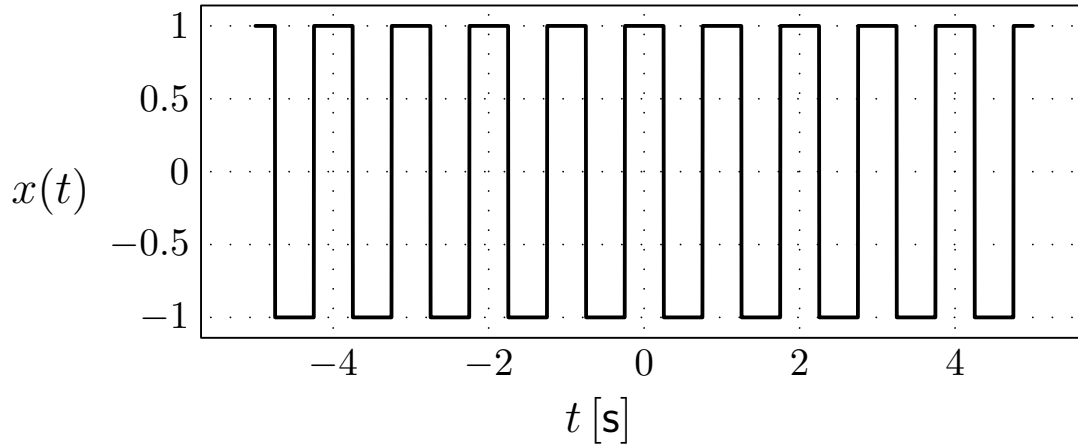


FIG. 2.5 –

Le signal carré périodique $x(t)$ s'exprime partant de sa série de Fourier complexe $X(j \cdot k)$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j \cdot k) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t}$$

La transformée de Fourier de $x(t)$ s'écrit alors, en appliquant la définition et en tenant compte de la transformée de Fourier d'un phaseur :

$$\begin{aligned} X(j \cdot f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j \cdot k) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j \cdot k) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j \cdot k) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t}}_{\text{phaseur}} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j \cdot k) \cdot \delta(f - k \cdot f_0) \end{aligned}$$

On obtient donc bel et bien un spectre de raies, représentées par des impulsions de Dirac pondérées par $X(j \cdot k)$ (figure 2.7).

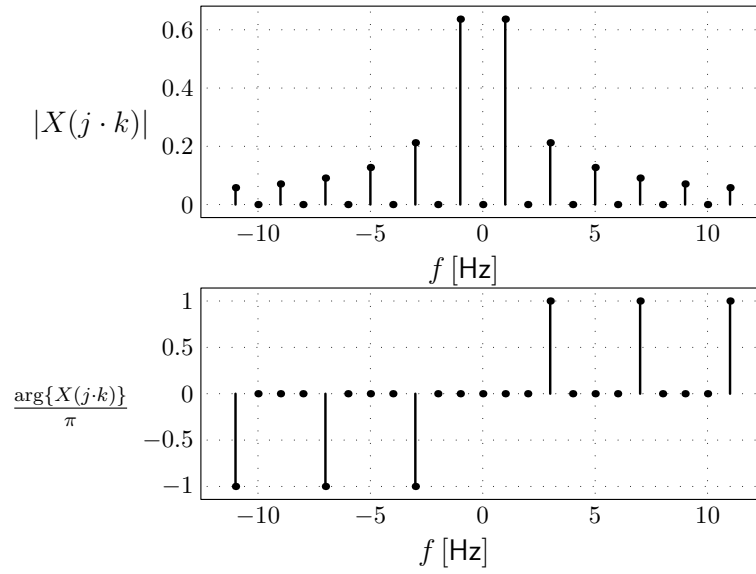


FIG. 2.6 –

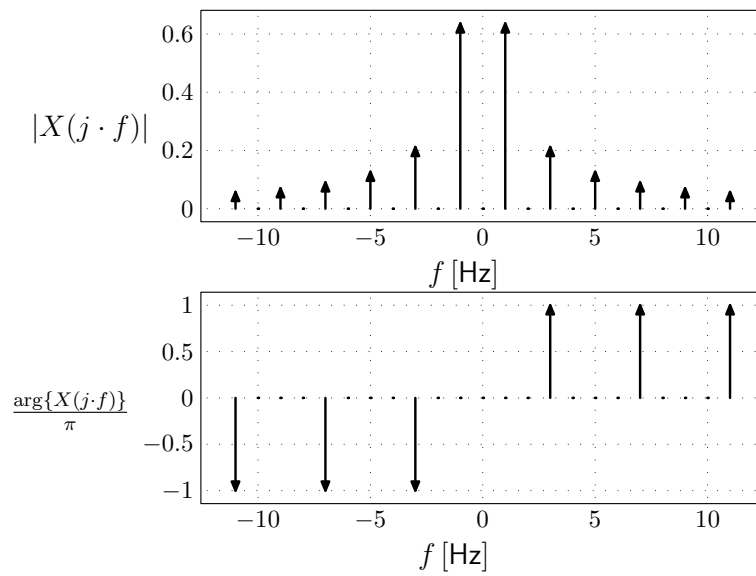


FIG. 2.7 –

2.1.5 Exercice TF 5

Considérant le signal $x(t) = e^{-a \cdot |t|}$, calculez et esquissez $x(t)$ et $X(j \cdot f)$, puis vérifiez les 2 égalités suivantes :

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot dt$$

$$x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j \cdot f) \cdot df$$

Corrigé

En préparation.

2.1.6 Exercice TF 6

| | fréquence | temps |
|---|--|-------|
| 1 | la partie réelle de $X(j \cdot f)$ est nulle | |
| 2 | la partie imaginaire de $X(j \cdot f)$ est nulle | |
| 3 | il existe un décalage t_0 tel que $e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0} \cdot X(j \cdot f)$ est réel | |
| 4 | $X(j \cdot f)$ est continu | |

1. Considérant les quatre propriétés fréquentielles du tableau ci-dessus, exprimez leur équivalent temporel dans la colonne de droite.
2. Pour chacun des signaux temporels de la figure 2.8, quelles sont les propriétés du tableau qui s'y appliquent ?
3. Construisez un signal qui ne possède aucune des quatre propriétés mentionnées dans le tableau.

Corrigé

En préparation.

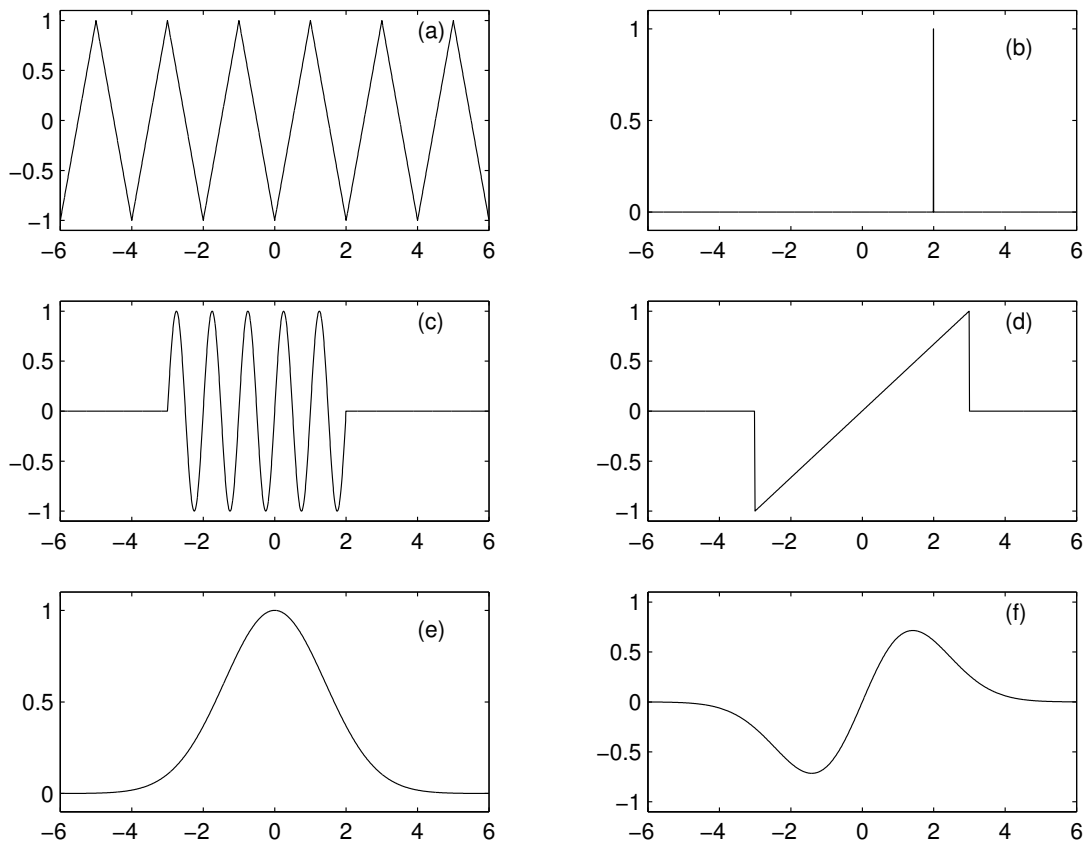
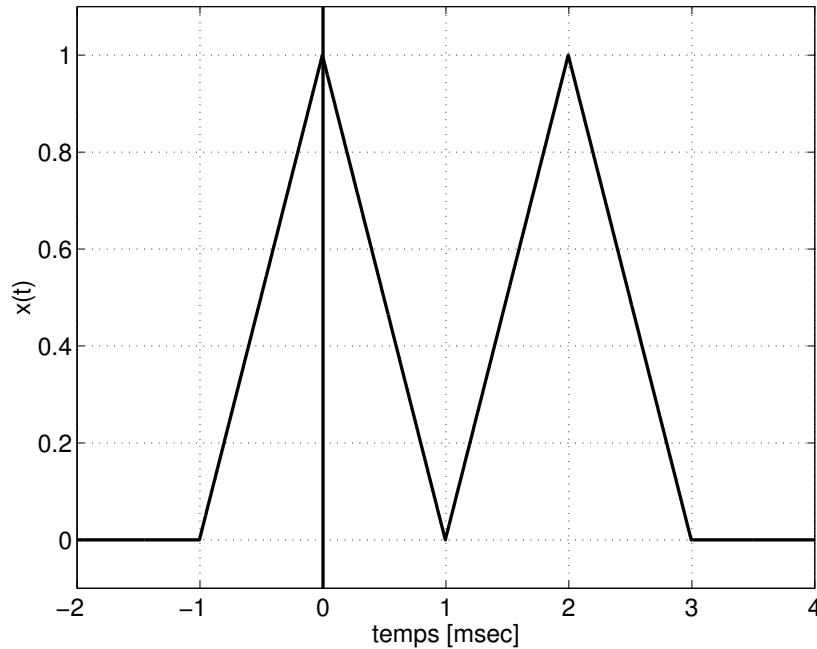


FIG. 2.8 – Exercice TF6.



5.

FIG. 2.9 – Exercice TF7.

2.1.7 Exercice TF 7

Soit $X(j \cdot f)$ la transformée de Fourier du signal $x(t)$ de la figure 2.9. Sans calculer explicitement $X(j \cdot f)$, recherchez :

1. la densité spectrale de phase de $X(j \cdot f)$;
2. la valeur de $X(f = 0)$;
3. la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j \cdot f) \cdot df$;
4. la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j \cdot f)|^2 \cdot df$.

Corrigé

En préparation.

2.1.8 Exercice TF 8

Connaissant la TF d'une sinusoïde amortie $x(t) = A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \cdot \epsilon(t)$:

1. calculez la transformée de Fourier d'une sinusoïde démarrant à l'instant zéro :

$$y(t) = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \cdot \epsilon(t)$$

2. esquissez les spectres $X(j \cdot f)$, $Y(j \cdot f)$ et celui d'une sinusoïde permanente ;
3. discutez les différences existant entre ces trois spectres.

Corrigé

En préparation.

2.1.9 Exercice TF 9

On applique une exponentielle décroissante $u_1(t) = U_0 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \epsilon(t)$, d'amortissement $a = 100 \text{ [s}^{-1}\text{]}$ à un filtre passe-bas de constante de temps $\tau = 1 \text{ [ms]}$;

1. calculez la TF $U_2(j \cdot f)$ de la tension de sortie $u_2(t)$ du filtre;
2. utilisez le tableau des transformées pour déduire l'expression temporelle de $u_2(t)$.

Corrigé

1. La fonction de transfert du filtre, exprimée dans le domaine fréquentiel, est :

$$H(j \cdot f) = \frac{U_2(j \cdot f)}{U_1(j \cdot f)} = \frac{1}{1 + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau}$$

On a donc, en tenant compte du fait que la transformée de Fourier de $u_1(t)$ a été calculée au §2.3.1 :

$$\begin{aligned} U_2(j \cdot f) &= H(j \cdot f) \cdot U_1(j \cdot f) \\ &= \frac{1}{1 + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} \cdot U_1(j \cdot f) \\ &= \frac{1}{1 + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} \cdot U_0 \cdot \frac{1}{a + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \\ &= \frac{U_0}{\tau} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\tau} + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot \frac{1}{a + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \end{aligned}$$

2. La transformée de Fourier inverse fournit directement $u_2(t)$ (annexe §2.A) :

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \frac{U_0}{\tau} \cdot \frac{1}{a - \frac{1}{\tau}} \cdot \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-a \cdot t} \right) \cdot \epsilon(t) \\ &= \frac{U_0}{a \cdot \tau - 1} \cdot \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-a \cdot t} \right) \cdot \epsilon(t) \\ &= \frac{U_0}{1 - a \cdot \tau} \cdot \left(e^{-a \cdot t} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \cdot \epsilon(t) \end{aligned}$$

2.1.10 Exercice TF 10

Soit un message $m(t) = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t)$ modulé en amplitude par une porteuse sinusoïdale $p(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$:

1. calculez la TF du signal modulé $x(t) = m(t) \cdot p(t) = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t)$;
2. esquissez le spectre du signal modulé $|X(j \cdot f)|$ si $f_1 = 10$ [kHz] et $f_0 = 800$ [kHz];
3. idem que le point 2) lorsque le signal $m(t)$ possède un spectre continu $|M(j \cdot f)|$ triangulaire et non-nul entre 2 [kHz] et 10 [kHz].

Corrigé

En préparation.

2.1.11 Exercice TF 11

Soit le signal :

$$u(t) = \begin{cases} U_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) & \text{si } |t| \leq t_0 \\ 0 & \text{si } |t| > t_0 \end{cases}$$

1. esquissez $u(t)$;
2. calculez sa TF $U(j \cdot f)$;
3. esquissez $|U(j \cdot f)|$ pour $U_0 = 1$ [V] $T = \frac{1}{f_0} = 1$ [ms] $t_0 = 10$ [ms].

Ce signal correspond à l'observation d'une fonction sinusoïdale pendant une durée finie $2 \cdot t_0$. On remarquera, une fois le calcul effectué, que l'analyse spectrale d'une sinusoïde pendant une durée finie revient à remplacer les raies spectrales situées en $f = \pm f_0$ par la fonction sinus cardinal.

Corrigé

On sait que

- 1.
2. On peut exprimer $u(t)$ comme

$$u(t) = \text{rect}(t, 2 \cdot \Delta t) \cdot U_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) = \text{rect}(t, 2 \cdot \Delta t) \cdot U_0 \cdot \frac{e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}}{2}$$

où la fonction $\text{rect}(t, \Delta t)$ est définie comme suit :

$$\text{rect}(t, \Delta t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > \frac{\Delta t}{2} \\ 1 & \text{si } |t| \leq \frac{\Delta t}{2} \end{cases}$$

Sa TF est (§2.2.1)

$$\Delta t \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot \delta t)$$

Sachant que (§2.1.4, propriété de modulation)

$$x(t) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} \longleftrightarrow X(j \cdot (f - f_0))$$

on peut écrire :

$$U(j \cdot \omega) = U_0 \cdot 2 \cdot \Delta t \cdot \text{sinc}(\pi \cdot \Delta t \cdot (f - f_0)) + U_0 \cdot 2 \cdot \Delta t \cdot \text{sinc}(\pi \cdot \Delta t \cdot (f + f_0))$$

3.

2.1.12 Exercice TF 12

Soit la fonction :

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot [1 - \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)] & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

1. esquissez $u(t)$;
2. calculez sa TF $U(j \cdot f)$;
3. esquissez $U(j \cdot f)$ et la TF d'une impulsion rectangulaire de même durée ;
4. observez les différences.

Corrigé

En préparation.

2.1.13 Exercice TF 13

Connaissant la transformée $E(j \cdot f)$ d'un saut unité $\epsilon(t)$, calculez la transformée $S(j \cdot f)$ de la fonction signe $s(t)$.

Corrigé

En préparation.

2.1.14 Exercice TF 14

Montrez qu'un produit simple dans l'espace des fréquences correspond à un produit de convolution dans l'espace temps :

$$Y(j \cdot f) = X(j \cdot f) \cdot H(j \cdot f) \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \cdot h(t - \theta) \cdot d\theta$$

Pour démontrer ce résultat important et bien connu, vous pouvez d'abord exprimer la TFI de $Y(j \cdot f)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j \cdot f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot df = \int_{-\infty}^{+\infty} H(j \cdot f) \cdot X(j \cdot f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot df$$

puis y introduire la TF de $x(t)$:

$$X(j \cdot f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \theta} \cdot d\theta$$

Corrigé

En préparation.

2.1.15 Exercice TF 15

Considérant la réponse d'un filtre $h(t)$ dont le spectre est le suivant :

$$H(j \cdot f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| \leq 100 \text{ [Hz]} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. esquissez $H(j \cdot f)$;
2. calculez, puis esquissez $h(t)$;
3. ce signal correspond à la réponse impulsionnelle du filtre décrit par $H(j \cdot f)$; ce filtre est-il réalisable ? Justifier la réponse.

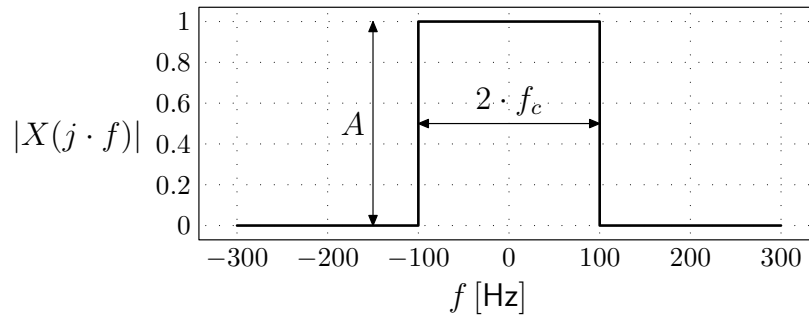
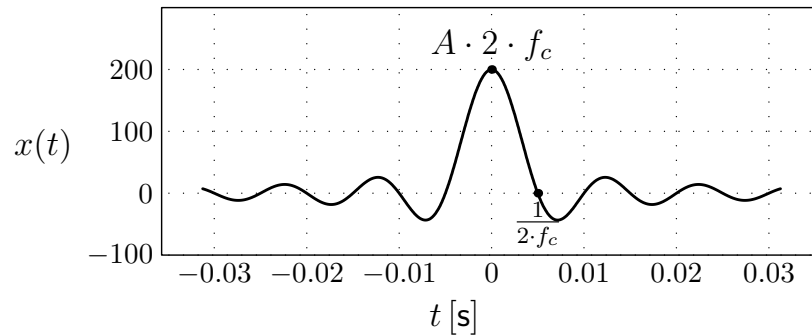
Indication Le calcul de la transformée de Fourier inverse (TFI) peut se faire en appliquant la définition telle quelle ; mais il est immédiat si l'on se souvient que

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j \cdot f) \iff \mathcal{F}^{-1}\{x(j \cdot f)\} = X(-t)$$

Corrigé

1. $H(j \cdot f)$ est une fenêtre fréquentielle rectangulaire de hauteur 1 et de largeur $2 \cdot f_c = 2 \cdot 100 \text{ [Hz]}$ (figure 2.10). On peut donc écrire :

$$H(j \cdot f) = \epsilon(f + f_c) - \epsilon(f - f_c)$$

FIG. 2.10 – ([fichier source](#))FIG. 2.11 – ([fichier source](#))

2. La TFI de $H(j \cdot f)$ est, en tenant compte de la propriété de symétrie de la transformée de Fourier

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j \cdot f) \iff \mathcal{F}^{-1}\{x(j \cdot f)\} = X(-t)$$

$$\begin{aligned} h(t) &= A \cdot 2 \cdot f_c \cdot \text{sinc}(-\pi \cdot t \cdot 2 \cdot f_c) \\ &= 200 \text{ [Hz]} \cdot \text{sinc}(\pi \cdot 200 \text{ [Hz]} \cdot t) \end{aligned}$$

C'est un sinus cardinal (sinc) en fonction de t (figure 2.11).

3. $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du filtre, i.e. la réponse à une impulsion de Dirac $\delta(t)$; celle-ci intervenant en $t = 0$ [s], on voit (figure 2.11) que la réponse $h(t)$ existe pour $t < 0$ [s]. Le système "filtre passe-base idéal" est donc non causal et par suite irréalisable.

2.1.16 Exercice TF 16

Considérant un signal $u(t)$ dont le spectre est le suivant :

$$U(j \cdot f) = \begin{cases} 1 & \text{si } 100 \text{ [Hz]} \leq |f| \leq 200 \text{ [Hz]} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. esquisser $U(j \cdot f)$;
2. calculer puis esquissez $u(t)$;
3. que vaut sa puissance ?

Corrigé

- 1.
2. En profitant de la propriété de symétrie

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j \cdot f) \iff \mathcal{F}^{-1}\{x(j \cdot f)\} = X(-t)$$

et en exprimant $X(j \cdot f)$ sous la forme de 2 impulsions décalées dans le domaine des fréquences,

$$X(j \cdot f) = \text{rect} \left(f + \underbrace{f_0}_{150 \text{ [Hz]}}, \underbrace{\Delta f}_{100 \text{ [Hz]}} \right) + \text{rect}(f - f_0, \Delta f)$$

on a :

$$\begin{aligned} x(t) &= \Delta f \cdot \text{sinc}(\pi \cdot \Delta f \cdot (-t)) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + \Delta f \cdot \text{sinc}(\pi \cdot \Delta f \cdot (-t)) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} \\ &= 2 \cdot \Delta f \cdot \text{sinc}(\pi \cdot \Delta f \cdot t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \end{aligned}$$

3. La puissance de $x(t)$ est avantageusement calculée dans l'espace des fréquences :

$$\begin{aligned} W_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) \cdot df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j \cdot f)|^2 \cdot df \\ &= 1 \cdot \Delta f + 1 \cdot \Delta f \\ &= 2 \cdot \Delta f \end{aligned}$$

2.1.17 Exercice TF 17

Utiliser la transformation de Fourier pour trouver le courant circulant dans un circuit RC série sachant que le signal appliqué est un saut de tension d'amplitude E .

Corrigé

Le circuit est décrit par l'équation différentielle (conditions initiales nulles) :

$$u(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i(\tau) \cdot d\tau$$

La transformée de Fourier des 2 membres de cette équation différentielle donne :

$$\begin{aligned} U(j \cdot f) &= R \cdot I(j \cdot f) + \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot I(j \cdot f) + \frac{1}{2} \cdot \delta(f) \cdot I(0) \right) \\ &= R \cdot I(j \cdot f) + \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{I(j \cdot f) + \overbrace{\frac{1}{2} \cdot \delta(f) \cdot I(0) \cdot j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}^{0 \forall f}}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \right) \\ &= R \cdot I(j \cdot f) + \frac{1}{C} \cdot \frac{I(j \cdot f)}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \\ &= \left(R + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \right) \cdot I(j \cdot f) \\ &= \frac{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot R \cdot C + 1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} \cdot I(j \cdot f) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} I(j \cdot f) &= \frac{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}{1 + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot R \cdot C} \cdot U(j \cdot f) \\ &= \frac{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}{1 + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot R \cdot C} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot E + \frac{1}{2} \cdot \delta(f) \cdot E \right) \\ &= \frac{C}{1 + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot R \cdot C} \cdot \left(\frac{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot E + \underbrace{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta(f) \cdot E}_0 \right) \\ &= \frac{C}{1 + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot R \cdot C} \cdot E \end{aligned}$$

De façon à être compatible avec les formes de présentation des transformées de Fourier utilisées dans la tables, on s'arrange pour que les coefficients des plus haute puissance de $j \cdot \omega$ (ici 1 au dénominateur, 0 au numérateur) soient **uni-**

taires :

$$\begin{aligned} I(j \cdot f) &= \frac{\frac{C}{R \cdot C}}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f + \frac{1}{R \cdot C}} \cdot E \\ &= \frac{\frac{1}{R}}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f + \frac{1}{R \cdot C}} \cdot E \\ &= \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f + \frac{1}{R \cdot C}} \cdot E \end{aligned}$$

En se référant à l'annexe 2A, on a, avec $a = \frac{1}{R \cdot C}$:

$$i(t) = \mathcal{F}^{-1} \{I(j \cdot f)\} = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t} \cdot \epsilon(t)$$

2.1.18 Exercice TF 18

On applique une fonction signe $u_1(t)$ d'amplitude E à un filtre RC passe-bas.

1. utilisez la transformation de Fourier pour trouver la tension de sortie ;
2. esquissez $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

Corrigé

En préparation.

2.1.19 Exercice TF 19

On applique une exponentielle symétrique $u_1(t) = U_0 \cdot e^{-a \cdot |t|}$ à un filtre passe-bas de constante de temps τ .

1. avant de vous lancer dans les calculs, esquissez $u_1(t)$ et imaginez ce que peut être $u_2(t)$;
2. calculez la tension de sortie du filtre.

La marche à suivre est la même que celle utilisée avec la transformation de Laplace : décomposition en somme de fractions simples puis recherche des coefficients par identification avec des transformées connues.

Corrigé

En préparation.

2.1.20 Exercice TF 20

On applique une exponentielle décroissante $u_1(t) = U_0 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \epsilon(t)$ à un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure f_c .

1. exprimez $U_1(j \cdot f)$ et $U_2(j \cdot f)$; esquissez leur module;
2. en admettant $U_0 = 10$ [V] et $a = 1000$ [s⁻¹], calculez les énergies E_1 et E_2 des signaux d'entrée et de sortie lorsque :

(a) $f_c = 1$ [kHz]

(b) $f_c = \frac{a}{2 \cdot \pi}$

Corrigé

En préparation.

2.1.21 Exercice TF 21

On applique à un filtre passe-bas de constante de temps $\tau = 1$ [ms] un signal $u_1(t)$ dont le spectre est défini par :

$$U_1(j \cdot f) = \begin{cases} 1 \left[\frac{\text{V}}{\text{Hz}} \right] & \text{si } 100 \text{ [Hz]} \leq |f| \leq 300 \text{ [Hz]} \\ 0 \left[\frac{\text{V}}{\text{Hz}} \right] & \text{sinon} \end{cases}$$

1. exprimez la fonction de transfert $H(j \cdot f)$ du filtre; que vaut sa fréquence caractéristique f_c ?
2. esquissez $U_1(j \cdot f)$, $H(j \cdot f)$ et $U_2(j \cdot f)$ pour -500 [Hz] $< f < +500$ [Hz];
3. quelles sont les énergies E_1 et E_2 des signaux d'entrée et de sortie?
4. comment évoluera E_2 si la constante de temps τ diminue?
5. comment calculeriez-vous $u_2(t)$? Ne faites pas les calculs, mais précisez point par point votre démarche; essayez d'entrevoir les difficultés de ce calcul.

Corrigé

En préparation.

2.1.22 Exercice TF 22

On applique à un filtre passe-bas de constante de temps $\tau = R \cdot C = 10$ [ms] une tension exponentielle $u_1(t) = 10 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \epsilon(t)$ avec $a = 1000$ [s⁻¹].

1. esquissez $u_1(t)$ et $u_2(t)$;
2. calculez les énergies contenues dans les signaux d'entrée et de sortie.¹

Corrigé

En préparation.

2.1.23 Exercice TF 23

On applique une impulsion de Dirac $\delta(t)$ à un filtre passe-bande dont la fonction de transfert vaut :

$$H(j \cdot f) = \frac{D_0 \cdot \frac{j \cdot f}{f_0}}{1 + D_0 \cdot \frac{j \cdot f}{f_0} + \left(\frac{j \cdot f}{f_0}\right)^2} \quad D_0 = \frac{1}{Q_0}$$

1. esquissez les spectres des signaux d'entrée et de sortie ;
2. exprimez l'énergie du signal de sortie contenue dans la bande passante Δf sachant que :

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{LC}} = 1 \text{ [kHz]} \quad D_0 = \frac{1}{Q_0} = 0.1$$

$$f_{i,s} = \frac{\Delta f}{2} \cdot \left[\pm 1 + \sqrt{1 + 4 \cdot Q_0^2} \right] \quad \Delta f = f_0 \cdot D_0$$

Corrigé

En préparation.

2.1.24 Exercice TF 24

Considérant le spectre $X(j \cdot f)$ de la figure 2.12 constitué d'un sinus cardinal d'amplitude $X(0) = 2 \cdot 10^{-3}$ et de 2 impulsions de Dirac de surface $\frac{1}{2}$, trouvez puis esquissez le signal $x(t)$ correspondant.

¹Si le calcul de l'intégrale définie nécessaire pour obtenir l'énergie vous paraît trop difficile, essayez la démarche suivante :

- (a) esquissez la fonction à intégrer ;
- (b) estimez des limites raisonnables pour la valeur de l'énergie ;
- (c) à l'aide d'un petit programme (une douzaine de lignes), intégrez numériquement la densité spectrale d'énergie. Si le nombre de pas est suffisant, le résultat obtenu sera tout à fait satisfaisant.

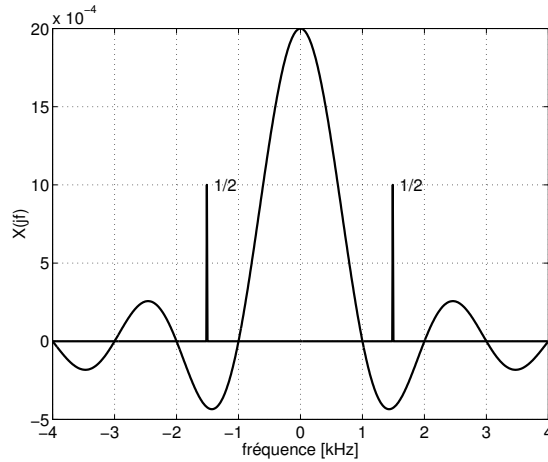


FIG. 2.12 – Exercice TF24.

Corrigé

En préparation.

2.1.25 Exercice TF 25

A partir du signal $x(t) = e^{-a \cdot t} \cdot \epsilon(t)$, trouvez le spectre de $y(t) = \text{sgn}(t)$.

Corrigé

En préparation.

2.1.26 Exercice Corr 1

Considérant le signal $x(t)$ défini comme suit :

$$x(t) = \begin{cases} -A & \text{si } -\Delta t < t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ +A & \text{si } 0 < t < \Delta t \\ 0 & \text{si } |t| \geq \Delta t \end{cases}$$

on demande :

1. esquissez $x(t)$
2. calculez sa fonction d'autocorrélation pour les valeurs particulières suivantes

$$\tau = 0 \quad \tau = \pm \Delta t \quad \tau = \pm 2 \cdot \Delta t$$

3. esquissez la fonction $r_{xx}(\tau)$ $-\infty < \tau < +\infty$.

Corrigé

1. L'esquisse de $x(t)$ est présentée à la figure 2.13(a).
2. – Pour $\tau = 0$ [s], la fonction d'autocorrélation est

$$r_{xx}(0) = W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) \cdot dt$$

On a :

$$r_{xx}(0) = 2 \cdot A^2 \cdot \Delta t$$

- Pour $\tau = \Delta t$, la situation est décrite sur la figure 2.13(b), avec en gris la surface définie par le produit $x(t) \cdot x(t + \tau)$. Comme, par définition, la fonction d'autocorrélation est l'intégrale de ce produit, i.e.

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x(t + \tau) \cdot dt$$

on a :

$$r_{xx}(\Delta t) = -A^2 \cdot \Delta t$$

- Pour $\tau = 2 \cdot \Delta t$, la situation est décrite sur la figure 2.13(c). On a clairement :

$$r_{xx}(2 \cdot \Delta t) = 0$$

3. Comme les surfaces définies par le produit $x(t) \cdot x(t + \tau)$ évoluent linéairement avec τ et que l'on dispose des valeurs de $r_x(\tau)$ pour $\tau = 0$ [s], $\tau = \Delta t$ et $\tau = 2 \cdot \Delta t$, on peut facilement esquisser $r_x(\tau)$ (figure 2.14).

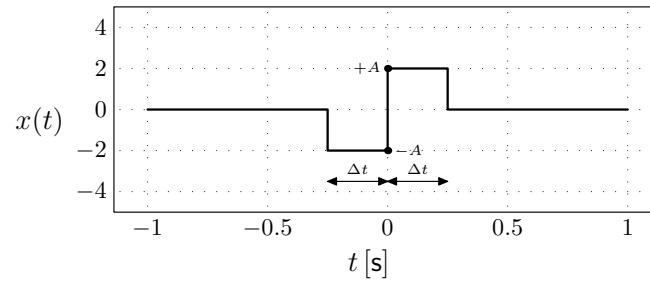
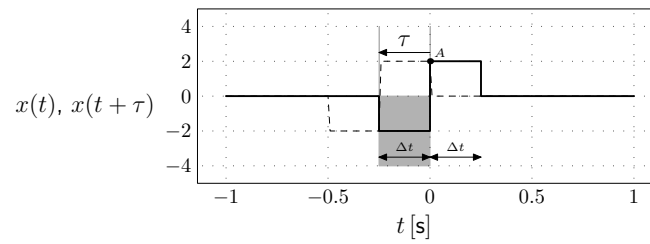
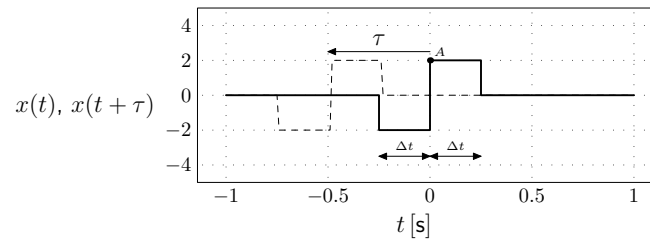
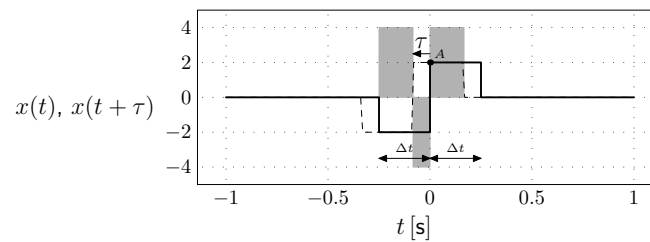
(a) $x(t)$ (b) $\tau = \Delta t$ (c) $\tau = 2 \cdot \Delta t$ (d) $\tau = 0.33 \text{ [s]}$

FIG. 2.13 – (a) : signal $x(t)$. (b) : décalage de $\tau = \Delta t$. (c) : décalage de $\tau = 2 \cdot \Delta t$. (d) : décalage de $\tau = 0.33 \text{ [s]}$ ([fichier source](#)).

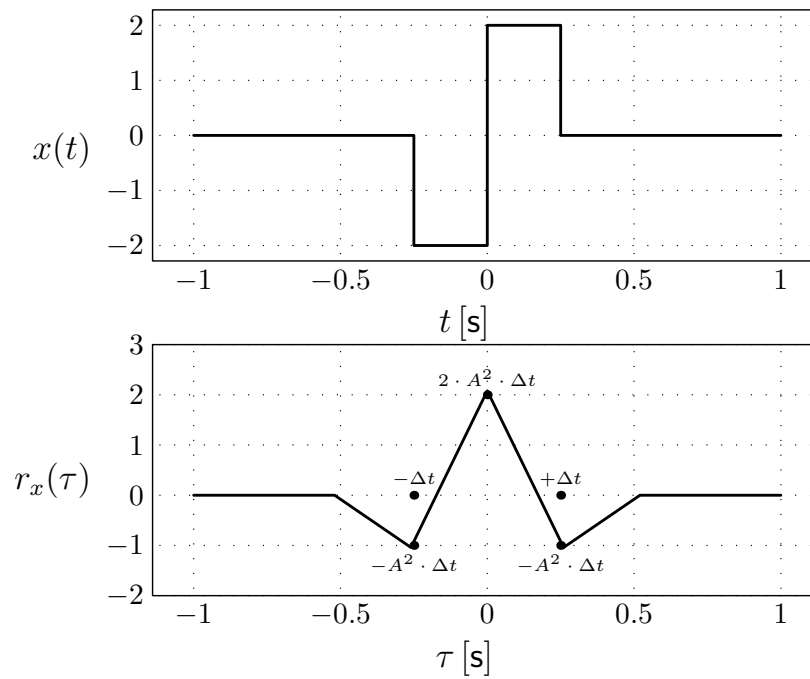


FIG. 2.14 – (fichier source)

2.1.27 Exercice Corr 2

Considérant les 3 signaux suivants :

- $x(t)$ = une exponentielle décroissante d'amplitude A et de constante de temps τ_1
- $y(t)$ = une impulsion rectangulaire centrée en $t = 0$, d'amplitude A et de largeur Δt
- $z(t)$ = une impulsion triangulaire centrée en $t = 0$, d'amplitude A et de base $2 \cdot \Delta t$

on demande :

1. esquissez ces 3 signaux ;
2. calculez des valeurs particulières de leur fonction d'autocorrélation ;
3. calculez leur fonction d'autocorrélation pour τ compris entre $+\infty$ et $-\infty$;
4. esquissez ces fonctions.

Remarque Le calcul de la troisième fonction n'est pas simple ; sans entrer dans le détail des calculs, imaginez comment vous devriez vous y prendre pour le faire.

Corrigé

En préparation.

Versions du document

| Version du document | Date | Notes |
|---------------------|-----------------|---|
| v1.8 | 29 janvier 2006 | erreur offset (1.5 \rightarrow 3) ex.4.2 (figure 1.6) |
| v1.9 | 31 janvier 2006 | erreur calcul puissance (75 [V ²] \rightarrow 85 [V ²]) ex. SF7, erreur (2 \pm j) \rightarrow (-2 \pm j) ex.SF6, terminé ex.SF6 |
| v1.10 | 3 février 2006 | erreur figure 2.5 |
| v1.11 | 25 février 2006 | erreur Δt ex. TF 2 |
| v1.12 | 11 mars 2006 | erreur phase $X(j \cdot k)$ ex. SF 15. Listing MATLAB exercice SF4 |
| v1.13 | 18 mars 2006 | erreur transformée de Fourier $I(j \cdot f)$ (manque C au numérateur) ex. TF 17 |
| v1.14 | 20 mars 2006 | exercice Corr 1 |

TAB. 3.1 – Versions publiées